





Analytische Geometrie

des

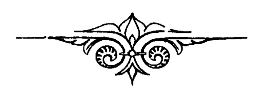
Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte,

nach neueren Methoden dargestellt

von

ADOLF HANNER,
ordentlicher Professor der höheren Mathematik an der k. u. k. technischen Militär-Akademie in Wien.

Mit 127 in den Text gedruckten Figuren.



PRAG, 1891.
Verlag von H. Dominicus.
Th. Gruss.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Vorwort.

Während meiner langjährigen Thätigkeit als Professor der höheren Mathematik an der k. u. k. technischen Militär-Akademie wäre es mir oft erwünscht gewesen, über ein Lehrbuch zu verfügen, welches den Vorträgen zur Grundlage dienen könnte. Auf Wunsch meiner Schüler ließ ich die Vorträge autographieren. Unter den bestehenden Verhältnissen mussten jedoch die Autographien ziemlich knapp gehalten werden und besaßen dieselben auch nicht jene Übersicht, wie ein gedrucktes Werk. Ich begann daher mit den Vorarbeiten zu einem Lehrbuche und vertiefte mich dabei in die bestehende Literatur über analytische und synthetische Geometrie, sowie über die Theorie der Determinanten und Invarianten. Das Studium der schönen Arbeiten von O. Hesse, Salmon-Fiedler, J. Plücker, A. Clebsch, P. Gordan, R. Baltzer, F. Joachimsthal, G. Escherich, A. Hohenheim, R. Heger, H. Schröter, E. Weyr und C. Schmitt führten mich aber über mein ursprüngliches Ziel hinaus. Wenn das so entstandene Buch noch immer als Grundlage des von der analytischen Geometrie handelnden Theils meiner Vorträge benützt werden kann, **so enthält es doch sehr Vieles, was in den Vorträgen ausgeschlossen werden musste.** Es schwebte mir eben ein umfassenderes Bild dieser Disciplinen vor, als in solchen Vorlesungen wiedergegeben werden kann, welche für die Bedürfnisse der technischen Militär-Akademie passend erscheinen.

In diesem Buche ist das Princip der Reciprocität oder Dualität durchwegs gewahrt. Es ist auch möglich, zuerst die in nicht homogenen Coordinaten gefassten Theile zu studieren und hierauf zu den homogenen Coordinaten überzugehen. Von den wichtigen Hilfsmitteln, welche die Theorie der Determinanten bietet, ist ein umfassender Gebrauch gemacht. Ich habe mich bemüht die Sätze in möglichster Einfachheit und Klarheit im Zusammenhange hinzustellen, um die Schwierigkeiten, welche mathematische Studien bieten, so viel als möglich herabzumindern. Auf diesem Wege glaube ich das Buch **zur allgemeinen Anwendbarkeit für Studierende der Mathematik überhaupt brauchbar gemacht zu haben** und speciell meinen Schülern ein Lehrbuch bieten zu können, welches den Inhalt der Vorlesungen wiedergibt, und gleichzeitig solchen, welche mathematische Studien mit Vorliebe betreiben, die Erweiterung ihrer mathematischen Kenntnisse nach Thunlichkeit erleichtert.

Ich bitte demnach das Buch zu beurtheilen, als einen Versuch, die schönen Errungenschaften der bezeichneten mathematischen Forscher der neueren Zeit, in leicht fasslicher Form den Studierenden der Mathematik zugänglich zu machen.

Wien, den 30. October 1890.

Der Verfasser.

INHALT.

Erster Abschnitt.

Cap. I. **Einleitung.**

Cap. V. **Die homogenen Coordinaten.**

Zweiter Abschnitt.

Projectivische Geometrie.

Cap. VI. **Projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel I. Ordn.**
(Projectivische Grundgebilde I. Stufe.)

Cap. VII. **Involution.**

Cap. VIII. **Invarianten und Covarianten binärer Formen.**

Cap. IX. **Projectivische ebene Systeme.**
(Projectivische Grundgebilde II. Stufe.)

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über Kegelschnitte.

Cap. X. **Einleitung.**

Cap. XI. **Polarisation.**

Cap. XII. **Mittelpunkt, Asymptoten, Durchmesser.**

Cap. XIII. **Projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte.**

Erster Abschnitt.

Capitel I.

Einleitung.

§ 1. Parallel-Coordinaten eines Punktes.

Man denke sich in der Ebene einen festen Punkt O (Siehe Fig. 1) und durch diesen die beiden festen Geraden (x) und (y), welche die Ebene in vier Felder I, II, III, IV (Quadranten) theilen und bestimme auf einer jeden dieser zwei Geraden die eine Richtung als die positive und die entgegengesetzte als die negative. Hierbei sei gleichzeitig darauf aufmerksam gemacht, dass in der Figur die Richtungen von O nach (x), beziehungsweise von O nach (y), als die positiven gelten und daher für einen in der Geraden (x) liegenden

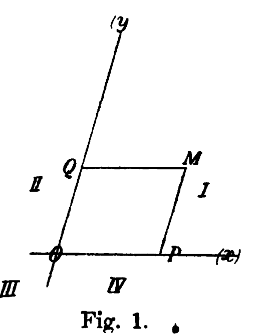


Fig. 1.

Punkt P die Strecke OP dann positiv ausfällt, wenn P rechts von O sich befindet, dagegen wird für einen in der Geraden (y) befindlichen Punkt Q die Strecke OQ positiv, sobald Q oberhalb O zu liegen kommt. Irgend ein Punkt M in der Ebene der Figur 1 ist nun eindeutig bestimmt, sobald man die zu den festen Geraden (x) und (y) parallelen Strecken $QM = OP$ und $PM = OQ$ kennt und dieselben sind nach dem eben Vorausgeschickten beide positiv, sobald M im ersten Quadranten liegt. Für einen dem zweiten Quadranten angehörigen Punkt M ist dagegen OP negativ und blos OQ positiv; liegt M im dritten Quadranten, so erscheinen OP und OQ gleichzeitig negativ; befindet sich endlich M im vierten Quadranten, so ist OP positiv und

OQ negativ. Nachdem nun $QM = OP$ und $PM = OQ$ den Punkt M eindeutig bestimmen, sind sie Coordinaten von M, u. zw. führen dieselben noch speciell den Namen der Parallelcoordinaten, weil die diese Coordinaten ausmachenden Strecken QM und PM, die künftighin mit x und y bezeichnet werden mögen, zu den beiden festen Geraden (x) und (y) parallel gerichtet sind. Man nennt noch insbesondere die Strecke $QM = OP$ die Abscisse und jene $PM = OQ$ die Ordinate des Punktes M und in analoger Weise die feste Gerade (x) die Abscissenachse und die andere (y) die Ordinatenachse, beide zusammen aber die Coordinatenachsen des Systems. Der feste Punkt O heißt der Ursprung, Anfangspunkt oder Nullpunkt und der Winkel (x, y) der beiden festen Geraden (x) und (y) der Coordinatenwinkel. Je nachdem letzterer ein rechter Winkel ist oder nicht, sind die Parallelcoordinaten rechtwinkelige (orthogonale) oder schiefwinkelige. In der Folge werden wir immer orthogonale Parallelcoordinaten voraussetzen, wenn nicht die Natur der Aufgabe schiefwinkelige Coordinaten bedingt.

Das hier angegebene Coordinatensystem rührt von Cartesius her und nennt man demnach auch die besprochenen Coordinaten eines Punktes die Cartesischen Coordinaten***) des letzteren.

Es ist somit klar, dass ein Punkt M in der Ebene eindeutig bestimmt erscheint durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad x = a, \qquad y = b,$$

in welchen a und b die Coordinaten von M darstellen, welche im allgemeinen positiv, negativ oder gleich null sein können. Gehört M der Abscissenachse an, so wird $b = o$; liegt er in der Ordinatenachse, so wird dagegen $a = o$; fällt endlich M mit dem Ursprunge O zusammen, so sind a und b gleichzeitig gleich null.

§ 2. **Normalprojectionen von Strecken.**

Sind P_1 und P_2 (Siehe Fig. 2) die Normalprojectionen der Punkte M_1 und M_2, welche die in der Geraden (L) liegende Strecke (Chorde) $M_1 M_2$ begrenzen, auf die Gerade (x), d. h. also die Fußpunkte der aus M_1 und M_2 auf

***) Auch Cartesianische oder gemeine Coordinaten.

(x) gefällten Senkrechten, so ist offenbar nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie, die orthogonale Projection dieser Strecke auf die Gerade (x), d. i. die Strecke

(2) . . . $P_1 P_2 = M_1 M_2 \,.\, \cos(x, L)$

oder auch

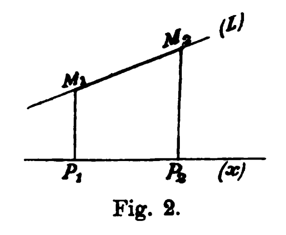


Fig. 2.

$$P_1 P_2 = K \,.\, M_1 M_2,$$

sobald man noch der Einfachheit wegen, $\cos(x, L) = K$ setzt. Der in obiger Gleichung vorkommende Coefficient K wird auch der Projectionsfactor genannt, während die Gerade (x) die Projectionsachse heißt. Es ist klar, dass unter (x, L) derjenige Winkel zu verstehen ist, welchen die positive Richtung der Projectionsachse mit der positiven Richtung der Geraden (L) — Richtung von M_1 nach M_2 — bildet. Man findet somit die orthogonale Projection einer Strecke auf eine Gerade, wenn man diese Strecke multipliciert mit dem cosinus desjenigen Winkels, den die Projectionsachse mit derjenigen Geraden bildet, der die zu projicierende Strecke angehört.

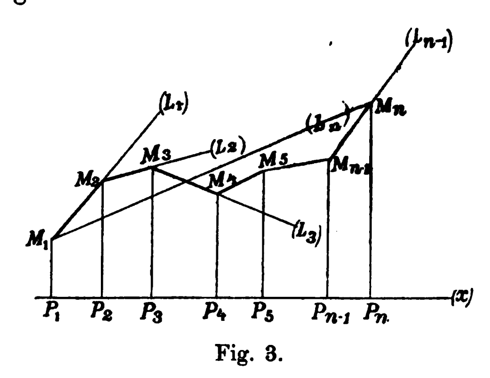


Fig. 3.

Überträgt man nun diesen Satz auf das in Fig. 3 angegebene ebene Vielstreck $M_1 M_2 M_3 \;.\;.\;.\; M_{n-1} M_n$ und nennt auch hier wieder P_i die orthogonale Projection des Punktes M_i auf die Projectionsachse (x), endlich $(L_1), (L_2) .\;.\;. (L_{n-1})$ die Strahlen, auf welchen die Strecken $M_1 M_2$, $M_2 M_3$ . . $M_{n-1} M_n$ liegen, so ist zunächst, wie ein Blick auf Fig. 3 sofort erkennen lässt:

$$P_1 P_2 + P_2 P_3 + \ldots + P_{n-1} P_n = P_1 P_n$$

und daher nach Gl. (2)

$$M_1 M_2 \,.\, \cos(x, L_1) + M_2 M_3 \cos(x, L_2) + \ldots \ldots \\ + M_{n-1} M_n \,.\, \cos(x, L_{n-1}) = M_1 M_n \,.\, \cos(x, L_n),$$

wenn noch die Gerade, in welcher die durch die beiden Punkte M_1 und M_n bestimmte Strecke zu liegen kommt, mit (L_n) bezeichnet wird. Die Strecke $M_1 M_n$, welche durch den Anfangs- und Endpunkt des Vielstrecks bestimmt erscheint, heißt die geometrische Summe oder Resultante der Strecken $M_1 M_2$, $M_2 M_3 \ldots M_{n-1} M_n$ und daher führen diese Gleichungen zu dem wichtigen Satze:

Die Summe der Projectionen der aufeinander folgenden Strecken eines Vielstrecks auf irgend eine Gerade als Projectionsachse ist gleich der Projection ihrer geometrischen Summe auf dieselbe Projectionsachse.

In dem besonderen Fall, wo das Vielstreck $M_1 M_2 \ldots M_n$ geschlossen ist, fällt M_n mit M_1 zusammen und wird folglich $M_1 M_n = o$, mithin zufolge der letzten zwei Gleichungen:

$$P_1 P_2 + P_2 P_3 + \ldots\ldots P_{n-1} P_1 = o$$

oder

$$M_1 M_2 \,.\, \cos(x, L_1) + M_2 M_3 \,.\, \cos(x, L_2) + \ldots\ldots \\ + M_{n-1} M_1 \cos(x, L_{n-1}) = o$$

und hieraus fließt der ebenfalls sehr wichtige Satz:

Die Summe der Projectionen der aufeinander folgenden Strecken eines geschlossenen Vielstrecks auf irgend eine Projectionsachse ist gleich null.

Von selbst erkennt man nun, dass bei zwei geschlossenen Vielstrecken, welche eine Strecke mit einander gemein haben, die Summe der Projectionen der übrigen Strecken auf eine und dieselbe Projectionsachse bei beiden gleich groß sein muss.

§ 3. Entfernung zweier Punkte.

Die beiden Punkte M_1 und M_2 (Fig. 4), deren Entfernung $M_2 M_1 = \delta$ zu bestimmen ist, sind gegeben durch ihre orthogonalen Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2. Wie die Figur zeigt, erscheint $M_2 M_1$ als die Hypotenuse eines recht winkeligen Dreiecks von den beiden Katheten $M_2 R =$

$P_2P_1 = x_1 - x_2$ und $RM_1 = Q_2Q_1 = y_1 - y_2$ und besteht somit nach dem Pythagoräischen Lehrsatze die Gleichung:

(3) . . . $\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$,

welche in dem speciellen Fall, wo M_2 mit O zusammenfällt, übergeht in

(4) . . . $\delta^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2$.

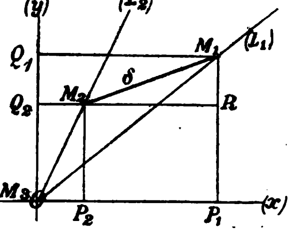


Fig. 4.

Gleichzeitig sei noch bemerkt, dass die beiden Strecken $P_2P_1 = x_1 - x_2$ und $Q_2Q_1 = y_1 - y_2$, welche die Strecke M_2M_1 eindeutig bestimmen, die Coordinaten dieser Strecke genannt werden.

§ 4. Winkel zweier Geraden.

Wir machen die Annahme, dass eine jede der beiden Geraden (L_1) und (L_2), deren Winkel $(L_1, L_2) = \varepsilon$ zu bestimmen wäre, durch den Ursprung O des Coordinatensystems (Siehe Fig. 4) hindurchgeht und nennen die Winkel, welche die beiden Coordinatenachsen (x) und (y) mit dem Strahl (L_i) einschließen, α_i und β_i. Die beiden letzten Symbole sind daher definiert durch die Rel.: $\alpha_i = (x, L_i)$ und $\beta_i = (y, L_i)$ und wird noch darauf hingewiesen, dass $\alpha_i + \beta_i = \frac{\pi}{2}$ sein muss, indem ja ein rechtwinkeliges Coordinatensystem unserer Betrachtung zu Grunde liegt. Daher ist auch $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$, $\sin\beta_i = \cos\alpha_i$ und $\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i = \sin^2\alpha_i + \sin^2\beta_i = 1$. Auf den Strahlen (L_1) und (L_2) wähle man nun die Punkte M_1 und M_2 und hat jetzt nach dem Satze über die Projection eines Vielstrecks (§ 3) die Gleichung

$OM_1 \,.\, \cos(L_2 L_1) = OP_1 \cos(L_2, x) + P_1M_1 \,.\, \cos(L_2, y)$

und aus dieser folgt, wenn man noch bedenkt, dass $OP_1 = OM_1 \,.\, \cos(x, L_1)$, $P_1M_1 = OM_1 \cos(y, L_1)$ und

$\cos(L_i, x) = \cos(x, L_i)$ ist,

$\cos(L_1 L_2) = \cos(x, L_1) \,.\, \cos(x, L_2) + \cos(y, L_1) \,.\, \cos(y, L_2)$

oder nach der oben gewählten Bezeichnung

(5) . . . . $\cos\varepsilon = \cos\alpha_1 \,.\, \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \,.\, \cos\beta_2$.

Jetzt kann man aber auch $\sin\varepsilon$ berechnen, denn es ist ja bekanntlich

$$\sin^2\varepsilon = 1 - \cos^2\varepsilon = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2) - (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2)^2 = (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1)^2,$$

folglich

$$6). \quad \sin\varepsilon = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_1, & \cos\beta_2 \end{vmatrix} = \cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1.$$

Nachdem übrigens $\varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1$ ist, führen die beiden vorhergehenden Gleichungen (5) und (6) zu den bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2,$$
$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1.$$

Da jedoch die Richtung einer Geraden in der Ebene bereits durch einen Winkel bestimmt erscheint, entfällt in Hinkunft der Winkel β_i und wird also in den beiden Gleichungen (5) und (6), unter Annahme eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, $\cos\beta_i$ einfach durch $\sin\alpha_i$ und $\sin\beta_i$ durch $\cos\alpha_i$ ersetzt.

§ 5. Product zweier Strecken.

Die den Geraden (L_1) und (L_2) angehörenden Strecken $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ erscheinen bestimmt (Fig. 5) durch die Coordinaten x_i, y_i ihrer Begrenzungspunkte M_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ und sind also wieder $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ und $(x_4 - x_3)$, $(y_4 - y_3)$ die Coordinaten der Strecken $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$. Nach dem in § 2 gegebenen Satze über die Projection einer Strecke auf eine Gerade ist nun, sobald α_i den Winkel bedeutet, welchen die Achse der x mit der Geraden (L_i) — $i = 1,2$ — bildet:

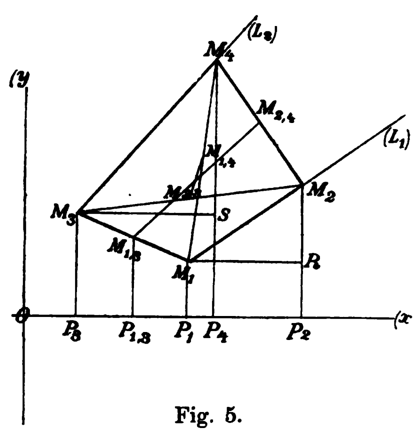


Fig. 5.

$M_1 M_2 \cos\alpha_1 = P_1 P_2 = x_2 - x_1$, $M_1 M_2 \sin\alpha_1 = R M_2 = y_2 - y_1$,
$M_3 M_4 \cos\alpha_2 = P_3 P_4 = x_4 - x_3$, $M_3 M_4 \sin\alpha_2 = S M_4 = y_4 - y_3$,
und hieraus findet man, weil $(L_1 L_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ ist

$$(7) \quad \ldots M_1 M_2 \,.\, M_3 M_4 \,.\, \cos(L_1, L_2) = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3),\ M_1 M_2 \,.\, M_3 M_4 \sin(L_1, L_2)$$
$$= (x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1) \ldots\ldots \quad (8)$$

Dividiert man jetzt die zweite dieser beiden Gleichungen durch die erste, so folgt

$$(9) \ldots \operatorname{tg}(L_1, L_2) = \frac{(x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3)}$$

und hieraus kann man aus den Coordinaten der beiden Strecken $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ ihren Neigungswinkel berechnen.

Der rechts vom Gleichheitszeichen in (7) vorkommende Ausdruck kann aber noch auf eine andere Form gebracht werden. Denn zunächst ist ja

$$2\,(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 - (x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2,$$
$$2\,(y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = (y_1 - y_4)^2 + (y_2 - y_3)^2 - (y_1 - y_3)^2 - (y_2 - y_4)^2$$

und daher wird, nachdem $M_i M_k^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$ ist, zufolge der früheren Gleichung (7):

$$(10) \quad \ldots 2\, M_1 M_2 \,.\, M_3 M_4 \,.\, \cos(L_1 L_2) = M_1 M_4^2 + M_2 M_3^2 - M_1 M_3^2 - M_2 M_4^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & M_1 M_3^2 & M_1 M_4^2 \\ 1 & M_2 M_3^2 & M_2 M_4^2 \end{vmatrix}$$

und damit ist eine zweite Form für diesen Ausdruck gefunden. Aber auch eine andere von Carnot herrührende Form kann noch leicht ausfindig gemacht werden. Es ist nämlich das in (7) vorkommende Product

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) = \left(\frac{x_1 + x_3}{2} - \frac{x_2 + x_4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_4}{2} - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2$$

und hieraus folgt, weil die Coordinaten $x_{i,k}$ und $y_{i,k}$ des Mittelpunktes $M_{i,k}$ der Strecke $M_i M_k$ aus leicht begreiflichen Gründen sich ergeben aus $x_{i,k} = \frac{1}{2}(x_i + x_k)$ und $y_{i,k} = \frac{1}{2}(y_i + y_k)$, dass

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) = (x_{1,3} - x_{2,4})^2 - (x_{1,4} - x_{2,3})^2$$

ist. In derselben Weise findet man aber auch

$$(y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = (y_{1,3} - y_{2,4})^2 - (y_{1,4} - y_{2,3})^2$$

und schließlich durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = (x_{1,3} - x_{2,4})^2$$
$$+ (y_{1,3} - y_{2,4})^2 - (x_{1,4} - x_{2,3})^2 - (y_{1,4} - y_{2,3})^2;$$

es ist demnach das Product

$$11) \quad . \; M_1 M_2 \; . \; M_3 M_4 \; . \; \cos(L_1, L_2) = \overline{M_{1,3} M_{2,4}}^2 - \overline{M_{1,4} M_{2,3}}^2$$

§ 6. Flächeninhalt eines Dreiecks und eines n-Ecks.

In der Folge erscheint die Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus den Coordinaten seiner Ecken von besonderer Wichtigkeit und daher mag in diesem Capitel auch diese Aufgabe in Betracht gezogen werden. Dabei wird aber vorerst die Annahme gemacht, dass die Ecke M_3 des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ (Fig. 4), dessen Flächeninhalt zu bestimmen ist, mit dem Ursprunge O des Coordinatensystems zusammenfalle. Alsdann ist, wie ein Blick auf die Figur sofort zeigt

$$2 . \triangle M_1 M_2 O = x_2 y_2 + (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) - x_1 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

oder auch

$$(12) \quad . \; . \; . \; 2 . \triangle M_1 M_2 O = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Auch wenn M_3 nicht mit O zusammenfällt, lässt sich der Flächeninhalt des Dreiecks in Determinantenform geben. Man hat nämlich dann, in (12) einfach blos x_1 und x_2 durch $(x_1 - x_3)$ und $(x_2 - x_3)$; y_1 und y_2 durch $(y_1 - y_3)$ und $(y_2 - y_3)$ zu ersetzen, wodurch man erhält

$$(13) \quad . \; . \; . \; 2 . \triangle M_1 M_2 M_3 = \begin{vmatrix} (x_1 - x_3), & (x_2 - x_3) \\ (y_1 - y_3), & (y_2 - y_3) \end{vmatrix}$$

Die hier erscheinende Determinante kann nun durch eine 3^2 elementige Determinante ersetzt werden, indem ja nach der Lehre von den Determinanten die Gleichheit besteht

$$\begin{vmatrix} (x_1 - x_3) & (x_2 - x_3) \\ (y_1 - y_3) & (y_2 - y_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

und ist daher schließlich der doppelte Flächeninhalt

$$(14) \ldots 2 \,.\, \triangle M_1 M_2 M_3 = y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1) = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Die in Gl. (14) vorkommende 3^2 elementige Determinante, welche den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt, heißt die Dreieckdeterminante und sie fällt bei der in der Figur angenommenen Aufeinanderfolge der drei Ecken des Dreiecks positiv aus. Müsste man aber, um von M_1 über M_2 nach M_3 zu gelangen, die entgegengesetzte Richtung einschlagen, so würde selbstverständlich die Determinante in (14) negativ werden, wie es auch sein muss. In dem besonderen Fall, wo alle drei Punkte M_1, M_2 und M_3 einer und derselben Geraden angehören, ist $\triangle M_1 M_2 M_3 = O$ und daher die Determinante in (14) $= 0$.

Mit Zuhilfenahme der in (14) gegebenen Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ aus den Coordinaten seiner Ecken kann man auch den Flächeninhalt eines n-Ecks $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$ berechnen, sobald die Coordinaten x_i, y_i der Ecken M_i dieser Figur gegeben sind. Darnach ist nämlich

$$2\, M_1 M_2 M_3 = y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1),$$
$$2\, M_1 M_3 M_4 = y_1 (x_4 - x_3) + y_3 (x_1 - x_4) + y_4 (x_3 - x_1)$$

und hieraus folgt durch Addition

$$2\, M_1 M_2 M_3 M_4 = y_1 (x_4 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_4) + y_4 (x_3 - x_1);$$

ferner ist

$$2\, M_1 M_4 M_5 = y_1 (x_5 - x_4) + y_4 (x_1 - x_5) + y_5 (x_4 - x_1)$$

und die beiden letzten Gleichungen liefern durch Addition

$$(15) \ldots 2\, M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 = y_1 (x_5 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_4) + y_4 (x_3 - x_5) + y_5 (x_4 - x_1),$$

welche Gleichung den von Gauss gefundenen Satz zur Berechnung des Flächeninhalts eines n-Ecks aus den Coordinaten seiner Ecken ausspricht. Darnach findet man nämlich den doppelten Flächeninhalt eines n-Ecks, wenn man die Ordinate einer jeden Ecke dieser Figur multipliciert mit der Differenz der Abscissen der vorangehenden und der nachfolgenden Ecke und diese Producte addiert.

§ 7. **Polar-Coordinaten eines Punktes.**

Ein Punkt M (Fig. 6) wird in Bezug auf die feste Gerade (x) und den in ihr liegenden Punkt O durch den Winkel $(x, r) = \varphi$ und die auf der Geraden (r) liegende Strecke $OM = r$ eindeutig bestimmt. Der Winkel φ heißt die Anomalie und die Strecke $OM = r$ der Radius-Vector des Punktes M, während r und φ zusammen die Polar-Coordinaten von M genannt werden. Es bedarf wohl keines Beweises, dass die Polar-Coordinaten r, φ und jene $-r$, $\pi + \varphi$ einen und denselben Punkt bestimmen.

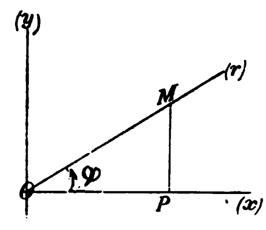


Fig. 6.

Zwischen den Polar-Coordinaten r, φ des Punktes M und seinen orthogonen Coordinaten $x = OP$ und $y = PM$ besteht ein einfacher Zusammenhang, denn aus Fig. 6 ergibt sich sofort

$$OP = OM . \cos(x, r) \qquad PM = OM . \sin(x, r)$$

oder

$$(16) \quad \ldots \quad x = r \cos\varphi \qquad y = r . \sin\varphi$$

und hieraus

$$(17) \quad \ldots \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

§ 8. **Die Coordinaten einer Geraden.**

Nach dem berühmten Geometer Plücker versteht man unter den Coordinaten einer Geraden die negativen reciproken Werte ihrer Abschnitte auf den Coordinatenachsen (x) und (y). Bezeichnet man sonach diese Abschnitte der Geraden mit a und b, setzt also (Fig. 7) die Strecken $OA = a$ und $OB = b$ — wenn A und

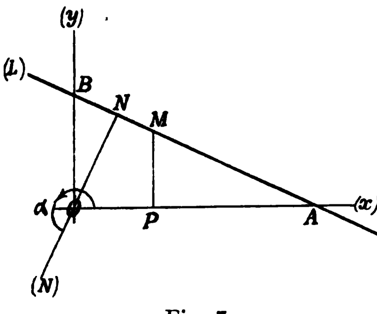


Fig. 7.

B die Schnittpunkte der Geraden mit den Coordinatenachsen (x) und (y) repräsentieren — und nennt die Coordinaten der Geraden u und v, so erscheinen die letzteren definiert durch

$$(18) \quad . \quad . \quad u = -\frac{1}{a}, \qquad v = -\frac{1}{b},$$

woraus sich ohneweiters ergibt

$$(19) \quad . \quad . \quad a = -\frac{1}{u} \qquad b = -\frac{1}{v}$$

Die Wahl dieser Bestimmungsstücke für die Coordinaten einer Geraden hängt mit dem in der neueren Geometrie so wichtigen Principe der Dualität oder Reciprocität innig zusammen, nach welchem nämlich in den meisten Fällen zu jedem Satze ein reciproker Satz gefunden werden kann. Es erscheint jedoch nicht zweckdienlich, jetzt schon in dieses Princip näher einzugehen und werden wir ohnedies in der Folge reichlich Gelegenheit finden, darüber zu sprechen; gehört doch dieses Princip zu den schönsten und fruchtbarsten Errungenschaften der mathematischen Wissenschaften. Nicht unerwähnt mögen jedoch hier noch einige specielle Fälle bleiben. Ist nämlich die Gerade parallel zur Achse der x gerichtet, so wird $a = \infty$ und demnach $u = o$; es bestimmen sonach die Coordinaten $u = o$ und $v = n$ eine Gerade, welche im Abstande $OB = -\frac{1}{n}$ vom Ursprunge zur Achse der x parallel erscheint; ebenso sind $u = m$ und $v = o$ die Coordinaten einer zur Achse der y parallelen Geraden und ist deren Abstand vom Ursprunge $OA = -\frac{1}{m}$. Für die Achse der x kann $OA = \infty$ und $OB = o$ gesetzt werden und deshalb auch $u = o$ und $v = \infty$, für die Achse der y aber umgekehrt $u = \infty$ und $v = o$.

Wir werden später sehen, dass der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte einer Ebene eine Gerade ist, genannt die unendlich ferne Gerade dieser Ebene. Für dieselbe ist $a = b = \infty$, mithin $u = v = o$.

Schließlich sei hier noch erwähnt, dass die beiden Gleichungen

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = m, \qquad v = n$$

eine Gerade eindeutig bestimmen. Die Achsenabschnitte derselben sind natürlich $OA = -\frac{1}{m}$ und $OB = -\frac{1}{n}$. Stellt man jetzt die Gleichungen (1) und (20) zusammen, wodurch man die beiden Gruppen von Gleichungen erhält

$$\begin{aligned} x &= a & \qquad u &= m \\ y &= b & \qquad v &= n, \end{aligned}$$

so bestimmen die ersteren einen Punkt von der Abscisse a und Ordinate b, die letzteren aber eine Gerade von den Achsenabschnitten $-\frac{1}{m}$ und $-\frac{1}{n}$.

Capitel II.

Die Gerade und der Punkt.

§ 9. Gleichung der Geraden.

Die Coordinaten irgend eines Punktes M einer Geraden (L) sind offenbar nicht unabhängig von einander, denn wählt man die Abscisse x eines solchen Punktes, so erscheint dessen Ordinate y eindeutig bestimmt, wie Fig. 7 auch zeigt. Es muss daher zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte einer Geraden eine Gleichung bestehen, welche nach der eindeutigen Bestimmung von y aus x — oder umgekehrt — vom ersten Grade sein wird und gleichzeitig die Gleichung der Geraden selbst repräsentiert. Behufs Auffindung dieser Gleichung verweise ich auf Fig. 7, aus welcher man die Proportion abliest

$$(a) \quad . \; . \; . \quad PA : PM = OA : OB.$$

Nun ist aber $OA = a = -\frac{1}{u}$, $OB = b = -\frac{1}{v}$, $PA = -\frac{1}{u} - x$ und $PM = y$, weshalb aus (a) folgt

$$-\left(\frac{1}{u} + x\right) : y = -\frac{1}{u} : -\frac{1}{v}$$

oder

$$(21) \quad . \; . \; . \quad ux + vy + 1 = o.$$

Die Coordinaten x, y aller Punkte einer Geraden (L), welche die Coordinaten u, v besitzt, haben somit der Gleichung (21) zu genügen und demnach ist dies die Gleichung einer Geraden von den Coordinaten u, v. Wir werden gleichzeitig diese Form der Gleichung der Geraden die „Normalform“ nennen und es muss hier noch ausdrücklich bemerkt werden, dass in (21) u und v constante Größen

sind, während x und y veränderlich erscheinen. Nachdem nun $u = -\frac{1}{a}$ und $v = -\frac{1}{b}$ ist, resultiert aus (21) die Gleichung der Geraden aus den Achsenabschnitten

$$(22) \quad . \; . \; . \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = o.$$

Es ist klar, dass die lineare Gleichung $Ax + By + C = o$ stets auf die Form (21) gebracht werden kann; man braucht sie zu diesem Zwecke blos mit dem Factor $\varrho = \frac{1}{C}$ zu multiplicieren und deshalb ist auch das geometrische Aquivalent der Gleichung

$$(23) \quad . \; . \; . \quad L \equiv Ax + By + C = o$$

eine Gerade, u. zw., wie ein Blick auf (21) und (22) zeigt, von den Coordinaten $u = \frac{A}{C}$, $v = \frac{B}{C}$ und den Achsenabschnitten $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Diese Form der Gleichung einer Geraden ist zugleich eine allgemeinere und wir werden sie kurz mit $L = o$ bezeichnen, wobei wir unter das Symbol L das Trinom $Ax + By + C$ verstehen.

Man kann jedoch die Gleichung einer Geraden auch aus ihrer Normaldistanz $d = NO$ vom Ursprunge und dem Winkel α bestimmen, welchen die Abscissenachse mit der Normalen NO oder (N) dieser Geraden bildet, indem diese beiden Größen die Gerade ebenfalls eindeutig bestimmen und daher nebenbei bemerkt als Coordinaten der Geraden angesehen werden könnten. Hierbei wird der Winkel α von der rechten Hälfte der Abscissenachse von 0^0 bis 360^0 herum, u. zw. von rechts nach links gezählt. Zufolge des früher gegebenen Satzes über die Projection eines geschlossenen Vielstrecks wird für das in Fig. 7 erscheinende Vielstreck $OPMNO$, wenn man die Normale (N) als Projectionsachse annimmt:

$$OP \cos(N,x) + PM \cos(N,y) + MN \cos(N,L) \\ + NO \cos(N,N) = o$$

und, weil $OP = x$, $PM = y$, $NO = d$, $(x,N) = \alpha$,

$(y, N) = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ und $(N, L) = \frac{\pi}{2}$ ist, so führt obige Ret. zur Gleichung

$$(24) \quad . \; . \; . \; l \equiv x.\cos\alpha + y\sin\alpha + d = o$$

und dies ist die Gleichung der durch die Parameter α und d bestimmten Geraden (L). Die Gleichung der Geraden in dieser Form wurde zuerst von dem berühmten Mathematiker Otto Hesse gegeben und heißt deshalb die Gleichung der Geraden in der Hesse'schen Normalform. Wir werden diese Gleichung kurz mit $l = o$ bezeichnen und das hier vorkommende Symbol vertritt wieder die Stelle des Trinoms $x \cos\alpha + y \sin\alpha + d$. Selbstverständlich kann nun die Gleichung (23) immer auf die Form (24) zurückgeführt werden. Denn, nachdem beide Gleichungen ein und dasselbe geometrische Äquivalent besitzen, können deren Gleichungspolynome nur durch einen von x und y unabhängigen Factor ϱ von einander sich unterscheiden, d. h. es muss stets ein Factor ϱ sich finden lassen, für welchen die Identität besteht

$$(b) \quad . \; . \; . \; \varrho\,(Ax + By + C) = x\cos\alpha + y\sin\alpha + d$$

und hieraus folgt

$$(c) \quad . \; . \; . \; \varrho A = \cos\alpha, \quad \varrho B = \sin\alpha, \quad \varrho C = d.$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen erhält man aber, wenn man sie vorerst quadriert und alsdann addiert, $\varrho^2(A^2 + B^2) = 1$ und hieraus

$$(25) \quad . \; . \; . \; \varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}};$$

es ist sonach

$$(26) \quad . \; . \; . \; \cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Hierbei hat man in den Formeln (26) das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die Größe C positiv oder negativ ist, indem d stets positiv und daher dann nach der dritten der Gleichungen (c) auch das Product $\varrho . C$ positiv erscheint.

Nach Gleichung (b) besteht somit zwischen den beiden Trinomen $L = Ax + By + C$ und $l = x \cos\alpha + y \sin\alpha + d$ die Beziehung

$$(27) \quad . \; . \; . \; l = \varrho L$$

und ist, wenn $L = o$ die Gleichung einer Geraden in der allgemeineren Form darstellt,

$$(28) \quad . \; . \; . \; \varrho L = o$$

die Gleichung derselben Geraden in der Hesse'schen Normalform. Der Factor ϱ erscheint bestimmt durch die Gl. (25). Für die Gleichung der Geraden in der durch (21) gegebenen Form ist $A = u$, $B = v$, mithin $\varrho = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = d$.

Nachdem nun eine Gerade auch eindeutig bestimmt ist durch die Angabe zweier ihrer Punkte oder durch die Angabe eines derselben und des Winkels $\tau = (x, L)$, unter welchem selbe gegen die Abscissenachse geneigt ist, drängt sich von selbst die Frage heran: wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte M_1 und M_2 von den Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 hindurchgeht, sowie die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt M_1 hindurchgeht und mit der Achse der x den Winkel τ einschließt. Hier ist wieder der Winkel τ von der rechten Hälfte der Abscissenachse von 0 bis 180° herum, u. zwar von rechts nach links zu zählen, wenn, wie in Fig. 7 angenommen wird, $O(x)$ rechts von (y) liegt. Auf die Beantwortung der ersten Frage übergehend, bemerke ich, dass, wenn u und v die Coordinaten der durch die beiden Punkte M_1 und M_2 bestimmten Geraden darstellen, die drei Gleichungen gleichzeitig bestehen müssen

$$(d) \quad . \; . \; . \quad \begin{aligned} ux + vy + 1 &= o \\ ux_1 + vy_1 + 1 &= o \\ ux_2 + vy_2 + 1 &= o, \end{aligned}$$

aus denen nach der Lehre von den Determinanten durch die Elimination von u und v sich ergibt

$$(29) \quad . \; . \; . \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = o.$$

Diese Beziehung stellt aber den Zusammenhang dar zwischen den Coordinaten x, y irgend eines Punktes der durch die Punkte M_1 und M_2 bestimmten Geraden und ist demnach die Gleichung der letzteren. Durch Berechnung obiger Determinante erhält man

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = o$$

und hieraus leicht

$$(30) \quad . \; . \; . \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

als Gleichung der Geraden $M_1 M_2$ in einer zweiten Form. Fiele der Punkt M_2 mit dem Nullpunkte O des Coordinatensystems zusammen, so würde $x_2 = y_2 = o$ und ist demnach

$$(31) \quad . \; . \; . \quad y = \frac{y_1}{x_1} . x$$

die Gleichung einer durch den Ursprung O und den Punkt M_1 gehenden Geraden.

In dem zweiten Fall, wo die Gerade durch Punkt und Richtung gegeben ist, hat man, sobald die Strecke $M_1 M$ mit R bezeichnet wird, nach dem Satze über die Projection einer Strecke (§ 2)

$$x - x_1 = R \cos \tau, \qquad y - y_1 = R \sin \tau$$

und dem zufolge

$$(32) \quad . \; . \; . \quad \frac{x - x_1}{\cos \tau} = \frac{y - y_1}{\sin \tau}$$

als Gleichung der Geraden, welche übrigens auch ersetzt werden kann durch die folgende

$$(33) \quad . \; . \; . \quad y - y_1 = \operatorname{tg} \tau . (x - x_1).$$

Liegt nun M_1 in der Ordinatenachse, so wird nach der in § 8 gewählten Bezeichnung, $x_1 = o$ und $y_1 = b$ und nimmt dann Gl. (33) die einfache Form an

$$(34) \quad . \; . \; . \quad y = x . \operatorname{tg} \tau + b$$

oder, sobald man $\operatorname{tg} \tau = m$ setzt,

$$(35) \quad . \; . \; . \quad y = m . x + b$$

und es bedeutet somit in der letzten Gleichung, der Coefficient m von x die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, welchen die Abscissenachse mit der Geraden bildet und b den Achsenabschnitt der letzteren auf der Ordinatenachse.

Der Coefficient m heißt deshalb auch der Richtungscoefficient. Liegt endlich M_1 im Ursprunge, dann ist $x_1 = y_1 = o$ und also

(36) . . . $y = x . \operatorname{tg} \tau$

die Gleichung der Geraden.

Discussion der Gleichung: $Ax + By + C = o$. Wir haben in dem Vorhergehenden gesehen, dass dies die Gleichung einer Geraden ist von den Achsenabschnitten $a = -\frac{C}{A}$ und $b = -\frac{C}{B}$. Ist somit $C = o$, so verschwinden diese Achsenabschnitte gleichzeitig und geht die Gerade durch den Ursprung, weshalb

(37) . . . $Ax + By = o$

die Gleichung einer durch den Ursprung hindurchgehenden Geraden darstellt, welche gegen die Achse der x unter dem Winkel τ geneigt ist, resultierend aus der Gleichung $\operatorname{tg} \tau = -\frac{A}{B}$, wie ein Blick auf Gl. (36) sofort erkennen lässt. Würde dagegen $A = o$, so erhielte man $\frac{1}{a} = o$ oder $a = \infty$, d. h. die durch die Gleichung $By + C = o$ gegebene Gerade durchschneidet die Achse der x gar nicht oder ist zu der letzteren parallel gerichtet; es ist daher

(38) . . . $By + C = o$

die Gleichung einer zur Achse der x parallelen Geraden im Abstande $-\frac{C}{B}$ vom Ursprunge und ebenso

(39) . . . $Ax + C = o$

die Gleichung einer zur Achse der y parallelen Geraden im Abstande $-\frac{C}{A}$ vom Ursprunge. Die durch die beiden letzten Gleichungen dargestellten Geraden fallen übrigens mit den Coordinatenachsen zusammen, sobald auch C verschwindet. Die Gleichung der Abscissenachse lautet deshalb $y = o$, jene der Ordinatenachse aber $x = o$. Schließlich mag noch derjenige Fall erörtert werden, wo A und B gleichzeitig verschwinden. Hier ist nun $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = o$ oder

$a = b = \infty$, d. h. die Gerade durchschneidet die beiden Coordinatenachsen gar nicht oder sie liegt unendlich ferne und man erkennt sonach, dass bei der unendlich fernen Geraden die Coefficienten A und B gleichzeitig gleich null werden, dagegen der dritte Coefficient von 0 verschieden sein muss. Auf den letzten Fall, der an diesem Orte nicht weiter untersucht werden mag, werden wir später bei den homogenen Coordinaten noch einmal zu sprechen kommen und dort gleichzeitig die Gleichung der unendlich fernen Geraden aufstellen.

§ 10. Gleichung des Punktes.

Zwischen den Coordinaten x, y eines Punktes M und denjenigen u, v einer durch letzteren gelegten Geraden (L) besteht, wie in § 9 gezeigt wurde, die lineare Gleichung

$$ux + vy + 1 = o.$$

Erscheint nun u und v constant, so drückt dieselbe die Beziehung aus zwischen den Coordinaten x, y aller in der Geraden (L) liegenden Punkte, d. h. die Coordinaten x, y derjenigen Punkte, welche in der Geraden liegen, deren Coordinaten u, v sind, müssen obiger Gleichung genügen. Nun liegt es aber auch nahe, die Annahme zu machen, dass nicht u und v, sondern umgekehrt x und y constant erscheinen, in welchem Falle die Gleichung

$$(40) \quad . \; . \; . \quad m = xu + yv + 1 = o$$

eine Beziehung darstellt, welcher die Coordinaten u, v aller derjenigen Geraden unterworfen erscheinen, welche durch einen Punkt hindurchgehen, der durch die Coordinaten x, y gegeben erscheint, d. h. (40) ist die Gleichung des Punktes M von den Coordinaten x, y. Mann nennt nun diese Form der Gleichung eines Punktes die „Normalform“ und wir werden sie in der Folge wieder kurz mit $m = o$ bezeichnen, wobei das Symbol m das in Gleichung (40) vorkommende Trinom $xu + yv + 1$ darstellt. Es sind also in Gleichung (40) x und y constant, dagegen u und v veränderlich. Aber auch die lineare Gleichung $Au + Bv + C = o$ kann durch Multiplication mit dem Factor $\varrho = \dfrac{1}{C}$ auf die Form (40)

gebracht werden und aus diesem Grunde ist daher das geometrische Äquivalent von

$$(41) \quad . \; . \; . \quad M = Au + Bv + C = o$$

ebenfalls ein Punkt, welcher nach (40) die Coordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$ besitzt. Diese Form der Gleichung eines Punktes ist zugleich eine allgemeinere und mag in Hinkunft kurz mit $M = o$ bezeichnet werden, wobei wieder M die Stelle des Trinoms $Au + Bv + C$ vertritt. Zwischen den beiden Trinomen M und m besteht die einfache Beziehung

$$(42) \quad . \; . \; . \quad m = \varrho M,$$

wenn $\varrho = \frac{1}{C}$ ist; man kann daher sagen: ist $M = o$ die Gleichung eines Punktes in der allgemeinen Form, so ist

$$(43) \quad . \; . \; . \quad \varrho M = o$$

die Gleichung desselben Punktes in der Normalform.

In § 9 haben wir die Gleichung einer Geraden bestimmt, welche durch zwei Punkte M_1 (x_1, y_1) und M_2 (x_2, y_2) gegeben erscheint; es liegt somit nahe, die Gleichung desjenigen Punktes aufzusuchen, der gegeben ist durch die Coordination u_1, v_1 und u_2, v_2 zweier durch ihn gehenden Geraden (L_1) und (L_2). Nennt man wieder x, y die Coordinaten dieses Punktes, so gelangt man, zufolge der Gleichung (40) zu den drei gleichzeitig in Kraft tretenden Gleichungen

$$\begin{aligned} xu + yv + 1 &= o \\ xu_1 + yv_1 + 1 &= o \\ xu_2 + yv_2 + 1 &= o, \end{aligned}$$

aus welchen durch die Elimination von x und y folgt

$$(44) \quad . \; . \; . \quad \begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} = o$$

und diese Beziehung stellt den Zusammenhang dar zwischen den Coordinaten u, v irgend einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden durch ihre Coordinaten u_1, v_1 und u_2, v_2 gegebenen Geraden (L_1) und (L_2) hindurchgeht, ist also mit einem Worte die Gleichung dieses Punktes.

Es ist an sich klar, dass man Gl. (44) wieder ersetzen kann durch

$$(45) \quad \ldots \quad v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} (u - u_1).$$

Discussion der Gleichung: $Au + Bv + C = o$. Die eben angestellten Betrachtungen ließen erkennen, dass das geometrische Äquivalent dieser Gleichung ein Punkt ist von den Coordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$. Würde daher der Coefficient $B = o$, so ist $y = o$ und liegt der Punkt in der Abscissenachse, weshalb auch

$$(46) \quad \ldots \quad Au + C = o$$

die Gleichung eines der Abscissenachse angehörigen Punktes ist, dessen Entfernung vom Ursprunge gleich $\frac{A}{C}$ wäre; ebenso leicht findet man auch, dass

$$(47) \quad \ldots \quad Bv + C = o$$

die Gleichung eines in der Ordinatenachse liegenden Punktes repräsentiert, dessen Entfernung vom Ursprunge gleich $\frac{B}{C}$ ist. Wird C allein gleich null, so stellt vorliegende Gleichung einen Punkt dar, dessen Coordinaten x, y resultieren aus den Gleichungen $\frac{1}{x} = \frac{o}{A}$, $\frac{1}{y} = \frac{o}{B}$ oder $x = \infty$, $y = \infty$ und d. s. die Coordinaten des gemeinsamen unendlich fernen Punktes aller derjenigen zu einander parallelen Geraden, welche gegen die Abscissenachse unter dem Winkel τ geneigt sind, bestimmt durch $\operatorname{tg} \tau = \frac{B}{A}$, indem ja nach den vorhergegangenen Gleichungen $\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$ ist. Hieraus folgt aber auch zugleich die geometrische Bedeutung der beiden Gleichungen $u = o$ und $v = o$. Denn setzt man in der Gleichung zur Bestimmung des Winkels τ zunächst $A = 1$ und $B = o$, so erhält man $\operatorname{tg} \tau = \frac{o}{1} = o$, d. h. die Geraden, deren unendlich ferner Punkt durch die Gleichung $u = o$ bestimmt erscheint, sind parallel gerichtet

zur Abscissenachse; substituiert man aber in $\operatorname{tg}\tau = \frac{B}{A}$, $A = o$ und $B = 1$, so erhält man $\operatorname{cotg}\tau = \frac{o}{1} = o$ und sind somit diejenigen Geraden, deren unendlich ferner Punkt durch $v = o$ gegeben ist, sammt und sonders parallel zur Ordinatenachse. Endlich verbleibt noch derjenige Fall in Betracht zu ziehen, wo die Coefficienten A und B gleichzeitig verschwinden, C aber von null verschieden ist. Da jetzt $x = y = \frac{o}{C} = o$ werden, ist das geometrische Äquivalent unserer Gleichung der Anfangspunkt des Coordinatensystems. Wir werden später bei den homogenen Coordinaten auf die Gleichung des Ursprungs noch einmal zu sprechen kommen und heben jetzt nur hervor, dass der Ursprung und die unendlich ferne Gerade der Ebene unseres Coordinatensystems zu einander reciprok sind.

§ 11. Das Gesetz der Reciprocität.

Vergleicht man die in dem letzten Paragraphen gefundenen Gleichungen mit jenen des Paragraphen 9, so ergibt sich zwischen beiden ein bemerkenswerter Zusammenhang. Um nun diesen sofort zu erkennen, stellen wir die diesbezüglichen Gleichungen zusammen. So ist nach dem Früheren

(a) . . . $ux + vy + 1 = o$	$xu + yv + 1 = o$ . . . (a^1)
die Gleichung einer Geraden von den Coordinaten u, v, wenn u, v constant und x, y veränderlich	die Gleichung eines Punktes von den Coordinaten x, y, wenn x, y constant und u, v veränderlich

gedacht werden und aus diesen Gleichungen ersieht man, dass das geometrische Äquivalent der linearen Gleichung

(b) . . . $Ax + By + C = o$	$Au + Bv + C = o$ . . . (b^1)
eine Gerade ist von den Coordinaten $u = \frac{A}{C}$, $v = \frac{B}{C}$, während x, y die Coordinaten irgend eines Punktes in dieser Geraden darstellen.	ein Punkt ist von den Coordinaten $x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$, während u, v die Coordinaten irgend einer durch diesen Punkt gelegten Geraden sind.

Ferner fanden wir in § 9 und § 10

$$(c) \ldots \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = o$$

als die Gleichung einer durch die beiden Punkte M_1 und M_2 bestimmten Geraden, wenn x_1, y_1 und x_2, y_2 die Coordinaten dieser Punkte sind.

$$\begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} = o \ldots (c^1)$$

als Gleichung des Schnittpunktes zweier Geraden (L_1) und (L_2) von den Coordinaten u_1, v_1 und u_2, v_2.

Wie (a) bis (b^1) lehren, erhält man somit die Gleichung des Punktes aus der Gleichung der Geraden, wenn man in letzterer die veränderlichen Coordinaten x, y ersetzt durch die veränderlichen Liniencoordinaten u, v oder, wenn man sich x, y nicht als Punktcoordinaten, sondern als Liniencoordinaten denkt. Ganz dasselbe gilt, sobald man (c^1) aus (c) herleitet; auch hier hat man blos Punktcoordinaten durch Liniencoordinaten zu ersetzen. Dies stimmt jedoch auch mit der Thatsache überein, dass in der Ebene, der Geraden der Punkt und mithin der Verbindungsgeraden zweier Punkte der Schnittpunkt zweier Geraden reciprok gegenüber steht. Wir werden in der Folge sehr häufig derartige Betrachtungen anstellen und dadurch, dass in einer Gleichung zwischen veränderlichen Punktcoordinaten die letzteren ersetzt werden durch veränderliche Liniencoordinaten, Sätze gewinnen, welche bereits gefundenen Sätzen reciprok gegenüber stehen. Dies alles wäre jedoch ohne Zuhilfenahme der Liniencoordinaten ganz unmöglich oder doch sehr schwerfällig und hat demnach Plücker durch die Einführung der Liniencoordinaten die analytische Geometrie wesentlich erweitert und diese der sogenannten neueren Geometrie würdig zur Seite gestellt.

Um schon hier in das Wesen der Reciprocität intensiver einzudringen, mögen noch eine Reihe von passend gewählten Beispielen und Sätzen vorgeführt werden.

Es sind zu bestimmen die Coordinaten

des Schnittpunktes der beiden Geraden

$$L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o, \quad i = 1,2.$$

der Verbindungsgeraden der beiden Punkte

$$M_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o, \quad i = 1,2.$$

Nachdem der Schnittpunkt beiden Geraden angehört, haben seine Coordinaten den Gleichungen zu genügen:

$$A_1x + B_1y + C_1 = o$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = o$$

und sind daher die Wurzeln dieser zwei Gleichungen die gesuchten Lösungen. Für die Coordinaten des Schnittpunktes beider Geraden

Nachdem die Verbindungsgerade durch beide Punkte hindurchgeht, haben ihre Coordinaten den Gleichungen zu genügen:

$$A_1u + B_1v + C_1 = o$$
$$A_2u + B_2v + C_2 = o$$

und sind daher die Wurzeln dieser zwei Gleichungen die gesuchten Lösungen. Für die Coordinaten der Verbindungsgeraden beider Punkte

erhält man somit

$$(48) \ldots \quad x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad y = \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

$$u = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad v = \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \ldots (49)$$

Ist nun in einem speciellen Fall der Nenner $A_1 B_2 - A_2 B_1 = o$, oder $A_2 = k A_1$ und $B_2 = k B_1$, so wird

$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = o$, d. h. $x = y = \infty$ und durchschneiden sich die beiden Geraden $L_1 = o$ und $L_2 = o$ gar nicht oder sind parallel. Zwei gerade Linien, deren Gleichungspolynome nur durch das letzte Glied sich unterscheiden, sind daher parallel.

$\frac{1}{u} = \frac{1}{v} = o$, d. h. $u = v = \infty$ und folglich $a = b = \frac{1}{\infty} = o$, weshalb die Verbindungsgerade durch den Ursprung geht. Zwei Punkte, deren Gleichungspolynome nur durch das letzte Glied sich unterscheiden, bestimmen somit eine Gerade durch den Ursprung.

Man soll untersuchen, wann die durch die Gleichungen

$L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o$, $i = 1,2,3$, gegebenen drei Geraden in einem und demselben Punkte sich durchschneiden.

$M_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o$, $i = 1,2,3$, gegebenen drei Punkte in einer und derselben Geraden liegen.

Nimmt man an, dass die drei Geraden in der That in einem einzigen Punkte sich

Nimmt man an, dass die drei Punkte in der That in einer einzigen Geraden

durchschneiden, so muss ein Wertesystem von x, y existiren, welches den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= o \\ A_2x + B_2y + C_2 &= o \\ A_3x + B_3y + C_3 &= o \end{aligned}$$

liegen, so muss ein Wertesystem von u, v existieren, welches den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} B_1u + A_1v + C_1 &= o \\ A_2u + B_2v + C_2 &= o \\ A_3u + B_3v + C_3 &= o \end{aligned}$$

gleichzeitig genügt, und aus diesen findet man durch die Elimination von x und y, beziehungsweise u und v

$$(50) \ldots \quad \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = o$$

als Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit die drei

Geraden in einem und demselben Punkte sich durchschneiden.

Punkte in einer und derselben Geraden liegen.

Aus der eben gewonnenen Gleichung (50) folgt aber noch, dass die drei

Geraden von den Coordinaten u_i, v_i, $i = 1,2,3$, dann in einem einzigen Punkte sich durchschneiden, wenn

$$(51) \ldots \quad \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} = o$$

Punkte von den Coordinaten x_i, y_i, $i = 1,2,3$, dann in einer einzigen Geraden zu liegen kommen, wenn

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = o \ldots (52)$$

wird.

Mittelst der Gleichung (50) lassen sich auch zwei wichtige Sätze herleiten, von denen wir später noch häufig Gebrauch machen werden. Es ist nämlich nach den Elementen der Determinantentheorie die 3^2 elementige Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & L_1 \\ A_2, & B_2, & L_2 \\ A_3, & B_3, & L_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & (A_1x + B_1y + C_1) \\ A_2, & B_2, & (A_2x + B_2y + C_2) \\ A_3, & B_3, & (A_3x + B_3y + C_3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & A_1 \\ A_2, & B_2, & A_2 \\ A_3, & B_3, & A_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & B_1 \\ A_2, & B_2, & B_2 \\ A_3, & B_3, & B_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

und hieraus folgt, nachdem die beiden ersten Determinanten

rechts vom Gleicheitszeichen für sich verschwinden, unter gleichzeitiger Berücksichtigung von (50):

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & L_1 \\ A_2, & B_2, & L_2 \\ A_3, & B_3, & L_3 \end{vmatrix} \equiv o$$

oder nach erfolgter Berechnung der in dieser Gleichung vorkommenden Determinante

$$(A_2 B_3 - A_3 B_2) . L_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) . L_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) . L_3 \equiv o$$

Setzt man jetzt noch

$$k_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \; k_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3, \; k_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1,$$

so erhält man nach dem Gesetze der Reciprocität die beiden wichtigen Sätze:

Durchschneiden die drei Geraden

$$L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o, \quad i = 1,2,3,$$

sich in einem und demselben Punkte,

Liegen die drei Punkte

$$M_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o, \quad i = 1,2,3,$$

in einer und derselben Geraden,

so lassen sich stets drei reelle Coefficienten k_1, k_2, und k_3 ausfindig machen, für welche die Identität besteht:

$$(53) \quad k_1 L_1 + k_1 L_2 + k_3 L_3 \equiv o \qquad | \qquad k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 \equiv o \quad (54)$$

Und umgekehrt.

Sind demnach u_i, v_i, $i = 1,2,3$, die Coordinaten dieser drei Geraden,

Sind demnach x_i, y_i, $i = 1,2,3$, die Coordinaten dieser drei Punkte,

so erscheinen dieselben unter einander verbunden durch die nachfolgenden Gleichungen, u. zw.:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = o \qquad k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = o,$$

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = o \qquad k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 = o,$$

wenn noch zwischen den drei hier in Betracht kommenden Coefficienten k_i die Bedingung obwaltet:

$$k_1 + k_2 + k_3 = o.$$

Im Anschlusse sollen zur weiteren Erklärung des hier erörterten Principes der Reciprocität oder Dualität noch die folgenden, ebenfalls nicht unwichtigen Sätze beigefügt werden.

In einer imaginären Geraden***) existiert blos ein einziger reeller Punkt.

Durch einen imaginären Punkt***) kann man blos eine einzige reelle Gerade hindurchlegen.

Denn ist

$L \equiv (A + iA')x + (B + iB')y + (C + iC') = o$

die Gleichung der imaginären Geraden, so ersetze man erstere durch die folgende

$L \equiv (Ax + By + C) + i(A'x + B'y + C') = o$

$M \equiv (A + iA')u + (B + iB')v + (C + iC') = o$

die Gleichung des imaginären Punktes, so ersetze man erstere durch die folgende

$M \equiv (Au + Bv + C) + i(A'u + B'v + C') = o$

und diese Gleichungen werden für solche Werte von x und y, beziehungsweise u und v, befriedigt, welche den beiden Bedingungen gleichzeitig genügen

$Ax + By + C = o$
$A'x + B'y + C' = o.$

$Au + Bv + C = o$
$A'u + B'v + C' = o.$

Nun existiert aber blos ein Wertesystem von x und y, beziehungsweise u und v, welches die beiden obigen Gleichungen befriedigt, daher etc. etc.

Eine reelle Gerade enthält unendlich viele imaginäre Punkte und sind $x = p + qi$, $y = r + is$ die Coordinaten eines solchen Punktes, so sind es auch $x' = p - qi$, $y' = r - is$.

Durch einen reellen Punkt können unendlich viele imaginäre Geraden gelegt werden und sind $u = p + qi$, $v = r + is$ die Coordinaten einer solchen Geraden, so sind es auch $u' = p - qi$, $v' = r - is$.

***) Um die Ergebnisse der Analyse ohne Ausnahme und einheitlich formulieren zu können, denken wir uns durch

$x = a,\ y = b$ | $u = m,\ v = n$

oder

$Au + Bv + C = o$ | $Ax + By + C = o$

auch dann noch

einen Punkt | eine Gerade

dargestellt, wenn die hier vorkommenden Constansten

a und b, respective A, B und C | m und n, respective A, B und C

nicht mehr reell erscheinen, sondern complexe Grössen repräsentieren und diesen Punkt, beziehungsweise diese Gerade, nennen wir zum Unterschiede von dem wirklich existierenden Punkte und der wirklich existierenden Geraden einen imaginären Punkt, eine imaginäre Gerade.

Denn unter der Annahme, dass

$x = p + qi,\ y = r + is$ die Coordinaten eines Punktes der Geraden	$u = p + qi,\ v = r + is$ die Coordinaten einer Geraden aus dem Punkte
$L \equiv Ax + By + C = o$	$M \equiv Au + Bv + C = o$

darstellen, muss

$$A(p + qi) + B(r + is) + C = o$$

oder

$$(Ap + Br + C) + i(Aq + Bs) = o$$

werden und diese Gleichung kann nur für solche Werte von p, q, r und s erfüllt erscheinen, für welche ein jeder der beiden Klammerausdrücke für sich verschwindet, also

$$Ap + Br + C = o, \qquad Aq + Bs = o$$

wird. Nun gibt es aber unendlich viele Wertesysteme von p, q, r und s, welche den beiden obigen Bedingungen zugleich genügen und folglich auch unendlich viele Punkte, die in der Geraden $L = o$ liegen oder unendlich viele Geraden, welche durch den Punkt $M = o$ hindurchgehen. Sind aber die beiden letzten Gleichungen erfüllt, so ist auch

$$(Ap + Br + C) - i(Aq + Bs) = o$$

und genügen somit auch die Punktcoordinaten, beziehungsweise Liniencoordinaten

$$x = p - qi, \quad y = r - i.s \;\big|\; u = p - qi, \quad v = r - is$$

der Gleichung

$$Ax + By + C = o, \;\big|\; Au + Bv + C = o,$$

daher etc. etc.

§ 12. Aufgaben über Punkt und Gerade.

a) **Normaldistanz einer Geraden von einem Punkte.** Bei dieser Aufgabe mache man vorläufig die Annahme, dass die Gleichung der Geraden (L) gegeben sei in der Hesse'schen Normalform $l \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha + d = o$, während der Punkt M_1 durch seine Coordinaten x_1, y_1 bestimmt erscheint. Ist nun N_1 (Fig. 8) der Fußpunkt der durch den Punkt M_1 auf die Gerade (L) gefällten Senkrechten, so ist $N_1 M_1 = \delta$ die zu suchende Normaldistanz der Geraden (L) von dem Punkte M_1 und diese erscheint

dann positiv, sobald der Punkt M_1 mit dem Ursprunge O auf derselben Seite der Geraden (L) zu liegen kommt, indem wir bereits in dem Früheren die Strecke $NO = d$ als positiv angenommen haben, d. i. die Entfernung der Geraden (L) von dem Ursprunge O, und nicht ON. Befände sich dagegen (L) zwischen O und M_1, so wäre selbstverständlich $N_1 M_1$ nicht mehr positiv, sondern negativ. Um nun die Normaldistanz $\delta = N_1 M_1$ der Geraden (L) von dem Punkte M_1 zu ermitteln, kann man sich wieder des Satzes über die Projection eines geschlossenen Vielstrecks (§ 2) auf eine Gerade bedienen, und gelangt dann durch die Projection des geschlossenen Vielstrecks $OP_1 M_1 N_1 NO$ auf die Gerade NO oder (N) als Projectionsachse, wenn man gleichzeitig bedenkt, dass $OP_1 = x_1$ und $P_1 M_1 = y_1$ ist, zur Gleichung

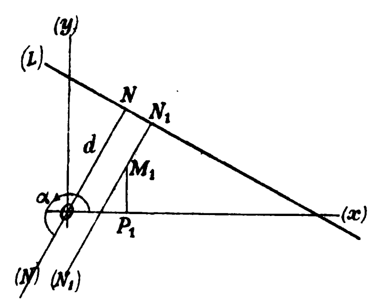


Fig. 8.

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \delta \cos\pi + N_1 N \cos\frac{\pi}{2}$$
$$+ d . \cos o = o$$

und hieraus folgt

$$(55) \quad . \; . \; . \quad \delta = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha + d.$$

Ersetzt man daher in dem Gleichungspolynom der Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Geraden die veränderlichen Coordinaten x, y durch jene eines außerhalb der Geraden liegenden Punktes, so erhält man die Normaldistanz der Geraden von diesem Punkte. Mittelst der Gleichung (55) ist man aber auch in der Lage, die Normaldistanz der durch $L \equiv Ax + By + C = o$ gegebenen Geraden von dem Punkte $M_1 (x_1, y_1)$ zu bestimmen. Denn nachdem, wie in § 9 gezeigt wurde, $l = \varrho L$ und $\varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ ist, wird hier

$$(56) \quad . \; . \; . \quad \delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

und ist in dem Ausdrucke, rechts vom Gleichheitszeichen, das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem C positiv oder negativ erscheint. Daher ist, wenn die Gerade (L) nicht durch eine Gleichung, sondern durch ihre Coordinaten u, v bestimmt wäre, deren Normaldistanz von dem Punkte M_1 gleich

$$(57) \quad . \; . \; . \quad \delta = \frac{u x_1 + v y_1 + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

b) **Winkel zweier Geraden, welche gegeben erscheinen durch die Gleichungen (58) $L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1{,}2$.** Nennt man wieder $\varepsilon = (L_1, L_2)$ den zu suchenden Winkel, ferner $\alpha_1 = (x, N_1)$ und $\alpha_2 = (x, N_2)$ die Winkel, welche die Achse der x mit den Normalen (N_1) und (N_2) dieser zwei Geraden bildet, so ist zunächst

$$\varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1,$$

mithin nach den in § 4 gegebenen Formeln

$$(a) \quad . \; . \; . \quad \begin{aligned} \cos\varepsilon &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 . \sin\alpha_2 \\ \sin\varepsilon &= \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 \end{aligned}$$

und handelt es sich jetzt nur noch darum, $\cos\alpha_i$ und $\sin\alpha_i$ durch die in den Gleichungen (58) der beiden Geraden vorkommenden Coefficienten zu bestimmen. In § 9 fanden wir aber

$$(b) \quad . \; . \; . \quad \begin{aligned} \cos\alpha_i &= \frac{A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} \\ \sin\alpha_i &= \frac{B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}, \quad i = 1{,}2 \end{aligned}$$

und durch Substitution dieser Werte für $\cos\alpha_i$ und $\sin\alpha_i$ in (a) ergibt sich demnach

$$(58_a) \quad . \; . \; . \quad \begin{aligned} \cos\varepsilon &= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2) \cdot (A_2^2 + B_2^2)}}, \\ \sin\varepsilon &= \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2) \cdot (A_2^2 + B_2^2)}} \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn man die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividiert

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2},$$

wodurch die eigentliche Aufgabe gelöst erscheint. Sind die

beiden Geraden zu einander parallel gerichtet, so ist $\varepsilon = o$, $\sin\varepsilon = o$ und deshalb

$$(59) \quad . \; . \; . \quad A_2 B_1 - A_1 B_2 = o,$$

woraus die beiden Gleichungen fließen $A_2 = k A_1$ und $B_2 = k . B_1$. Die Gleichungen von zwei parallelen Geraden können demnach immer auf die Formen gebracht werden: $L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$, $L_2 \equiv A_1 x + B_1 y + C_2' = o$. Stehen dagegen die beiden Geraden $L_1 = o$ und $L_2 = o$ auf einander senkrecht, so ist $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varepsilon = o$, mithin

$$(60) \quad . \; . \; . \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = o.$$

Aus dieser Betrachtung folgt sofort, dass die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $M_1(x_1, y_1)$ hindurchgeht und parallel gerichtet ist zur Geraden $L \equiv Ax + By + C = o$, lautet

$$(61) \quad . \; . \; . \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = o,$$

dagegen die Gleichung der durch den Punkt M_1 auf $L = o$ gefällten Normalen

$$(62) \quad . \; . \; . \quad \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}$$

und wird, des besseren Verständnisses wegen, bei dem letzteren Fall noch bemerkt, dass der Winkel (x, N), welchen die Abscissenachse mit der Normalen der Geraden $L = o$ einschließt, gleich α ist, somit $\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha}$ die Gleichung der durch den Punkt M_1 auf die Gerade $L = o$ gefällten Senkrechten in der ersten Form darstellt. Nun ist aber, wie in § 9 gezeigt wurde, $\cos\alpha = \varrho A$, und $\sin\alpha = \varrho . B$, wodurch die letzte Gleichung in (62) übergeht.

Erscheinen die Gleichungen der beiden Geraden (L_1) und (L_2), deren Neigungswinkel ε zu bestimmen wäre, gegeben in den Formen

$$(63) \quad . \; . \; . \quad y = m_1 . x + b_1 \qquad y = m_2 x + b_2,$$

so ist, wegen $\operatorname{tg}(x, L_1) = m_1$, $\operatorname{tg}(x, L_2) = m_2$ und $(L_1, L_2) = (x, L_2) - (x, L_1)$

$$(64) \quad . \; . \; . \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2}.$$

Die durch die Gleichungen (63) festgesetzten Geraden haben somit dieselbe Richtung, wenn

$$(65) \quad . \; . \; . \quad m_1 = m_2$$

ist, sie stehen dagegen auf einander senkrecht, sobald $1 + m_1 m_2 = o$, d. h.

$$(66) \quad . \; . \; . \quad m_2 = -\frac{1}{m_2}$$

wird.

Die Aufgabe (*b*) erscheint auch dann noch leicht lösbar, wenn die Geraden (L_1) und (L_2) nicht durch ihre Gleichungen, sondern durch ihre Coordinaten u_1, v_1 und u_2, v_2 gegeben wären. Da nämlich hier einfach $A_i = u_i$ und $B_i = v_i$ ist, so nehmen die früheren Gleichungen (58_a) die Form an

$$(67) \quad . \; . \; . \quad \begin{aligned} \cos\varepsilon &= \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)}}, \\ \sin\varepsilon &= \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{\sqrt{(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)}} \end{aligned}$$

und aus diesen Formeln ergibt sich für den Parallelismus beider Geraden

$$(68) \quad . \; . \; . \quad u_2 v_1 - u_1 v_2 = o$$

und für den Fall, dass dieselben auf einander senkrecht stehen

$$(69) \quad . \; . \; . \quad u_1 u_2 + v_1 v_2 = o.$$

c) **Man bestimme den Flächeninhalt eines Dreiseits aus den Coordinaten seiner drei Seiten.** Nennt man u_i, v_i, $i = 1,2,3$, die Coordinaten der drei Seiten (L_i) des Dreiseits und x_i, y_i jene der den letzteren gegenüber liegenden Ecken M_i, so ist zunächst

$$(a) \quad . \; . \; . \quad \begin{aligned} u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1 &= k_1 \\ u_1 x_2 + v_1 y_2 + 1 &= o \\ u_1 x_3 + v_1 y_3 + 1 &= o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 x_1 + v_2 y_1 + 1 &= o \qquad & u_3 x_1 + v_3 y_1 + 1 &= o \\ u_2 x_2 + v_2 y_2 + 1 &= k_2 \qquad & u_3 x_2 + v_3 y_2 + 1 &= o \\ u_2 x_3 + v_2 y_3 + 1 &= o \qquad & u_3 x_3 + v_3 y_3 + 1 &= k_3, \end{aligned}$$

wenn k_1, k_2 und k_3 drei noch zu bestimmende Größen sind. Aus den eben aufgestellten Gleichungen ergibt sich nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten

$$(b) \ldots \quad \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = k_1 . k_2 . k_3$$

und hieraus ersieht man, weil die zweite der links vom Gleichheitszeichen stehenden Determinanten nach § 6 den doppelten Flächeninhalt unseres Dreiseits angibt, dass die hier gestellte Aufgabe gelöst ist, sobald es gelingt, die Coefficienten k_i, $i = 1,2,3$, durch u_i und v_i auszudrücken. Zu diesem Zwecke eliminiere man aus jenen drei Gleichungen der Gruppe (a), welche in der ersten Zeile sich befinden, die Coordinaten x_1, y_1 und erhält dadurch

$$\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & (1-k_1) \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & k_1 \\ u_2, & v_2, & o \\ u_3, & v_3, & o \end{vmatrix} = o$$

oder

$$A - k_1 A_{1,3} = o,$$

sobald A die erste links vom Gleichheitszeichen in (b) stehende 3^2 elementige Determinante bezeichnet und $A_{i,k} = (-1)^{i+k}$mal jener Minore ist, die aus A durch Unterdrückung der Zeile i und Colonne k hervorgeht. Schlägt man noch für die Bestimmung von k_2 und k_3 den analogen Weg ein, so findet man

$$(c) \ldots \quad k_1 = \frac{A}{A_{1,3}}, \quad k_2 = \frac{A}{A_{2,3}}, \quad k_3 = \frac{A}{A_{3,3}}$$

und aus diesen drei Gleichungen und der früheren (b) folgt durch die Elimination von k_1, k_2, und k_3, wenn man noch den zu suchenden Flächeninhalt des Dreiseits mit F bezeichnet

$$(65) \ldots \quad 2F = \frac{A^2}{A_{1,3} . A_{2,3} . A_{3,3}}.$$

Die hier vorkommenden Größen A und $A_{i,k}$ sind natürlich Functionen der Coordinaten u_i, v_i, und zwar ist:

$$(66) \ldots \quad A = \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1, \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$(67) \ldots \quad A_{1,3} = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad A_{2,3} = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad A_{3,3} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

§ 13. Transformation der Coordinaten.

Mitunter erscheint es geboten, die Coordinaten eines Punktes oder einer Geraden in Bezug auf ein bestimmtes Parallel-Coordinatensystem auszudrücken durch die Coordinaten derselben geometrischen Gebilde, jedoch bezogen auf ein anderes Coordinatensystem dieser Art. Diese Operation nennt man nun die Transformation der Coordinaten und wir wollen dieselbe für diejenigen Fälle in Betracht ziehen, welche bei den folgenden Untersuchungen wichtig sind, hierbei aber auch gleichzeitig die Liniencoordinaten mit berücksichtigen.

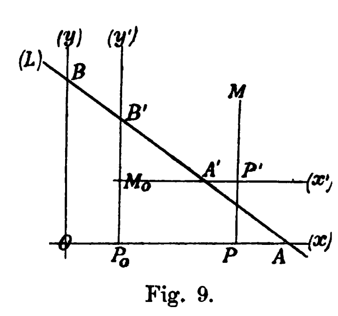


Fig. 9.

1. Fall. Die beiden Coordinatensysteme (Fig. 9) haben dieselben Achsenrichtungen, aber verschiedene Anfangspunkte. Wir bezeichnen nun die Coordinatenachsen des einen Systems I mit (x) und (y), jene des anderen II mit (x') und (y') und nennen dem entsprechend x, y die Coordinaten irgend eines Punktes M im System I, x', y' die desselben Punktes in II, ferner u, v die Coordinaten irgend einer Geraden (L) im System I, u', v' die derselben Geraden in II, endlich x_0, y_0 die Coordinaten des Ursprungs M_0 des Coordinatensystems II, bezogen auf I. Ein Blick auf die beigegebene Figur lehrt nun, dass zwischen den Punktcoordinaten x, y und x', y' die Beziehungen obwalten

$$(68) \ldots \quad \begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y', \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned} \quad \ldots (69)$$

und man kann jetzt mittelst der Gleichungen (68) die Coordinaten x, y ausdrücken durch x', y'; dagegen mittelst der Gleichungen (69) umgekehrt x', y' ausdrücken durch x, y.

Ebenso leicht lassen sich nun auch die hierhergehörigen Transformationsformeln für Liniencoordinaten auffinden. Zunächst sei bemerkt, dass

$$(a) \ldots \quad ux + vy + 1 = o$$

die Gleichung der Geraden (L) von den Coordinaten u, v

im System I darstellt. Will man jetzt diese Gleichung transformieren auf das System II, so hat man in Gl. (a) bloß x und y auszudrücken durch die in (68) gegebenen Werte und erhält dadurch

$$u(x_0 + x') + v(y_0 + y') + 1 = o$$

oder

$$(b) \quad \ldots \quad \frac{u}{u x_0 + v y_0 + 1} . x' + \frac{v}{u x_0 + v y_0 + 1} . y' + 1 = o$$

als Gleichung von (L) im System II. Diese Gleichung lautet aber noch

$$(c) \quad \ldots \quad u' . x' + v' . y' + 1 = o$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt daher

$$(70) \quad \ldots \quad u' = \frac{u}{x_0 u + y_0 v + 1}, \quad v' = \frac{v}{x_0 u + y_0 v + 1}.$$

Geht man aber von Gleichung (c) aus und ersetzt hierin x' und y' durch die in (69) gegebenen Werte, so erhält man

$$(d) \quad \ldots \quad \frac{u'}{1 - x_0 u' - y_0 v'} x + \frac{v'}{1 - x_0 u' - y_0 v'} . y + 1 = o$$

als Gleichung der Geraden (L), aber bezogen auf das Coordinatensystem I. Da diese Gleichung mit der früheren (a) übereinstimmen muss, so folgt

$$(71) \quad \ldots \quad u = \frac{u'}{1 - x_0 . u' - y_0 v'}, \quad v = \frac{v'}{1 - x_0 . u' - y_0 v'}$$

und man kann somit mittelst (70) die Coordinaten u', v' ausdrücken durch u, v, während die Formeln (71) die Möglichkeit bieten, u, v durch u', v' zu bestimmen.

2. Fall. Die beiden Coordinatensysteme (Fig. 10) haben dieselben Anfangspunkte, aber verschiedene Achsenrichtungen, ferner ist das Coordinatensystem I orthogonal, jenes II schiefwinkelig. Unter Benützung derselben Bezeichnungen, wie in dem vorhergegangenen Fall, ist nun, sobald noch $(x, x') = \alpha$ und $(x, y') = \beta$ gesetzt wird

$$(72) \quad \ldots \quad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta \end{aligned}$$

und diese Gleichungen lassen x, y aus x', y' bestimmen. Löst man dieselben nach x' und y' auf, so erhält man die verkehrten Transformationsformeln, und zwar:

$$(73) \ldots \quad \begin{aligned} x' &= \frac{x \,.\, \sin\beta - y\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ y' &= \frac{y \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

und aus diesen findet man x', y' aus x, y.

Um nun auch die diesbezüglichen Transformationsgleichungen für die Liniencoordinaten zu erhalten, substituiere man in (a) für x und y die Werte aus (72) und gelangt dann zur Gleichung

$$(u\cos\alpha + v\sin\alpha)x' + (u\cos\beta + v\sin\beta)y' + 1 = o,$$

welche, verglichen mit (c), zu den Transformationsgleichungen führt

$$(74) \ldots \quad \begin{aligned} u' &= u\cos\alpha + v\sin\alpha, \\ v' &= u\cos\beta + v\sin\beta, \end{aligned}$$

woraus man durch Auflösung nach u und v erhält

$$(75) \ldots \quad \begin{aligned} u &= \frac{u'\sin\beta - v'\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ v &= \frac{v'\cos\alpha - u'\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

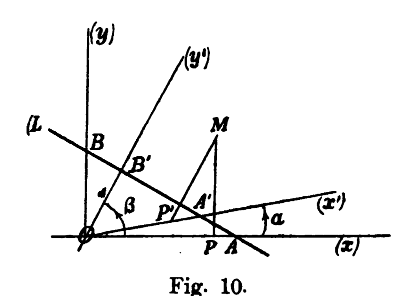


Fig. 10.

In dem speciellen Fall, wo das Coordinatensystem II ebenfalls orthogonal ist, hat man in den Transformationsformeln (72) bis (75) bloß $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ zu setzen, wodurch die letzteren die einfachere Form annehmen:

$$(76) \ldots \quad \begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \\ x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= u'\cos\alpha - v'\sin\alpha \\ v &= u'\sin\alpha + v'\cos\alpha, \\ u' &= u\cos\alpha + v\sin\alpha \\ v' &= -u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{aligned} \ldots (77)$$

und verdient hier noch bemerkt zu werden, dass die Transformationsgleichungen (76) auch manchmal so geschrieben werden

$$(78) \quad \ldots \quad \begin{aligned} x &= x' \cos(x, x') + y' \cos(x, y') \\ y &= x' \cos(y, x') + y' \cos(y, y'), \\ x' &= x \cos(x', x) + y \cos(x', y) \\ y' &= x \cos(y', x) + y \cos(y', y). \end{aligned}$$

Von selbst ergeben sich jetzt die diesbezüglichen Transformationsgleichungen für den allgemeinsten Fall, wo nämlich beide Coordinatensysteme I und II verschiedene Anfangspunkte und Achsenrichtungen besitzen und man erkennt sofort, dass auch hier diese Gleichungen wieder linear sein werden. Es wird daher der Grad einer Gleichung zwischen x und y oder u und v durch die Wahl des Ursprungs und der beiden Achsenrichtungen nicht beeinflusst, wie dies auch erwartet werden musste.

Capitel III.

Punktreihen und Strahlenbüschel I. Ord.

(Grundgebilde I. Stufe.)

§ 14. Definition und Gleichung.

Unter einer Punktreihe 1. Ordnung versteht man den Inbegriff aller auf einer Geraden liegenden Punkte. Jeder dieser Punkte heißt ein Element und die Gerade der Träger der Punktreihe.

Unter einem Strahlenbüschel 1. Ordnung versteht man den Inbegriff aller durch einen Punkt gehenden und in derselben Ebene liegenden Strahlen. Jeder dieser Strahlen heißt ein Element und der Punkt der Träger (Mittelpunkt) des Büschels.

Aus dieser Definition folgt sofort:

Zwei Punkte einer Punktreihe 1. Ordnung bestimmen letztere eindeutig.

Zwei Strahlen eines Strahlenbüschels 1. Ordnung bestimmen letzteren eindeutig.

Sind demnach k_1 und k_2 zwei veränderliche Parameter und

$M_1 \equiv A_i u + B_i v + C_i = o$, $i = 1,2$, die Gleichungen zweier Elemente der Reihe, so ist $k_1 M_1 + k_2 M_2 = o$ die Gleichung einer Punktreihe 1. Ord. und deren Träger die Verbindungsgerade der beiden Punkte $M_1 = o$, $M_2 = o$.

$L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o$, $i = 1,2$, die Gleichungen zweier Elemente des Büschels, so ist $k_1 L_1 + k_2 L_2 = o$ die Gleichung eines Strahlenbüschels 1. Ord. und dessen Centrum der Schnittpunkt der beiden Geraden $L_1 = o$, $L_2 = o$.

Denn nimmt man vorläufig an, es seien k_1 und k_2 nicht veränderlich, sondern constant, so repräsentiert die lineare Gleichung:

$$k_1 (A_1 u + B_1 v + C_1) + k_2 (A_2 u + B_2 v + C_2) = o$$

einen Punkt, welcher in der Verbindungsgeraden der beiden gegebenen Punkte $M_1 = o$ und $M_2 = o$ liegt, indem die obige Gleichung auch für dasjenige Wertesystem von u, v befriedigt wird, welches aus den beiden Gleichungen hervorgeht

$$A_1 u + B_1 v + C_1 = o,$$
$$A_2 u + B_2 v + C_2 = o.$$

$$k_1 (A_1 x + B_1 y + C_1) + k_2 (A_2 x + B_2 y + C_2) = o$$

eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $L_1 = o$ und $L_2 = o$ geht, indem obige Gleichung auch für dasjenige Wertesystem von x, y befriedigt wird, welches aus den beiden Gleichungen hervorgeht

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = o,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = o.$$

Sieht man nun wieder k_1 und k_2 als veränderlich an und ertheilt diesen Parametern solche Wertesysteme, für welche der Bruch $\frac{k_2}{k_1}$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, so erhält man aus

$$(79) \quad k_1 M_1 + k_2 M_2 = o$$

die Gleichungen aller in der Verbindungsgraden ($M_1 = o$, $M_2 = o$) liegenden Punkte und ist mithin (79) die Gleichung einer Punktreihe vom Träger ($M_1 = o$, $M_2 = o$) oder von den beiden Grundpunkten $M_1 = o$, $M_2 = o$,

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 = o \quad (80)$$

die Gleichungen aller durch den Schnittpunkt ($L_1 = o$, $L_2 = o$) gehenden Geraden oder Strahlen und ist mithin (80) die Gleichung eines Strahlenbüschels vom Centrum($L_1 = o$, $L_2 = o$) oder von den beiden Grundstrahlen $L_1 = o$, $L_2 = o$,

wenn k_1 und k_2 zwei veränderliche Parameter darstellen. Es ist klar, dass man die beiden eben gegebenen Gleichungen auch ersetzen kann durch die folgenden

$$(79a) \quad M_1 - \lambda M_2 = o, \qquad L_1 - \lambda L_2 = o, \quad (80a),$$

sobald λ ein veränderlicher Parameter ist und sei noch erwähnt, dass einem jeden speciellen Werte von λ ein Element der Reihe oder des Büschels entspricht, und umgekehrt. Leicht ergibt sich jetzt auch die Gleichung eines in der Geraden (L') liegenden Punktes der Punktreihe (79a) oder die Gleichung eines durch den Punkt M' hindurchgehenden Strahls des Büschels (80a); denn ist z. B.

$(a) \ldots M_1 - \lambda' M_2 = o$ die Gleichung dieses Punktes, so muss, sobald u', v' die Coordinaten des Strahls (L') repräsentieren, vorhergehende Gleichung befriedigt werden für $u = u'$, $v = v'$, d. h. also, es muss sein

$(b) \ldots M_1' - \lambda' M_2' = o,$

wenn die Symbole M_i' definiert erscheinen durch $M_i' = A_i u' + B_i v' + C_i$, $i = 1,2$. Die Elimination von λ' aus (a) und (b) liefert aber

$$(81) \ldots \frac{M_1}{M_1'} - \frac{M_2}{M_2'} = o$$

und d. i. die zu suchende Gleichung des Punktes.

$L_1 - \lambda' L_2 = o \ldots (c)$ die Gleichung dieses Strahls, so muss, wenn x', y' die Coordinaten des Punktes M' darstellen, obige Gleichung befriedigt werden für $x = x'$, $y = y'$, d. h. also, es muss sein

$L_1' - \lambda' L_2' = o, \ldots (d)$

wenn die Symbole L_i' definiert erscheinen durch $L_i' = A_i x' + B_i y' + C_i$, $i = 1,2$. Durch die Elimination von λ' aus (c) und (d) erhält man aber

$$\frac{L_1}{L_1'} - \frac{L_2}{L_2'} = o \ldots (82)$$

als die zu suchende Gleichung des Strahls.

Aufgabe. Gegeben zwei Punktreihen. durch ihre Gleichungen

Aufgabe. Gegeben zwei Strahlenbüschel durch ihre Gleichungen

$$(83) \ldots M_1 - \lambda M_2 = o, \ M_3 - \mu M_4 = o, \ M_i = A_i + B_i v + C_i, \ i = 1,2,3,4,$$

$$L_1 - \lambda L_2 = o, \ L_3 - \mu L_4 = o, \ L_i = A_i x + B_i y + C_i, \ldots (84)$$

zu bestimmen, die Gleichung des gemeinsamen Punktes beider Reihen, d. h. des Schnittpunktes ihrer beiden Träger.

zu bestimmen die Gleichung des gemeinsamen Strahls beider Büschel oder der Verbindungsgeraden der Centra beider Büschel.

Lösung. Bezeichnen λ_0 und μ_0 diejenigen Werte von λ und μ, welche dem Schnittpunkte beider Träger entsprechen, so ist

Lösung. Bezeichnen λ_0 und μ_0 diejenigen Werte von λ und μ, welche der Verbindungsgeraden beider Träger entsprechen, so ist

$$(e) \ldots \begin{matrix} M_1 - \lambda_0 M_2 = o \\ M_3 - \mu_0 M_4 = o \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} L_1 - \lambda_0 L_2 = o \\ L_3 - \mu_0 L_4 = o \end{matrix} \ldots (f)$$

die Gleichung dieses Punktes und es ist selbstverständlich,

die Gleichung dieses Strahls und es ist selbstverständlich,

dass diese beiden Gleichungspolynome nur durch einen Factor ϱ von einander verschieden sein können. Behufs Bestimmung von λ_0 und μ_0 weise ich darauf hin, dass der Punkt $M_1 - \lambda_0 M_2 = o$ in der Geraden $(M_3 = o,\ M_4 = o)$ und jener $M_3 - \mu_0 M_4 = o$ in der Geraden $(M_1 = o, M_2 = o)$ liegen muss,

dass diese beiden Gleichungspolynome nur durch einen Factor ϱ von einander verschieden sein können. Behufs Bestimmung von λ_0 und μ_0 weise ich darauf hin, dass die Gerade $L_1 - \lambda_0 L_2 = o$ durch den Punkt $(L_3 = o,\ L_4 = o)$ und jene $L_3 - \mu_0 L_4 = o$ durch den Punkt $(L_1 = o,\ L_2 = o)$ gehen muss,

weshalb nach (50) die beiden Gleichungen bestehen müssen

$$\begin{vmatrix} (A_1 - \lambda_0 A_2), & (B_1 - \lambda_0 B_2), & (C_1 - \lambda_0 C_2) \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = o,$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ (A_3 - \mu_0 A_4), & (B_3 - \mu_0 B_4), & (C_3 - \mu_0 C_4) \end{vmatrix} = o$$

oder

$$(134) - \lambda_0 (234) = o \quad , \qquad (123) - \mu_0 (124) = o,$$

wenn das Symhol $(i\,k\,l)$ definiert erscheint durch die Gleichung

$$(g) \quad \ldots \qquad (i\,k\,l) = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{vmatrix}.$$

Substituiert man jetzt die aus den obigen zwei Gleichungen resultierenden Werte der Parameter λ_0 und μ_0 in die Gleichungen (e) und (f), so erhält man

(85) .. $(234)\, M_1 - (134)\, M_2 = o$ oder $(124)\, M_3 - (123)\, M_4 = o$

$(234)\, L_1 - (134)\, L_2 = o$ oder $(124)\, L_3 - (123)\, L_4 = o$. (86)

als Gleichung des gemeinsamen Elementes der beiden in (83) gegebenen Punktreihen | (84) gegebenen Strahlenbüschel.

Was den früher erwähnten und noch unbekannten Factor ϱ anbelangt, durch welchen die beiden Gleichungen in (85), beziehungsweise (86), sich unterscheiden, so kann derselbe ebenfalls leicht ermittelt werden. Es ist nämlich nach den Elementen der Determinantentheorie

$$\begin{vmatrix} M_1, & M_2, & M_3, & M_4 \\ A_1, & A_2, & A_3, & A_4 \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4 \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4 \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} L_1, & L_2, & L_3, & L_4 \\ A_1, & A_2, & A_3. & A_4 \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4 \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4 \end{vmatrix} = o$$

und hieraus folgt, wenn man die in diesen Gleichungen vorkommenden 4^2 elementigen Determinanten in ihre Minoren erster Ordnung zerlegt

$$(234)\, M_1 - (134)\, M_2 + (124)\, M_3 - (123)\, M_4 = o, \qquad (234)\, L_1 - (134)\, L_2 + (124)\, L_3 - (123)\, L_4 = o,$$

woraus man ohneweiters ersieht, dass der Factor $\varrho = -1$ sein muss.

§ 15. Theilpunkte und Theilstrahlen.

In dem vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass eine Punktreihe gegeben erscheint, sobald man zwei ihrer Punkte M_1 und M_2 kennt. Irgend ein Punkt M der durch die Punkte M_1 und M_2 gegebenen Reihe wird nun in der projectivischen Geometrie dadurch bestimmt, dass man das Verhältnis der Abstände M_1M und M_2M dieses Punktes von den beiden Punkten M_1 und M_2 angibt. Wir werden sogleich den Nachweis erbringen, dass durch Angabe des Verhältnisses $\frac{M_1M}{M_2M}$ der Punkt M, in Bezug auf die Punkte M_1 und M_2, in der That eindeutig bestimmt ist und bemerken noch, dass man den obigen Quotienten häufig durch das Symbol (M_1M_2M) ersetzt und das Abstandsverhältnis oder Theilverhältnis des Punktes M, in Bezug auf die beiden Punkte M_1 und M_2 nennt, während die letzteren die beiden Grundpunkte, Fixpunkte oder Fundamentalpunkte und M selbst der Theilpunkt der durch die Punkte M_1 und M_2 bestimmten Strecke heissen. Der Kürze wegen setzen wir noch $(M_1M_2M) = \lambda$ und haben alsdann

$$M_1M + MM_2 = M_1M_2,$$

daher

$$M_1M\left(1 + \frac{MM_2}{M_1M}\right) = M_1M\left(1 - \frac{M_2M}{M_1M}\right) = M_1M\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = M_1M_2,$$

woraus, wegen $\lambda = \frac{M_1M}{M_2M}$, die beiden Gleichungen sich ergeben

$$(87) \quad . \;.\;. \quad M_1M = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot M_1M_2, \qquad M_2M = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot M_1M_2,$$

und dieselben zeigen, dass der Punkt M durch die Angabe von λ eindeutig bestimmt ist, folglich jedem speziellen Werte von λ nur ein Punkt in der Reihe entspricht. Es ist klar, dass λ negativ oder positiv wird, je nachdem M zwischen M_1 und M_2 zu liegen kommt oder nicht, d. h. also ein innerer oder äußerer Theilpunkt der Strecke M_1M_2 ist, indem in dem ersten Fall die Strecken M_1M und M_2M entgegengesetzte Richtungen, folglich auch entgegengesetzte Vorzeichen, in dem zweiten Fall jedoch diese Strecken einerlei Richtungen, mithin dieselben Vorzeichen besitzen. Aus den Ret. (87) ergibt sich ferner, dass für $\lambda = o$, $M_1M = o$, demnach M mit M_1, für $\lambda = \infty$, $M_2M = o$, also M mit M_2 zusammenfällt; wird $\lambda = -1$, so folgt $M_1M = \frac{1}{2} M_1M_2$ und ist dann M der Mittelpunkt der Strecke M_1M_2. Wird endlich $\lambda = +1$, so ist $\frac{1}{M_1M} = \frac{1}{M_2M} = o$, $M_2M = M_1M = \infty$ und existiert eigentlich kein Punkt, welcher diesem speciellen Werte von λ entspricht. Nun haben wir aber soeben gezeigt, dass jedem Theilverhältnisse nur ein einziger Punkt entspricht, und daher wollen wir, um diesen Satz für alle Fälle aufrecht zu erhalten, auch dem Theilverhältnisse $\lambda = +1$ einen Punkt zuweisen und diesen Punkt, welcher eigentlich in Wirklichkeit gar nicht existiert, sondern nur gedacht wird, den unendlich fernen Punkt derjenigen Geraden nennen, welche durch die Punkte M_1 und M_2 gegeben erscheint. Hieraus fließt die Annahme, dass jede Gerade nur einen unendlich fernen Punkt besitzt, zu welchem man gelangt, sobald man M auf der Geraden M_1M_2 entweder in der einen oder in der anderen Richtung in's Unendliche fortrücken lässt. Es ist dies, wie gesagt, eine bloße Annahme, welche aber, wie die späteren Betrachtungen deutlich zeigen werden, durchaus auf keine Widersprüche führt und demnach gemacht werden kann; ich sage eine Annahme, indem

eigentlich die Gerade $M_1 M_2$ in Wirklichkeit keinen unendlich fernen Punkt besitzt. Wir werden in Hinkunft diesen angenommenen unendlich fernen Punkt mit M_∞ bezeichnen.

In dem vorigen Paragraphen wurde auch gezeigt, dass ein Strahlenbüschel bestimmt ist, wenn zwei Strahlen (L_1) und (L_2) des Büschels gegeben sind. Irgend ein durch den Schnittpunkt dieser beiden Strahlen gehender Strahl (L) wird nun in der projectivischen Geometrie dadurch bestimmt, dass man den Wert des Quotienten $\frac{\sin (L_1 L)}{\sin (L_2 L)}$ angibt. Man bezeichnet denselben auch hier wieder durch das Symbol $(L_1 L_2 L)$ und nennt ihn das Theilverhältnis (Sinustheilverhältnis) des Elementes (L) in Bezug auf die beiden Strahlen (L_1) und (L_2), welche den Namen Grundstrahlen oder Fundamentalstrahlen führen, während (L) der Theilstrahl des durch die Strahlen (L_1) und (L_2) gebildeten Winkels $(L_1\ L_2)$ heißt. Für innere Theilstrahlen ist wieder dieses Theilverhältnis negativ, für äußere dagegen positiv, indem in dem ersten Fall die Winkel (L_1, L) und (L_2, L) entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, daher auch ihre sinusse, dagegen in dem zweiten Fall besagte Winkel einerlei Vorzeichen haben, ebenso ihre sinüsse. Das Theilverhältnis $(L_1 L_2 L)$ ist gleich null, wenn (L) mit (L_1) zusammenfällt; ist (L) mit (L_2) identisch, so wird $\frac{1}{(L_1 L_2 L)} = o$ und daher $(L_1 L_2 L) = \infty$; wird dagegen (L) zu einer inneren Winkelhalbierungslinie (H) des Winkels (L_1, L_2), so ist $(L_1 L_2 L) = (L_1 L_2 H) = -1$, weil $(L_1, H) = (H, L_2)$, also $(L_1 H) = -(L_2 H)$ erscheint. In dem speciellen Fall endlich, wo der Theilstrahl die äußere Winkelhalbierungslinie (H') ist, erhält man $(L_1 L_2 L) = (L_1 L_2 H') = +1$, denn dann ist

$$(L_1, L) = (L_1, H') = \frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}(L_1, L_2) \text{ und } (L_2, H') = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}(L_1 L_2),$$

folglich $(L_1 L_2 L) = \frac{\cos \frac{1}{2}(L_1, L_2)}{\cos \frac{1}{2}(L_1, L_2)} = +1.$

Um schließlich noch den Beweis zu erbringen, dass durch die Angabe des Abstandsverhältnisses $(L_1 L_2 L)$ der

Strahl (L), in Bezug auf die Strahlen (L_1) und (L_2) eindeutig bestimmt wird, bringe man diese drei Strahlen zum Schnitte mit einer Transversalen (T), d. i. mit einer nicht durch das Centrum J (Fig. 11) des Büschels gehenden Geraden, wodurch man die drei Punkte M_1, M_2 und M erhält, und nun läßt sich zeigen, dass zwischen den beiden Abstandsverhältnissen (M_1M_2M) und (L_1L_2L) die einfache Beziehung besteht

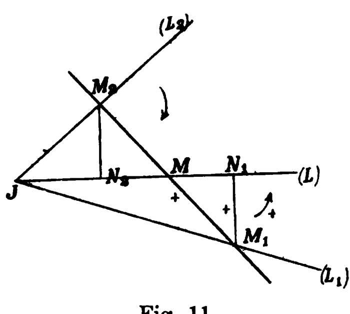


Fig. 11.

$$(88) \quad . \quad . \quad . \quad (M_1M_2M) = \frac{JM_1}{JM_2} \cdot (L_1L_2L).$$

Fällt man nämlich durch die Punkte M_1 und M_2 Senkrechte auf den Strahl (L) und nennt N_1 und N_2 die Fußpunkte derselben, so wird, sobald man die Strecke N_1M_1 positiv, mithin jene N_2M_2 negativ; ferner den Winkel (L_1, L) positiv, den anderen (L_2, L) demnach negativ annimmt

$$\frac{N_1M_1}{N_2M_2} = \frac{M_1M}{M_2M} \quad \text{und} \quad \frac{N_1M_1}{N_2M_2} = \frac{JM_1 \cdot \sin\,(L_1,\ L)}{JM_2\ \sin\,(L_2,\ L)},$$

woraus sich in der That ergibt

$$\frac{M_1M}{M_2M} = \frac{JM_1}{JM_2} \cdot \frac{\sin\,(L_1,\ L)}{\sin\,(L_2,\ L)},$$

übereinstimmend mit Gl. (88). Legt man die Transversale (T) der Art, dass die Punkte M_1 und M_2 gleichweit von J abstehen, so wird $JM_1 = JM_2$ und übergeht dadurch die Gleichung (88) in

$$(89) \quad . \quad . \quad . \quad (M_1M_2M) = (L_1L_2L).$$

Nun entspricht aber, wie bereits gezeigt wurde, jedem Werte von (M_1M_2M) nur ein Punkt M und jedem Punkte M nur ein durch den Punkt J gehender Strahl (L) und daher entspricht auch jedem Werte von (L_1L_2L) auch nur ein Strahl des Büschels. Es ist klar, dass unter der Annahme $JM_1 = JM_2$, die innere Winkelhalbierungslinie (H) des Winkels $(L_1,\ L_2)$

die Strecke $M_1 M_2$ halbiert, dagegen die äußere (H') zur Geraden $M_1 M_2$ oder (T) parallel gerichtet ist.

§ 16. Coordinaten und Gleichung eines Theilpunktes.

Ich nenne die Projectionen der drei in einer und derselben Geraden liegenden Punkte M_1, M_2 und M auf die Abscissenachse des hier wieder vorausgesetzten rechtwinkeligen Coordinatensystems P_1, P_2 und P; x_1, y_1; x_2, y_2 und x, y die Coordinaten der drei ersten Punkte und endlich λ das Abstandsverhältnis $(M_1 M_2 M)$. Dann ist offenbar nach den Elementen der Planimetrie $\frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{M_1 M}{M_2 M} = \lambda$ und hieraus folgt, weil ja $P_1 P = x - x_1$ und $P_2 P = x - x_2$ ist, $\frac{x - x_1}{x - x_2} = \lambda$, mithin $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$. Nun wird aber die Ordinate y des Punktes M in derselben Weise bestimmt, weshalb zur Berechnung der Coordinaten x, y des Punktes M aus den Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2 und seinem Abstandsverhältnisse $\lambda = (M_1 M_2 M)$ die Gleichungen dienen:

$$(90) \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda};$$

es ist demnach klar, dass auch die Coordinaten

$$(91) \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}, \quad y = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2}$$

einen in der Verbindungsgeraden der Punkte M_1 und M_2 liegenden Punkt M fixieren, jedoch vom Abstandsverhältnisse $(M_1 M_2 M) = -\frac{k_2}{k_1}$, sobald eben k_1 und k_2 constant sind.

Nachdem man die Coordinaten des Theilpunktes M bestimmt hat, lässt sich nun auch leicht seine Gleichung herleiten. Die Gleichung des Theilpunktes M in der Normalform (§ 10) lautet nämlich $m \equiv xu + yv + 1 = o$ oder, wenn man hierin für x und y die in (90) gegebenen Werte substituiert:

$$m \equiv \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \cdot u + \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} v + 1 = o.$$

Multipliciert man noch diese Gleichung mit dem Factor $(1 - \lambda)$, so erhält man die Gleichung des Theilpunktes in der Form

$$M \equiv (x_1 u + y_1 v + 1) - \lambda\,(x_2 u + y_2 v + 1) = o,$$

wofür man aber kürzer schreiben kann

$$(92) \quad . \; . \; . \quad M \equiv m_1 - \lambda \,.\, m_2 = o,$$

sobald m_i definiert erscheint durch $m_i = x_i u + y_i v + 1$. Sind daher $m_i \equiv x_i u + y_i v + 1 = o$, $i = 1,2$, die Gleichungen der beiden Grundpunkte M_1 und M_2 in der Normalform, so repräsentiert (92) die Gleichung des Theilpunktes M vom Abstandsverhältnisse $(M_1 M_2 M) = \lambda$, diese Gleichung aber nicht in der Normalform verstanden und es ist klar, dass auch

$$(93) \quad . \; . \; . \quad M \equiv k_1 m_1 + k_2 m_2 = o$$

einen solchen Punkt darstellt, jedoch vom Abstandsverhältnisse $(M_1 M_2 M) = -\dfrac{k_2}{k_1}$. Hierbei natürlich immer vorausgesetzt, dass k_1 und k_2 constante Parameter sind. Von selbst drängt sich nun die Frage heran, wie groß ist das Abstandsverhältnis des durch die Gleichung

$$(94) \quad . \; . \; . \quad M \equiv k_1 M_1 + k_2 M_2 = o$$

gegebenen Punktes, wenn $M_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o$, $i = 1,2$, die Gleichungen der beiden Grundpunkte darstellen. Behufs Beantwortung dieser Frage haben wir blos (94) auf die Form (93) zu überführen und erinnern zu diesem Zwecke an die bereits in § 10 gegebene Beziehung $\varrho_i M_i = m_i$, $\varrho_i = \dfrac{1}{C_i}$, woraus sofort folgt $M_i = \dfrac{m_i}{\varrho_i}$ und mithin Gleichung (94) auch in der Form gegeben werden kann

$$M \equiv \frac{k_1}{\varrho_1} \,.\, m_1 + \frac{k_2}{\varrho_2} m_2 = o.$$

Das Abstandsverhältnis des durch die Gleichung (94) bestimmten Punktes M, bezüglich der Punkte $M_1 = o$ und $M_2 = o$ als Grundpunkte, ist deshalb

$$(95) \quad . \; . \; . \quad (M_1 M_2 M) = -\left(\frac{k_2}{\varrho_2} : \frac{k_1}{\varrho_1}\right) = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{k_2}{k_1},$$

wenn noch $\varrho_1 = \frac{1}{C_1}$ und $\varrho_2 = \frac{1}{C_2}$, folglich $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{C_2}{C_1}$ gesetzt wird. Für den Mittelpunkt $M_{1,2}$ der Strecke $M_1 M_2$ ist $\lambda = -1$; für den unendlich fernen Punkt M_∞ der durch die beiden Punkte M_1 und M_2 bestimmten Geraden aber $\lambda = +1$ und daher sind nach (92)

(95a) . . . $M_{1,2} \equiv m_1 + m_2 = o, \quad M_\infty \equiv m_1 - m_2 = o$

die Gleichungen dieser beiden Punkte.

§ 17. Coordinaten und Gleichung eines Theilstrahls.

Hier erscheint es geboten, vorerst die Gleichung eines Theilstrahls aus dem Abstandsverhältnisse $\lambda = (L_1 L_2 L)$ und den Gleichungen der beiden Grundstrahlen (L_1) und (L_2) zu bestimmen, woraus dann sehr leicht dessen Coordinaten selber folgen. Es seien zu diesem Ende x, y die Coordinaten irgend eines dem Theilstrahl (L) angehörigen Punktes M (Fig. 12) und werde noch angenommen, dass der Anfangspunkt O des Coordinatensystems außerhalb des von den beiden Grundstrahlen (L_1) und (L_2) gebildeten Winkels $(L_1 L_2)$ zu liegen kommt. Dann ist,

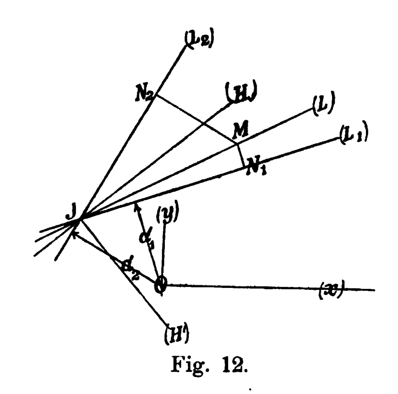


Fig. 12.

wenn N_1 und N_2 die Fußpunkte der von M auf die Grundstrahlen (L_1) und (L_2) gefällten Senkrechten und $l_i \equiv x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i + d_i = o$, $i = 1,2$, die Gleichungen dieser Grundstrahlen in der Hesse'schen Normalform darstellen, unter der oben ausgesprochenen Bedeutung von x und y

(a) . . . $N_1 M = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 + d_1, \quad N_2 M = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 + d_2$

und erscheint bei dem in der Figur angegebenen Fall, unter Hinweis auf § 12, Aufgabe a, die Strecke $N_1 M$ negativ, jene $N_2 M$ aber positiv. Aus den Elementen der Trigonometrie folgt aber anderseits

$(b) \ldots \quad N_1M = - JM \,.\, \sin(L_1 L), \qquad N_2M = - JM \sin(L_2, L),$

wenn der Winkel (L_1, L) positiv, also jener (L_2, L) negativ angenommen wird. Zufolge der Gleichungen (a) und (b) erhält man nun

$$\frac{x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 + d_1}{x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 + d_2} = \frac{\sin(L_1, L)}{\sin(L_2, L)}$$

und hieraus, weil ja $\frac{\sin(L_1, L)}{\sin(L_2, L)} = \lambda$ das Abstandsverhältnis von (L), bezüglich (L_1) und (L_2) repräsentiert und obige Beziehung zwischen x und y für einen jeden Punkt von (L) Giltigkeit hat,

$$(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 + d_1) - \lambda \,.\, (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 + d) = o$$

als Gleichung des Theilstrahls (L) und gelangt so zu dem Schlusse: Sind $l_i \equiv x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i + d_i = o$, $i = 1, 2$, die Gleichungen der beiden Grundstrahlen in der Hesse'schen Normalform, während $\lambda = (L_1 L_2 L)$ das Abstandsverhältnis des durch den Schnittpunkt der Grundstrahlen gehenden Strahls (L) bezüglich der ersteren angibt, so lautet die Gleichung des letzteren:

$$(96) \ldots \quad L \equiv l_1 - \lambda\, l_2 = o,$$

dabei ausdrücklich vorausgesetzt, dass der Ursprung des Coordinatensystems außerhalb des Winkels (L_1, L_2) liegt. Es ist klar, dass das Abstandsverhältnis des durch die Gleichung

$$(97) \ldots \quad L \equiv k_1 l_1 + k_2 l_2 = o$$

gegebenen Strahls, in welcher k_1 und k_2 constant sind, gleich $(L_1 L_2 L) = -\frac{k_2}{k_1}$ ist. Um nun auch das Abstandsverhältnis des Theilstrahls

$$(98) \ldots \quad L \equiv k_1 L_1 + k_2 L_2 = o$$

zu bestimmen, wenn $L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o$, $i = 1,2$, die Gleichungen der beiden Grundstrahlen versinnlichen, ersetze man L_i nach § 9 durch sein Äquivalent $\frac{l_i}{\varrho_i}$, $\varrho_i = \frac{1}{\pm\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}$, und erhält dann aus der obigen Gleichung

$$L = \frac{k_1}{\varrho_1} \,.\, l_1 + \frac{k_2}{\varrho_2} \,.\, l_2 = o$$

und hieraus ersieht man, dass das gesuchte Abstandsverhältnis

$$(99) \quad . \quad . \quad . \quad (L_1 L_2 L) = -\left(\frac{k_2}{\varrho_2} : \frac{k_1}{\varrho_1}\right) = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

ist. Für die innere Winkelhalbierungslinie (H) des durch die beiden Strahlen (L_1) und (L_2) gebildeten Winkels ist $\lambda = -1$ (§ 15), für die äußere (H') aber $\lambda = +1$ und lauten demnach die Gleichungen dieser Strahlen

$$(100) \quad . \quad . \quad . \quad H \equiv l_1 + l_2 = o, \qquad H' \equiv l_1 - l_2 = o.$$

Hierbei sei noch hervorgehoben, dass man unter der inneren Winkelhalbierungslinie (H) diejenige versteht, welche denjenigen von den beiden Strahlen (L_1) und (L_2) gebildeten Winkel halbiert, in welchem der Ursprung O des Coordinatensystems nicht zu liegen kommt, während die andere Winkelhalbierungslinie die äußere mit (H') bezeichnete ist.

Übergehend auf die Coordinaten eines Theilstrahls, bestimme man die Beziehung des durch die Coordinaten

$$(101) \quad . \quad . \quad . \quad u = \frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda}, \qquad v = \frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda}$$

gegebenen Strahls (L) zu jenen beiden Strahlen (L_1) und (L_2), deren Coordinaten u_1, v_1 und u_2, v_2 sind. Nach § 9 lauten nun die Gleichungen von (L_1) und (L_2)

$$(c) \quad . \quad . \quad . \quad L_1 \equiv u_1 x + v_1 y + 1 = 0,$$
$$L_2 \equiv u_2 x + v_2 y + 1 = 0;$$

dagegen ist die Gleichung des Strahls (L)

$$L \equiv \frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda} x + \frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda} y + 1 = 0$$

oder, wenn man die letzte Gleichung noch mit dem Factor $(1 - \lambda)$ multipliciert und wieder die abgekürzte Bezeichnung $L_i = u_i x + v_i y + 1$ in Anwendung bringt

$$(d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L \equiv L_1 - \lambda \, . \, L_2 = o.$$

Die letzte Form der Gleichung des Strahls (L) zeigt aber (§ 14), dass der durch die in (101) angegebenen Coordinaten bestimmte Strahl (L) durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen (L_1) und (L_2) geht. Nun wird aber die Gleichung $L_i \equiv u_i x + v_i y + 1 = 0$ nach § 9 dadurch auf die Hesse'sche Normalform gebracht, dass man sie mit d_i multipliciert, wenn d_i die Normaldistanz des Strahls (L_i) vom

Ursprunge angibt; es ist sonach in unserem Fall $\varrho_1 = d_1$ und $\varrho_2 = d_2$, demnach zufolge der früher gefundenen Gleichung (99) das Abstandsverhältnis des Strahls (L) gleich

$$(102) \quad . \; . \; . \; . \quad (L_1 L_2 L) = \lambda \frac{d_1}{d_2}$$

und gelangt man daher schliesslich zur Erkenntnis, dass die Coordinaten

$$(103) \quad . \; . \; . \quad u = \frac{k_1 u_1 + k_2 u_2}{k_1 + k_2}, \qquad v = \frac{k_1 v_1 + k_2 v_2}{k_1 + k_2}$$

einen Strahl (L) bestimmen, welcher durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen von den Coordinaten $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$ geht und dessen Abstandsverhältnis

$$(104) \quad . \; . \; . \quad (L_1 L_2 L) = -\frac{k_2}{k_1} \frac{d_1}{d_2}$$

wird, wenn d_1 und d_2 die Normaldistanzen der Strahlen (L_1) und (L_2) vom Ursprunge des rechtwinkeligen Coordinatensystems angeben.

§ 18. **Doppelverhältnis.**

Sind M_1, M_2, M_3 und M_4 vier Punkte einer Geraden, so nennt man nach Steiner und Chasles den Quotienten

$$\frac{M_1 M_3}{M_2 M_3} : \frac{M_1 M_4}{M_2 M_4}$$

das Doppelverhältnis oder anharmonische Verhältnis der vier Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 und bezeichnet dasselbe durch das Symbol $(M_1 M_2 M_3 M_4)$, welches mithin definiert ist durch:

$$(105) \quad . \; . \; . \quad (M_1 M_2 M_3 M_4) = (M_1 M_2 M_3) : (M_1 M_2 M_4).$$

Ist das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 M_3 M_4) = -1$, so

Sind (L_1), (L_2), $L_3)$ und (L_4) vier Strahlen aus einem Punkte, so nennt man nach Steiner und Chasles den Quotienten

$$\frac{\sin (L_1, L_3)}{\sin (L_2, L_3)} : \frac{\sin (L_1, L_4)}{\sin (L_2, L_4)}$$

das Doppelverhältnis oder anharmonische Verhältnis der vier Strahlen (L_1), (L_2), (L_3) und (L_4) und bezeichnet dasselbe durch das Symbol $(L_1 L_2 L_3 L_4)$, welches mithin definiert ist durch:

$$(L_1 L_2 L_3 L_4) = (L_1 L_2 L_3) : (L_1 L_2 L_4). \quad . \; . \; . \quad (106)$$

Ist das Doppelverhältnis $(L_1 L_2 L_3 L_4) = -1$, so

bilden die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 eine harmonische Punktreihe oder es repräsentieren M_1, M_2 und M_3, M_4 zwei harmonische Punktpaare. Das Doppelverhältnis selbst wird dann ein harmonisches genannt.

bilden die vier Strahlen (L_1), (L_2), (L_3) und (L_4) einen harmonischen Strahlenbüschel oder es repräsentieren (L_1), (L_2) und (L_3), (L_4) zwei harmonische Strahlenpaare. Das Doppelverhältnis selbst wird dann ein harmonisches genannt

Wird das Doppelverhältnis der vier Elemente M_i oder (L_i) gleich Null, so fällt das dritte Element mit dem ersten oder das vierte mit dem zweiten zusammen; erscheint dieses Doppelverhältnis unendlich groß, so ist entweder das dritte mit dem zweiten oder das vierte mit dem ersten Elemente identisch. In dem Fall endlich, wo das Doppelverhältnis gleich $+1$ ist, sind das dritte und vierte Element identisch.

Das Doppelverhältnis von vier Punkten M_i oder vier Strahlen (L_i) — $i - 1, 2, 3, 4$ — kann sofort bestimmt werden, sobald man deren Coordinaten oder Gleichungen kennt; denn sind z. B.

$x_1, y_1; x_2, y_2; x_3 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$, $y_3 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$ und $x_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1-\mu}$, $y_4 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1-\mu}$ die Coordinaten der vier Elemente M_i — $i = 1, 2, 3, 4$ —, so ist nach § 16 offenbar $(M_1 M_2 M_3) = \lambda$ und $(M_1 M_2 M_4) = \mu$,

$u_1, v_1; u_2, v_2; u_3 = \frac{u_1 - \lambda u_2}{1-\lambda}$, $v_3 = \frac{v_1 - \lambda v_2}{1-\lambda}$ und $u_4 = \frac{u_1 - \mu u_2}{1-\mu}$, $v_3 = \frac{v_1 - \mu v_2}{1-\mu}$ die Coordinaten der vier Elemente (L_i) — $i = 1, 2, 3, 4$ —, so ist nach § 17 offenbar

$$(L_1 L_2 L_3) = \lambda \frac{d_1}{d_2} \text{ und}$$

$$(L_1 L_2 L_4) = \mu \frac{d_1}{d_2},$$

mithin das Doppelverhältnis

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda}{\mu} \qquad\qquad (L_1 L_2 L_3 L_4) = \frac{\lambda}{\mu}$$

und, in analoger Weise kann man sagen, sind:

$M_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o$, $M_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 = o$, $M_3 \equiv M_1 - \lambda M_2 = o$ und $M_4 \equiv M_1 - \mu M_2 = o$ die Gleichungen der vier Elemente M_i, so ist nach § 16 $(M_1 M_2 M_3) = \lambda \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ und $(M_1 M_2 M_4) = \mu \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$,

$L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$, $L_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$, $L_3 \equiv L_1 - \lambda L_2 = o$ und $L_4 \equiv L_1 - \mu L_2 = o$ die Gleichungen der vier Elemente (L_i), so ist nach § 17 $(L_1 L_2 L_3) = \lambda \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ und $(L_1 L_2 L_4) = \mu \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$,

demnach das zu suchende Doppelverhältnis

$$(107) \quad . \quad . \quad (M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda}{\mu}. \quad \Big| \quad (L_1 L_2 L_3 L_4) = \frac{\lambda}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Wir werden nun, mit Rücksicht auf die später vorkommenden Sätze und Aufgaben, das Doppelverhältnis der vier Punkte M_i oder vier Strahlen (L_i) unter der Annahme berechnen, dass deren Coordinaten sind:

$$(109) \quad . \quad . \quad x_i = \frac{x' - \lambda_i x''}{1 - \lambda_i}, \quad y_i = \frac{y' - \lambda_i y''}{1 - \lambda_i}, \quad \Big| \quad u_i = \frac{u' - \lambda_i u''}{1 - \lambda_i}, \quad v_i = \frac{v' - \lambda_i v''}{1 - \lambda_i}, \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

oder, deren Gleichungen lauten:

$$(111) \quad . \quad M_i \equiv M' - \lambda_i M'' = o, \quad \Big| \quad L_i \equiv L' - \lambda_i L'' = o, \quad . \quad (112)$$

wenn noch $i = 1, 2, 3, 4$; x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier Punkte M' und M'' des Trägers der vier Punkte M_i, $M' = o$ und $M'' = o$ deren Gleichungen; u', v' und u'', v'' die Coordinaten zweier Strahlen (L') und (L''), gelegt durch den Träger der vier Strahlen (L_i), $L' = o$ und und $L'' = o$ deren Gleichungen repräsentieren. Um diese Aufgabe zu lösen, führen wir vorliegenden Fall auf den früheren zurück, trachten also die Gleichungen der beiden letzten Elemente aus jenen der beiden ersten abzuleiten, was dadurch geschieht, dass wir aus

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad M' - \lambda_1 M'' = M_1, \quad M' - \lambda_2 M'' = M_2$$

die Symbole M' und M'' bestimmen und diese Werte in die Gleichungen

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad M' - \lambda_3 M'' = o, \quad M' - \lambda_4 M'' = o$$

einführen. Man findet nun aus den Gleichungen (a), sobald man diese nach M' und M'' auflöst,

$$M' = \frac{\lambda_2 M_1 - \lambda_1 M_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad M'' = \frac{M_1 - M_2}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

und durch Substitution dieser Werte von M' und M'' in die Gleichungen (b) gehen dieselben über in

$$(c) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_3) M_1 - (\lambda_1 - \lambda_3) M_2 &= o \\ (\lambda_2 - \lambda_4) M_1 - (\lambda_1 - \lambda_4) M_2 &= o. \end{aligned}$$

Die durch die Coordinaten (109) oder Gleichungen (111) gegebenen vier Punkte M_i sind also auch bestimmt durch die nachfolgenden vier Gleichungen, u. zw.

$$(d) \quad . \quad M_1 = o, \quad M_2 = o, \quad M_3 \equiv M_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} M_2 = o,$$

$$M_4 \equiv M_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} M_2 = o$$

und aus diesen und der früheren Gleichung (107) ersieht man nun, weil ja ganz dieselbe Betrachtung auch für die vier Strahlen (L_i) angestellt werden kann, dass das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 M_3 M_4)$ der durch die Coordinaten (109) oder Gleichungen (111) bestimmten vier Punkte M_i, sowie das Doppelverhältnis $(L_1 L_2 L_3 L_4)$ der durch die Coordinaten (110) oder Gleichungen (112) gegebenen vier Strahlen (L_i) gleich ist $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$, und treten somit die beiden Gleichungen in Kraft:

$$(113) \quad . \quad . \quad (M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4},$$

$$(L_1 L_2 L_3 L_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}, \quad . \quad . \quad (114)$$

welche die gestellte Aufgabe lösen.

Das Doppelverhältnis der vier Elemente 1, 2, 3, 4, unter welchen vier Punkte einer Punktreihe oder vier Strahlen eines Strahlenbüschels verstanden sind, hängt von der Anordnung dieser vier Elemente ab, und man findet aus den obigen Gleichungen (113) und (114):

$$(115)\ldots\quad\begin{aligned}
&(1234)=(2143)=(3412)=(4321)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
&\qquad=K,\\
&(1243)=(2134)=(4312)=(3421)=\frac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}\\
&\qquad=K_1=\frac{1}{K},\\
&(1324)=(3142)=(2413)=(4231)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_2)}\\
&\qquad=K_2=1-K,\\
&(1342)=(3124)=(4213)=(2431)=\frac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}\\
&\qquad=K_3=\frac{1}{1-K},\\
&(1423)=(4132)=(2314)=(3241)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)}\\
&\qquad=K_4=\frac{K-1}{K},\\
&(1432)=(4123)=(3214)=(2341)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}\\
&\qquad=K_5=\frac{K}{K-1}.
\end{aligned}$$

Aus vier Punkten einer Punktreihe oder vier Strahlen eines Strahlenbüschels kann man demnach sechs von einander verschiedene Doppelverhältnisse bilden, und nennt man den Wert eines derselben K, so sind die Werte dieser sechs Doppelverhältnisse:

$$(e)\ \ldots\ K,\quad \frac{1}{K},\quad 1-K,\quad \frac{1}{1-K},\quad \frac{K-1}{K},\quad \frac{K}{K-1}.$$

Diese Werte sind nun im allgemeinen von einander verschieden und bilden drei reciproke und drei complementäre Paare; doch können besondere Fälle eintreten, wo einige obiger Werte einander gleich werden. So sind z. B. für

$K=1,\quad K_1=1,\quad K_2=0,\ K_3=\infty,\ K_4=0,\ K_5=\infty;$

ferner für

$K=-1,\ K_1=-1,\ K_2=2,\ K_3=\frac{1}{2},\ K_4=2,\ K_5=\frac{1}{2}$

und es tritt, wie bereits gesagt wurde, der Fall $K=1$ dann ein, wenn das dritte und vierte Element identisch, dagegen jener $K=-1$, sobald die vier Elemente harmonisch sind.

Die Werte K, $\frac{1}{1-K}$ und $\frac{K-1}{K}$, die zu einander weder reciprok, noch complementär sind, heißen die drei Fundamentaldoppelverhältnisse der vier Punkte der Punktreihe oder vier Strahlen des Büschels. Sind von denselben je zwei einander gleich, so sind es auch alle drei und man findet leicht, dass die Bedingung

$$(f) \quad \ldots \quad K = \frac{1}{1-K} = \frac{K-1}{K}$$

für solche Werte von K erfüllt ist, die der Gleichung genügen

$$(g) \quad \ldots \quad K^2 - K + 1 = 0,$$

und aus dieser erhält man

$$K = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Setzt man nun $K = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, so wird aber dafür, wie eine einfache Rechnung sofort zeigt,

$$(h) \quad \ldots \quad \frac{1}{K} = 1 - K = \frac{K}{K-1} = \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}.$$

Nun sind aber $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ die beiden imaginären Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + 1 = 0$ und kann man sonach, weil eine derartige vierpunktige Reihe oder ein solcher vierstrahliger Büschel nach Cremona ein äquianharmonisches System heißt, den Satz aussprechen: Bilden vier Punkte einer Reihe oder vier Strahlen eines Büschels ein äquianharmonisches System, so sind die einen drei der in (e) angegebenen Doppelverhältnisse gleich der einen, die drei übrigen aber gleich der anderen imaginären Cubikwurzel aus der negativen Einheit.

Ist der Wert des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Reihe oder vier Strahlen eines Büschels bekannt und erscheinen von diesen vier Elementen drei gegeben, so ist auch das vierte Element eindeutig bestimmt. Denn sind z. B. M_1, M_2 und M_3 die drei gegebenen Elemente und ist $K = (M_1 M_2 M_3 M_4)$ das ebenfalls bekannte Doppelverhältnis derselben, dagegen M_4 das durch K bestimmt sein sollende Element,

so folgt aus der bekannten Gleichung $\frac{(M_1 M_2 M_3)}{(M_1 M_2 M_4)} = K$

$$(M_1 M_2 M_4) = \frac{(M_1 M_2 M_3)}{K}$$

und diese Gleichung bestimmt das Abstandsverhältnis des Elementes M_4, bezüglich M_1 und M_2 als Grundelemente. Man kann somit das Doppelverhältnis gleichfalls als einen Parameter einführen, der ebenso zur eindeutigen Bestimmung eines Elementes dient, wie das Abstandsverhältnis. Dies stimmt übrigens auch mit der Thatsache überein, dass das Abstandsverhältnis in dem Doppelverhältnisse enthalten ist. Nimmt man nämlich an, es sei der vierte Punkt M_4 der unendlich ferne Punkt der Geraden $M_1 M_2$ oder der vierte Strahl (L_4) die äußere Winkelhalbierungslinie des von den Strahlen (L_1) und (L_2) gebildeten Winkels, so ist $(M_1 M_2 M_4) = 1$ und $(L_1 L_2 L_4) = 1$, somit $(M_1 M_2 M_3) = (M_1 M_2 M_3 M_4)$ und $(L_1 L_2 L_3) = (L_1 L_2 L_3 L_4)$.

Satz. Legt man durch eine vierpunktige Reihe einen Strahlenbüschel, so ist das Doppelverhältnis des Büschels gleich jenem der Reihe (Pappus).

Beweis. Die Coordinaten der vier Elemente M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, der Punktreihe seien wieder x_1, y_1; x_2, y_2; $x_3 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$,

$$y_3 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda};$$

$$x_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1-\mu},$$

$$y_4 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1-\mu},$$

während x_0, y_0 diejenigen des Centrums M_0 des durch diese

Satz. Bringt man einen aus vier Strahlen bestehenden Büschel zum Schnitte mit einer Transversalen, so erhält man eine vierpunktige Reihe vom Doppelverhältnisse gleich jenem des Büschels (Pappus).

Beweis. Die Coordinaten der vier Elemente (L_i), $i = 1, 2, 3, 4$, des Strahlenbüschels seien wieder u_1, v_1; u_2, v_2; $u_3 = \frac{u_1 - \lambda u_2}{1-\lambda}$,

$$v_3 = \frac{v_1 - \lambda v_2}{1-\lambda};$$

$$u_4 = \frac{u_1 - \mu u_2}{1-\mu},$$

$$v_4 = \frac{v_1 - \mu v_2}{1-\mu},$$

während u_0, v_0 diejenigen der Transversalen (T_0) bedeuten,

vier Punkte gelegten Büschels M_0 angeben. Die Gleichungen der vier Elemente (L_i) des letzteren sind demnach: (Siehe Gl. 29).

$$L_1 \equiv \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

$$L_2 \equiv \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

$$L_3 \equiv \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ \frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}, & \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

$$L_4 \equiv \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ \frac{x_1-\mu x_2}{1-\mu}, & \frac{y_1-\mu y_2}{1-\mu}, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

welche mit dem Büschel zum Schnitte gebracht wird. Die Gleichungen der vier Schnittpunkte M_i sind folglich: (Siehe Gl. 44).

$$M_1 \equiv \begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_0, & v_0, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

$$M_2 \equiv \begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_0, & v_0, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

$$M_3 \equiv \begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_0, & v_0, & 1 \\ \frac{u_1-\lambda u_2}{1-\lambda}, & \frac{v_1-\lambda v_2}{1-\lambda}, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

$$M_4 \equiv \begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_0, & v_0, & 1 \\ \frac{u_1-\mu u_2}{1-\mu}, & \frac{v_1-\mu v_2}{1-\mu}, & 1 \end{vmatrix} = o.$$

oder

$$(i) \;.\;.\;.\; L_1 = o,\; L_2 = o,\quad L_3 \equiv L_1 - \lambda L_2 = o,\quad L_4 \equiv L_1 - \mu L_2 = o.$$

$$M_1 = o,\; M_2 = o,\quad M_3 \equiv M_1 - \lambda M_2 = o,\quad M_4 \equiv M_1 - \mu M_2 = o. \;.\; (k)$$

Nun bestimmen aber nach Gl. (107) die angegebenen Coordinaten vier Punkte einer Reihe vom Doppelverhältnisse $(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda}{\mu}$, während die Gleichungen (i) vier Strahlen eines Büschels vom Doppelverhältnisse

$$(L_1\, L_2\, L_3\, L_4) = \frac{\lambda}{\mu}$$

Die obigen Coordinaten geben aber nach Gl. (108) vier Strahlen eines Büschels an vom Doppelverhältnisse $(L_1\, L_2\, L_3\, L_4) = \frac{\lambda}{\mu}$, während die Gleichungen (k) vier Punkte einer Reihe vom Doppelverhältnisse

$$(M_1\, M_2\, M_3\, M_4) = \frac{\lambda}{\mu}$$

fixieren; es ist daher in der That

$$(L_1 L_2 L_3 L_4) = (M_1 M_2 M_3 M_4),$$

was zu beweisen war.

Diese wichtigen Sätze rühren von Pappus her und bilden die Grundlage der projectivischen Geometrie in der Ebene. Bringt man somit (Fig. 13) den aus vier Strahlen (L_i) bestehenden Büschel zum Schnitte mit den beiden Transversalen (T) und (T^1), so erhält man zwei vierpunktige Reihen M_i und $M_i' - i = 1, 2, 3, 4$ — und es ist nach dem Satze von Pappus $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (L_1 L_2 L_3 L_4)$ und $(M_1' M_2' M_3' M_4') = (L_1 L_2 L_3 L_4)$, mithin $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M_1' M_2' M_3' M_4')$. Legt man dagegen durch die vierpunktige Reihe M_i einen zweiten vierstrahligen Büschel (L_i'), so ist nach demselben Satze $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (L_1' L_2' L_3' L_4')$ und mithin, wegen der früheren Gleichung $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (L_1 L_2 L_3 L_4)$, auch $(L_1 L_2 L_3 L_4) = (L_1' L_2' L_3' L_4')$, weshalb man sonach zu den beiden Sätzen gelangt:

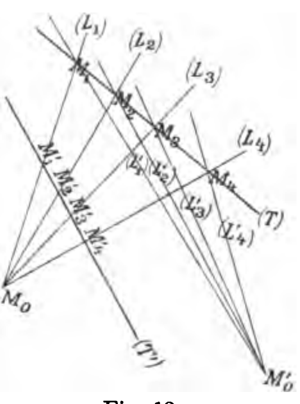


Fig. 13.

Haben zwei aus je vier Punkten M_i und $M_i' - i = 1, 2, 3, 4$ — bestehende Reihen eine solche gegenseitige Lage, dass die Verbindungsgeraden $M_i M_i'$ in einem und demselben Punkte sich durchschneiden, so besitzen diese beiden Reihen dasselbe Doppelverhältnis.

Haben zwei aus je vier Strahlen (L_i) und $(L_i' - i = 1, 2, 3, 4$ — bestehende Büschel eine solche gegenseitige Lage, dass die Schnittpunkte der Strahlen (L_i) und (L_i') in einer und derselben Geraden zu liegen kommen, so besitzen diese beiden Büschel dasselbe Doppelverhältnis.

Ebenso leicht findet man die Sätze:

Legt man durch eine harmonische Punktreihe einen Strahlenbüschel, so ist dieser harmonisch.

Bringt man einen harmonischen Strahlenbüschel zum Schnitte mit einer Transversalen, so ergibt sich eine harmonische Punktreihe.

Im Anschlusse mögen hier noch, der Vollständigkeit wegen, die beiden reciproken Sätze bewiesen werden:

Sind M_1, M_2, M_3 und M_4 vier Punkte einer Punktreihe, so besteht die Ret.

$$(116) \ldots M_1 M_2 . M_3 M_4 + M_2 M_3 . M_1 M_4 + M_3 M_1 . M_2 M_4 = o.$$

Sind $(L_1), (L_2), (L_3)$ und (L_4) vier Strahlen eines Strahlenbüschels, so besteht die Ret.

$$\sin(L_1 L_2) \sin(L_3 L_4) + \sin(L_2 L_3) \sin(L_1 L_4) + \sin(L_3 L_1) \sin(L_2 L_4) = o. \ldots (117)$$

Beweis. Der in Gl. (116) ausgesprochene Satz ist ein Ergebnis der drei Gleichungen

$$M_1 M_2 = M_1 M_4 + M_4 M_2,$$
$$M_2 M_3 = M_2 M_4 + M_4 M_3,$$
$$M_3 M_1 = M_3 M_4 + M_4 M_1;$$

denn multipliciert man dieselben der Reihe nach mit $M_3 M_4$, $M_1 M_4$ und $M_2 M_4$ und addiert sie hierauf, so erhält man unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Beziehung $M_i M_k = - M_k M_i$ die obige Gleichung (116). Letztere kann aber auch so geschrieben werden

$$\left(\frac{M_2 M_1}{M_3 M_1} : \frac{M_2 M_4}{M_3 M_4}\right) + \left(\frac{M_3 M_2}{M_4 M_2} : \frac{M_3 M_1}{M_4 M_1}\right) - 1 = o$$

und es ist daher nach dem Satze von Pappus, wenn $(L_1) \ldots\ldots (L_4)$ die vier Strahlen eines Büschels sind, die der Reihe nach durch die Punkte $M_1 \ldots\ldots M_4$ gehen,

$$\left(\frac{\sin(L_2, L_1)}{\sin(L_3, L_1)} : \frac{\sin(L_2, L_4)}{\sin(L_3, L_4)}\right) + \left(\frac{\sin(L_3, L_2)}{\sin(L_4, L_2)} : \frac{\sin(L_3, L_1)}{\sin(L_4, L_1)}\right) - 1 = o,$$

welche Relation zur Gleichung (117) führt, wenn man sie noch mit dem Producte $\sin(L_3, L_1) . \sin(L_2, L_4)$ multipliciert.

§ 19. Harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Sind M_1, M_2 und M, M' vier Punkte einer Punktreihe 1. Ord. und ist

$$(118) \ldots (M_1 M_2 M) = -(M_1 M_2 M'),$$

Sind $(L_1), (L_2)$ und (L), (L') vier Strahlen eines Strahlenbüsches 1. Ord. und ist

$$(L_1 L_2 L) = -(L_1 L_2 L') . (119),$$

so sagt man, die Punkte M und M' theilen die Strecke $M_1 M_2$ harmonisch.

so sagt man, die Strahlen (L) und (L') theilen den Winkel (L_1, L_2) harmonisch.

Die obige Gleichung (118), beziehungsweise (119), kann nach der Bedeutung der hier vorkommenden Symbole (Siehe § 15) auch so gegeben werden

$$\frac{M_1 M}{M_2 M} = -\frac{M_1 M'}{M_2 M'}, \qquad \frac{\sin(L_1, L)}{\sin(L_2, L)} = -\frac{\sin(L_1, L')}{\sin(L_2, L')}$$

oder

$$\frac{M M_1}{M M_2} = -\frac{M' M_1}{M' M_2} \qquad \frac{\sin(L, L_1)}{\sin(L, L_2)} = -\frac{\sin(L', L_1)}{\sin(L', L_2)}$$

und hieraus folgt

$$\frac{M M_1}{M' M_1} = -\frac{M M_2}{M' M_2}. \qquad \frac{\sin(L, L_1)}{\sin(L', L_1)} = -\frac{\sin(L, L_2)}{\sin(L', L_2)}.$$

Man gelangt sonach zu dem Satze:

Theilen die Punkte M und M' die Strecke $M_1 M_2$ harmonisch, so theilen auch umgekehrt die Punkte M_1 und M_2 die Strecke MM' harmonisch. Man nennt daher, sobald die Gl. (118) erfüllt erscheint, die Punkte M_1, M_2 und M, M' zwei harmonische Punktpaare oder auch eine harmonische Punktreihe.

Aus Gl. (118) erkennt man auch, dass M' ein äußerer Theilpunkt sein muss, sobald M zwischen M_1 und M_2 liegt und umgekehrt. Ebenso zeigt diese Gleichung, dass der Halbierungspunkt I der Strecke $M_1 M_2$ und der unendlich ferne Punkt M_∞ der Geraden, in welcher M_1 und M_2 liegen, die Strecke $M_1 M_2$ harmonisch

Theilen die Strahlen (L) und (L') den Winkel (L_1, L_2) harmonisch, so theilen auch umgekehrt die Strahlen (L_1) und (L_2) den Winkel (L, L') harmonisch. Man nennt daher, sobald die Gl. (119) erfüllt erscheint, die Strahlen (L_1), (L_2) und (L), (L') zwei harmonische Strahlenpaare oder auch einen harmonischen Strahlenbüschel.

Aus (Gl. 119) erkennt man auch, dass (L') ein äußerer Theilstrahl sein muss, sobald (L) ein innerer ist und umgekehrt. Ebenso zeigt diese Gleichung, dass die innere Winkelhalbierungslinie (H) und die äußere (H') den Winkel (L_1, L_2) harmonisch theilen und dass, sobald (L_2) rechts von (L_1)

theilen und dass, sobald M_2 rechts von M_1 liegt, M' rechts oder links von M_1 und M_2 zu liegen kommt, je nachdem M zwischen I und M_2 oder I und M_1 sich befindet. Je näher ferner M an M_1 — oder M_2 — liegt, desto mehr nähert sich M' dem Punkte M_1 — oder M_2. Fällt M mit M_1 — oder M_2 — zusammen, so geschieht auch ganz dasselbe mit M'. Sind endlich die drei Punkte M_1, M_2 und M gegeben, so ist auch der vierte Punkt M' eindeutig bestimmt.

Satz. Theilen M und M' die Strecke $M_1 M_2$ harmonisch und ist I der Mittelpunkt dieser Strecke, so besteht die Rel.:

$$(120) \quad . \; . \; IM . IM' = IM_2^2.$$

liegt, der Strahl (L') rechts oder links von den beiden Strahlen (L_1) und (L_2) zu liegen kommt, je nachdem (L) zwischen (H) und (L_2) oder zwischen (H) und (L_1) sich befindet. Je mehr ferner (L) an (L_1) — oder (L_2) — liegt, desto mehr nähert sich (L') dem Strahl (L_1) — oder (L_2). Fällt (L) mit (L_1) — oder (L_2) — zusammen, so geschieht auch ganz dasselbe mit (L'). Sind endlich die drei Strahlen (L_1), (L_2) und (L) gegeben, so ist auch der vierte Strahl (L') eindeutig bestimmt.

Satz. Theilen (L) und (L') den Winksl (L_1, L_2) harmonisch und ist (H) die innere Winkelhalbierungslinie von (L_1, L_2), so besteht die Ret.:

$$\operatorname{tg}(H, L) . \operatorname{tg}(H, L') = \operatorname{tg}^2(H, L_2) \quad . \; . \; . \; (121).$$

Beweis. Die erste dieser Gleichungen kann aus (118) hergeleitet werden, indem dieser Relation zufolge $\frac{M_1 M}{M_2 M} + \frac{M_1 M'}{M_2 M'} = o$, mithin

$$M_1 M . M_2 M' + M_2 M . M_1 M' = o$$

sein muss. Nun ist aber $M_1 M = IM + IM_2$, $M_2 M' = IM' - IM_2$, $M_2 M = IM - IM_2$, $M_1 M' = IM_2 + IM'$ und daher nach obiger Gleichung

$$(IM + IM_2)(IM' - IM_2) + (IM - IM_2)(IM_2 + IM') = o,$$

woraus in der That die Gl. (120) folgt. Legt man nun (Fig. 14) durch die Punkte M_1, M_2, M, M' und I den in der Figur verzeichneten Strahlenbüschel, in welchem

der Strahl (H) senkrecht steht auf dem Träger der Punktreihe, so ist nach den Elementen der Trigonometrie

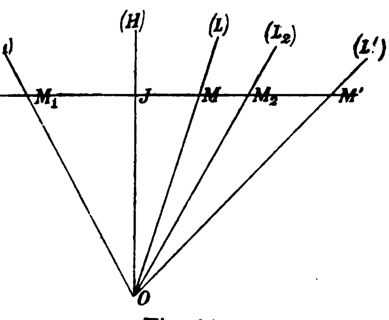


Fig. 14.

$$IM = OI.\mathrm{tg}\,(H, L),$$
$$IM' = OI.\mathrm{tg}\,(H, L'),$$
$$IM_2 = OI.\mathrm{tg}\,(H, L_2)$$

und durch die Elimination von IM, IM' und IM_2 aus (120) und den drei letzten Gleichungen ergibt sich dann (121).

Satz. Theilen M und M' die Strecke $M_1 M_2$ harmonisch und ist I der Mittelpunkt der letzteren, so besteht die Ret.:

$$(122) \ldots \frac{2}{M_1 M_2} = \frac{1}{M_1 M} + \frac{1}{M_1 M'}.$$

Satz. Theilen (L) und (L') den Winkel $(L_1 L_2)$ harmonisch und ist (H) die innere Winkelhalbierungslinie von (L_1, L_2), so ist

$$\frac{2}{\mathrm{tg}\,(L_1, L_2)} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,(L_1, L)} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,(L_1, L')}. \ldots (123)$$

Beweis. Beide Sätze ergeben sich leicht aus den früheren Gleichungen (118) und (119). Aus der ersten derselben, d. i. nämlich $\frac{M_1 M}{M_2 M} + \frac{M_1 M'}{M_2 M'} = o$, folgt zunächst

$$\frac{M_1 M}{M_1 M - M_1 M_2} + \frac{M_1 M'}{M_1 M' - M_1 M_2} = o$$

und hieraus durch Wegschaffung der Brüche

$$2 M_1 M . M_1 M' = M_1 M . M_1 M_2 + M_1 M' . M_1 M_2 ;$$

dividiert man noch beide Theile obiger Gleichung durch das Product $M_1 M . M_1 M' . M_1 M_2$, so erhält man die Gleichung (122) selbst. Anderseits ist, zufolge (119), die Summe $\frac{\sin (L_1, L)}{\sin (L_2, L)} + \frac{\sin (L_1, L')}{\sin (L_2, L')} = o$ und daher, wie ein Blick auf Fig. 14 zeigt,

$$\frac{\sin (L_1, L)}{\sin [(L_1, L) - (L_1, L_2)]} + \frac{\sin (L_1, L')}{\sin [(L_1, L') - (L_1, L_2)]} = o,$$

woraus sich, sobald man die Brüche wegschafft und schließlich die Gleichung durch das Product $\sin(L_1, L) . \sin(L_1, L')$ $\sin(L_1, L_2)$ dividiert, die Gleichung (123) ergibt.

Es unterliegt nun auch keinem Anstande, die Coordinaten und Gleichungen von zwei harmonischen Punktpaaren oder Strahlenpaaren anzugeben und man erkennt, dass nach § 16 und § 17

$$x_1, y_1; x_2, y_2, x = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}, \quad y = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2}, \quad x' = \frac{k_1 x_1 - k_2 x_2}{k_1 - k_2}, \quad y' = \frac{k_1 y_1 - k_2 y_2}{k_1 - k_2}$$

$$u_1, v_1; u_2, v_2, u = \frac{k_1 u_1 + k_2 u_2}{k_1 + k_2}, \quad v = \frac{k_1 v_1 + k_2 v_2}{k_1 + k_2}, \quad u' = \frac{k_1 u_1 - k_2 u_2}{k_1 - k_2}, \quad v' = \frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2}$$

die Coordinaten;

$$M_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o, \quad M_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 = o, \quad M \equiv k_1 M_1 + k_2 M_2 = o, \quad M' \equiv k_1 M_1 - k_2 M_2 = o$$

$$L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o, \quad L_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o, \quad L \equiv k_1 L_1 + k_2 L_2 = o, \quad L' \equiv k_1 L_1 - k_2 L_2 = o$$

die Gleichungen von zwei harmonischen Punktpaaren, M_1, M_2 und M, M', beziehungsweise Strahlenpaaren (L_1), (L_2) und (L), (L'), angeben, u. zw. für jedes Wertesystem von k_1 und k_2, und sei gleichzeitig noch bemerkt, dass man in den obigen Formeln überall $k_1 = +1$ und $k_2 = -\lambda$ setzen kann.

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung des Pols einer Geraden (L') von den Coordinaten u', v' in Bezug auf die beiden Punkte $M_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o$ und $M_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C = o$.

Lösung. Die Gerade (L') durchschneidet den Träger der beiden Punkte M_1 und M_2 in einem Punkte M und man nennt aus Gründen,

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung der Polaren eines Punktes M' von den Coordinaten x', y' in Bezug auf die beiden Geraden $L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$ und $L_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$.

Lösung. Der Punkt M' und der Schnittpunkt der beiden Strahlen (L_1) und (L_2) bestimmen einen Strahl (L) und man nennt aus Gründen,

die später bei den Kegelschnitten erörtert werden, den vierten harmonischen Punkt M' zu den Punkten M_1, M_2 und M den Pol der Geraden (L'), bezüglich des Punktpaars M_1, M_2. Nun hat der Punkt M, weil er in der Geraden $M_1 M_2$ und (L') gleichzeitig liegt, nach § 14 die Gleichung $\frac{M_1}{M_1'} - \frac{M_2}{M_2'} = o$ und daher ist nach dem eben Vorgeführten

$$(124) \quad \ldots \quad M' \equiv \frac{M_1}{M_1'} + \frac{M_2}{M_2'} = o$$

die Gleichung des gesuchten Pols, wenn noch die Symbole M_1' und M_2' definiert sind durch

die später bei den Kegelschnitten zur Erörterung kommen werden, den vierten harmonischen Strahl (L') zu den Strahlen (L_1), (L_2) und (L) die Polare des Punktes M', bezüglich des Geradenpaars (L_1), (L_2). Nun hat der Strahl (L), weil er gleichzeitig durch den Punkt M' und den Schnittpunkt der Strahlen (L_1) und (L_2) geht, nach § 14 die Gleichung $\frac{L_1}{L_1'} - \frac{L_2}{L_2'} = o$ und daher ist nach dem eben Vorgeführten

$$L' \equiv \frac{L_1}{L_1'} + \frac{L_2}{L_2'} = o \quad \ldots (125)$$

die Gleichung der gesuchten Polaren, wenn noch die Symbole L_1' und L_2' definiert sind durch

$$M_i' = A_i u' + B_i v' + C_i, \quad i = 1,2, \quad L_i = A_i x' + B_i y' + C_i.$$

Satz. Es existiert immer ein Punktpaar, welches mit einem jeden Paar von zwei gegebenen Punktpaaren harmonisch ist und dieses Paar kann reell oder imaginär erscheinen.

Satz. Es existiert immer ein Strahlenpaar, welches mit einem jeden Paar von zwei gegebenen Strahlenpaaren harmonisch ist und dieses Paar kann reell oder imaginär sein.

Beweis. Um diese beiden Sätze zu beweisen, machen wir die Annahme, es seien:

$$(126) \quad \ldots \quad U_1 \equiv U' - \lambda_1 U'' = o, \quad U_2 \equiv U' - \lambda_2 U'' = o,$$
$$U_3 \equiv U' - \lambda_3 U'' = o, \quad U_4 \equiv U' - \lambda_4 U'' = o$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Punkt- oder Strahlenpaare, während

$$(127) \quad \ldots \quad U \equiv U' - \lambda U'' = o, \quad V \equiv U' - \mu U'' = o$$

die Gleichungen von einem anderen Paar darstellen, welches

derselben Reihe oder demselben Büschel angehört, wie die beiden gegebenen Paare. Wenn nun $U_1 = o$, $U_2 = o$ und $U = o$, $V = o$, sowie $U_3 = o$, $U_4 = o$ und $U = o$, $V = o$, harmonisch sein sollen, unterliegen λ und μ den beiden Relationen:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda} : \frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu} = -1, \qquad \frac{\lambda_3 - \lambda}{\lambda_4 - \lambda} : \frac{\lambda_3 - \mu}{\lambda_4 - \mu} = -1,$$

oder

$$(128) \ldots \quad \begin{aligned} \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda + \mu) + \lambda_1 \lambda_2 &= o \\ \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4)(\lambda + \mu) + \lambda_3 \lambda_4 &= o \end{aligned}$$

und aus diesen folgt sofort, wenn man sie nach $(\lambda + \mu)$ und $\lambda\mu$ auflöst:

$$\lambda + \mu = a, \qquad \lambda\mu = b.$$

Es erscheinen somit λ und μ als die Wurzeln der in ϱ quadratischen Gleichung:

$$\varrho^2 - a\varrho + b = o,$$

d. h. es ist

$$\lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \qquad \mu = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

und diese Gleichungen zeigen, dass wirklich ein Wertesystem von λ und μ existiert, welches den hier gestellten Bedingungen entspricht.

Capitel IV.

Eigenschaften ebener Figuren.

§ 20. Vollständige Figuren. — Definition.

Das einfache n-Eck. Man denke sich in der Ebene die n Punkte M_i, $i = 1,2,3 \ldots n$, von welchen keine drei benachbarten in einer und derselben Geraden liegen sollen, und verbinde nun den ersten mit dem zweiten, diesen mit dem dritten ..... und endlich den $n$ten mit dem ersten Punkte, wodurch man eine von n Strecken gebildete ebene Figur erhält und diese heißt das einfache n-Eck. Die n Punkte M_i bilden die Ecken und jene n Strecken, welche durch zwei unmittelbar auf einander folgenden Ecken bestimmt sind, die n Seiten der Figur und man erkennt sonach, dass das einfache n-Eck offenbar n Ecken und n Seiten besitzt.

Das einfache n-Seit. Man denke sich in der Ebene die n Strahlen (L_i), $i = 1,2,3..n$, von denen keine drei benachbarten durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, und bringe nun den ersten mit dem zweiten, diesen mit dem dritten ..... und endlich den $n$ten mit dem ersten Strahl zum Durchschnitte, wodurch man abermals eine von n Strecken gebildete ebene Figur erhält und diese heißt das einfache n-Seit. Die Schnittpunkte von zwei unmittelbar auf einander folgenden Strahlen sind die Ecken und die zwischen zwei Nachbarecken liegenden Strecken die Seiten der Figur und man erkennt sonach, dass das einfache n-Seit offenbar n Seiten und n Ecken besitzt.

Aus der Bildungsweise des einfachen n-Ecks und n-Seits sieht man, dass diese beiden ebenen Figuren eigentlich identisch sind.

Das vollständige n-Eck. Verbindet man dagegen die in der Ebene liegenden

Das vollständige n-Seit. Bringt man dagegen die in der Ebene liegenden

n Punkte M_i wechselseitig durch gerade Linien, so erhält man das vollständige n-Eck. (Steiner.) Die n Punkte M_i sind wieder die n Ecken und alle Verbindungsgeraden der letzteren die Seiten der Figur. Nachdem aber die Geraden $M_\alpha\, M_\beta$ und $M_\beta\, M_\alpha$ identisch sind, existieren blos $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ solcher Seiten und kann man daher sagen, das vollständige n-Eck hat n Ecken und $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ Seiten. Daraus folgt, dass das vollständige 3-Eck drei Ecken und drei Seiten, das vollständige 4-Eck vier Ecken und sechs Seiten, das vollständige 5-Eck fünf Ecken und zehn Seiten hat. etc. etc.

n Strahlen (L_i) wechselseitig zum Schnitte, so erhält man das vollständige n-Seit. (Steiner.) Alle Schnittpunkte dieser Strahlen sind die Ecken der Figur und, weil die Geraden (L_α), (L_β) und (L_β), (L_α) denselben Schnittpunkt besitzen, so existieren blos $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ solcher Ecken. Die durch zwei Ecken gegebene Strecke ist eine Seite und man kann daher sagen, das vollständige n-Seit hat n Seiten und $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ Ecken. Daraus folgt, dass das vollständige 3-Seit drei Seiten und drei Ecken, das vollständige 4-Seit vier Seiten und sechs Ecken, das vollständige 5-Seit fünf Seiten und zehn Ecken besitzt. etc. etc.

§ 21. Sätze und Aufgaben über das Dreieck (Dreiseit).

Satz von Carnot. Bringt man die drei Seiten eines Dreiecks von den Ecken M_1, M_2 und M_3 zum Schnitte mit einer Transversalen (L_0) (Fig. 15), wodurch sich die Punkte M', M'' und M''' ergeben, so ist das Product:

$$(M_2\, M_3\, M')\,(M_3 M_1 M'')\,(M_1\, M_2 M''') = +1 \quad \ldots \quad (129)$$

Satz von Ceva. Verbindet man die drei Ecken des von den Seiten (L_1), (L_2) und (L_3) gebildeten Dreiseits (Fig. 16) mit einem in der Ebene des letzteren liegenden Punkte M_0, u. zw. durch die Strahlen (L'), (L'') und (L'''), so ist das Product:

$$(L_2\, L_3\, L')\,(L_3 L_1 L'')\,(L_1 L_2\, L''') = +1 \quad \ldots \quad (130)$$

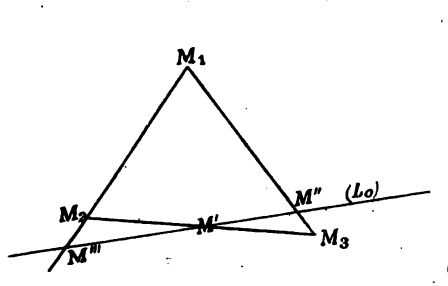


Fig. 15.

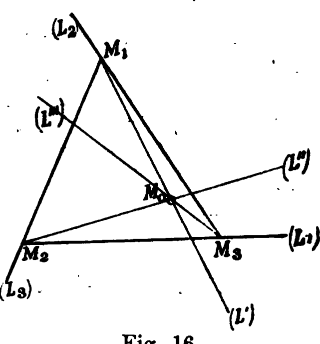


Fig. 16.

Beweis. Sind $m_i \equiv x_i u + y_i v + 1 = o$, $i = 1,2,3$, die Gleichungen der drei Ecken M_i des Dreiecks, so lauten nach Gl. (92) in § 16 die Gleichungen der Schnitpunkte M', M'' und M'''

$$(a) \ldots \begin{aligned} M' &\equiv m_2 - \lambda' m_3 = o, \\ M'' &\equiv m_3 - \lambda'' m_1 = o, \\ M''' &\equiv m_1 - \lambda''' m_2 = o, \end{aligned}$$

Beweis. Sind $l_i \equiv x \cos \alpha^i + y \sin \alpha_i + d_i = o$, die Gleichungen der drei Seiten (L_i) des Dreiseits, so lauten nach Gl. (96) in § 17 die Gleichungen der Verbindungsgeraden (L'), (L'') und (L'''), sobald der Ursprung im Dreiseit angenommen wird,

$$\begin{aligned} L' &\equiv l_2 - \lambda' l_3 = o, \\ L'' &\equiv l_3 - \lambda'' l_1 = o, \\ L''' &\equiv l_1 - \lambda''' l_2 = o, \end{aligned} \ldots (d)$$

wenn noch

$$(b) \ldots \begin{aligned} \lambda' &= (M_2 M_3 M'), \\ \lambda'' &= (M_3 M_1 M''), \\ \lambda''' &= (M_1 M_2 M''') \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda' &= (L_2 L_3 L'), \\ \lambda'' &= (L_3 L_1 L''), \\ \lambda''' &= (L_1 L_2 L''') \end{aligned} \ldots (e)$$

ist. Nun liegen aber die Punkte M', M'' und M''' in der Geraden (L_0) und deshalb müssen die Gleichungen (a) befriedigt werden für $u = u_0$ und $v = v_0$, sobald u_0, v_0 die Coordinaten von (L_0) darstellen,

ist. Nun liegt aber der Punkt M_0 in den Strahlen (L'), (L'') und (L''') gleichzeitig und müssen darum die Coordinaten x_0, y_0 von M_0 den Gleichungen (d) genügen,

d. h. es unterliegen $\lambda^{(i)}$, $i = 1,2,3$, den drei Relationen

$$(e) \ldots \begin{aligned} m_2{}^0 - \lambda' m_3{}^0 &= o, \\ m_3{}^0 - \lambda'' m_1{}^0 &= o, \\ m_1{}^0 - \lambda''' m_2{}^0 &= o, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l_2{}^0 - \lambda' l_3{}^0 &= o, \\ l_3{}^0 - \lambda'' l_1{}^0 &= o, \\ l_1{}^0 - \lambda''' l_2{}^0 &= o, \end{aligned} \ldots (f)$$

sobald $m_i^0 = x_i u_0 + y_i v_0 + 1$ und $l_i^0 = x_0 \cos \alpha_i + y_0 \sin \alpha_i + d_i$ ist, und wird folglich

$$\lambda' = \frac{m_2^0}{m_3^0}, \quad \lambda'' = \frac{m_3^0}{m_1^0}, \quad \lambda''' = \frac{m_1^0}{m_2^0},$$

$$\lambda' = \frac{l_2^0}{l_3^0}, \quad \lambda'' = \frac{l_3^0}{l_1^0}, \quad \lambda''' = \frac{l_1^0}{l_2^0},$$

mithin das Product

$$\lambda' . \lambda'' . \lambda''' = +1, \qquad \lambda' . \lambda'' . \lambda''' = +1,$$

was zu beweisen war.

Umkehrung der Sätze von Carnot und Ceva.

Ist das Product $\lambda' \lambda'' \lambda''' = +1$, so

liegen die drei Punkte M', M'' und M''' auf einer und derselben Geraden.	durchschneiden sich die drei Strahlen (L'), (L'') und (L''') in einem u. demselben Punkte.

Denn, nachdem die beiden Gleichungen bestehen

$m_2 - \lambda' m_3 = M'$ und $m_3 - \lambda'' m_1 = M''$,	$l_2 - \lambda' l_3 = L'$ und $l_3 - \lambda'' l_1 = L''$,

so folgt

$m_1 = \frac{m_3 - M''}{\lambda''}$ und $m_2 = M' + \lambda' m_3$,	$l_1 = \frac{l_3 - L''}{\lambda''}$ und $l_2 = L' + \lambda' l_3$,

weshalb die Gleichung des dritten Punktes (Strahls) ersetzt werden kann durch jene

$m_3 (1 - \lambda' \lambda'' \lambda''') - (M'' + \lambda'' \lambda''' M') = o$,	$l_3 (1 - \lambda' \lambda'' \lambda''') - (L'' + \lambda'' \lambda''' L') = o$,

welche wegen $\lambda' \lambda'' \lambda''' = +1$ übergeht in

$$M'' + \lambda'' \lambda''' M' = o \qquad L'' + \lambda'' \lambda''' L' = o$$

und in dieser Form aussagt, dass der

Punkt M''' in der Verbindungsgeraden $M' M''$ liegt.	Strahl (L''') durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen (L') und (L'') hindurchgeht.

Satz. Legt man durch die Ecken M_1, M_2 und M_3 eines Dreiseits (Fig. 17) die Strahlen (L'), (L'') und (L'''), welche die Gegenseiten (L_1), (L_2) und (L_3) in den Punkten M', M'' und M''' durchschneiden, so ist das Product:

(131) . . . $(M_2 M_3 M')$
$(M_3 M_1 M'')$ $(M_1 M_2 M''')$
$(L_2 L_3 L')$ $(L_3 L_1 L'')$ $(L_1 L_2 L''')$
$= -1.$

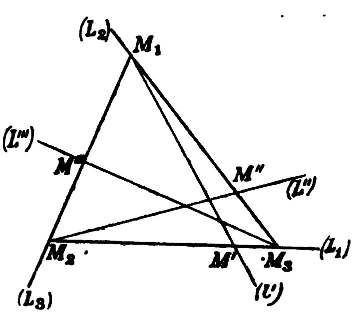


Fig. 17.

Beweis. In der beigegebenen Figur sollen die Strecken $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$ als positiv angenommen werden, also auch jene $M_2 M'$, $M_3 M''$ und $M_1 M'''$, weshalb die Strecken $M_3 M_2$, $M_1 M_3$ und $M_2 M_1$, sowie $M_3 M'$, $M_1 M''$ und $M_2 M'''$ negativ sind und nachfolgende drei Gleichungen in Kraft treten, nämlich:

$$\frac{M_2 M'}{M_3 M'} = \frac{M_1 M_2 . \sin(L_3, L')}{M_1 M_3 . \sin(L_2, L')}, \quad \frac{M_3 M''}{M_1 M''} = \frac{M_2 M_3 . \sin(L_1, L'')}{M_2 M_1 . \sin(L_3, L'')},$$
$$\frac{M_1 M'''}{M_2 M'''} = \frac{M_3 M_1 . \sin(L_2, L''')}{M_3 M_2 . \sin(L_1, L''')}$$

und aus diesen folgt nach den in § 15 gegebenen Bezeichnungen:

$$(M_2 M_3 M')(L_2 L_3 L') = \frac{M_1 M_2}{M_1 M_3}, (M_3 M_1 M'')(L_3 L_1 L'') = \frac{M_2 M_3}{M_2 M_1},$$
$$(M_1 M_2 M''')(L_1 L_2 L''') = \frac{M_3 M_1}{M_3 M_2}.$$

Multipliciert man nun die drei letzten Gleichungen mit einander, so ergibt sich, wegen $M_\alpha M_\beta = - M_\beta M_\alpha$, die in (131) angegebene Beziehung.

Folgerungen aus dem Satze von Carnot. Durch-

Folgerungen aus dem Satze von Ceva. Verbindet

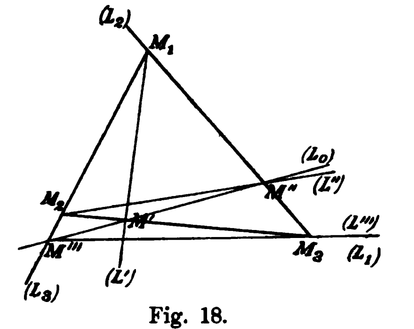


Fig. 18.

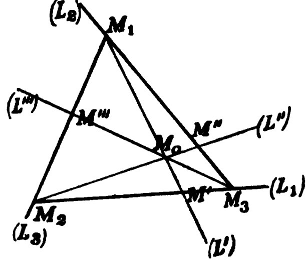


Fig. 19.

schneidet man die drei Seiten (L_1), (L_2) und (L_3) eines Dreiseits durch eine Gerade (L_0) (Fig. 18), wodurch man die Punkte M', M'' und M''' erhält und verbindet die letzteren durch Strahlen (L'), (L'') und (L''') mit den Gegenecken M_1, M_2 und M_3 des Dreiseits,

man die Ecken M_1, M_2 und M_3 eines Dreiseits (Fig. 19) mit einem in der Ebene des letzteren liegenden Punkte M_0 durch die Strahlen (L'), (L'') und (L'''), welche die Gegenseiten (L_1), (L_2) und (L_3) dieser Figur in den Punkten M', M'' und M''' durchschneiden,

so ist das Product:

$$(132) \ldots (L_2 L_3 L')(L_3 L_1 L'')(L_1 L_2 L''') = -1.$$

$$(M_2 M_3 M')(M_3 M_1 M'')(M_1 M_2 M''') = -1 \ldots (133)$$

Diese Gleichung ist eine unmittelbare Folge von (129) und (131). | (130) und (131).

Behufs Auffindung weiterer Sätze über das Dreieck und Dreiseit, erscheint es zunächst geboten, die Gleichungen der Mittelpunkte und unendlich fernen Punkte der drei Seiten des Dreiseits, sowie jene der inneren und äußeren Winkelhalbierungslinie des Dreiecks aufzustellen.

Sind nun $m_i \equiv x_i u + y_i v + 1 = o, \quad i = 1, 2, 3$ beziehungsweise $l_i \equiv x \cos d_i + y \sin d_i + d_i = o$

die Gleichungen der drei Ecken des Dreiecks, so lauten die Gleichungen der Mittel-

die Gleichungen der drei Seiten des Dreiseits, so lauten die Gleichungen der äußeren

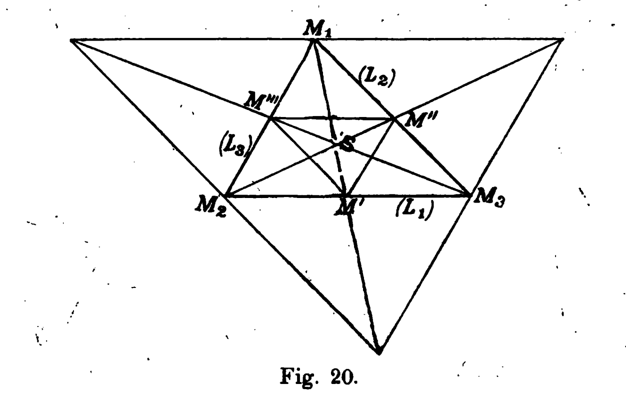


Fig. 20.

punkte M', M'' und M''' (Fig. 20), sowie die der unendlich fernen Punkte M'_∞, M''_∞ und M'''_∞ der drei Seiten M_2M_3, M_3M_1 und M_1M_2, weil ja $(M_2 M_3 M') = -1$ und $(M_2 M_3 M'_\infty) = +1$ ist, nach § 16:

$$(g)\quad \begin{aligned} M' &\equiv m_2 + m_3 = o, \\ M'' &\equiv m_3 + m_1 = o, \\ M''' &\equiv m_1 + m_2 = o; \\ M'_\infty &\equiv m_2 - m_3 = o, \\ M''_\infty &\equiv m_3 - m_1 = o, \\ M'''_\infty &\equiv m_1 - m_2 = o. \end{aligned}$$

Winkelhalbierungslinien (H'), (H'') und (H''') (Fig. 21), sowie der inneren (H_1), (H_2) und (H_3), weil ja $(L_2 L_3 H') = -1$ und $(L_2 L_3 H_1) = +1$ ist, nach § 17:

$$\begin{aligned} H' &\equiv l_2 + l_3 = o, \\ H'' &\equiv l_3 + l_1 = o, \\ H''' &\equiv l_1 + l_2 = o; \\ H_1 &\equiv l_2 - l_3 = o, \\ H_2 &\equiv l_3 - l_1 = o, \\ H_3 &\equiv l_1 - l_2 = o. \end{aligned}\quad (h)$$

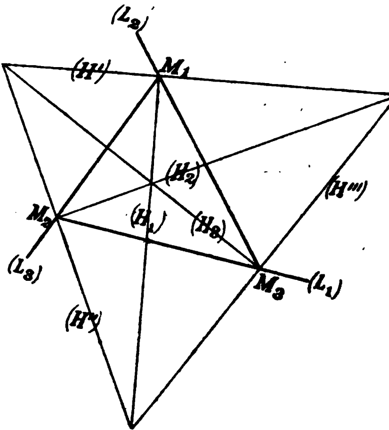


Fig. 21.

Nachdem die Gleichungen dieser Punkte und Strahlen in (g) und (h) gegeben erscheinen, ist es jetzt leicht, mittelst derselben eine ganze Serie solcher Sätze über das Dreieck und Dreiseit analytisch zu beweisen, die bereits aus den Elementen bekannt sind und bemerke ich hier gleichzeitig, dass die nun folgenden Sätze auch in den Sätzen von Carnot und Ceva ihre Begründung finden.

Satz. Die unendlich fernen Punkte M'_∞, M''_∞ und M'''_∞ der drei Seiten eines

Satz. Die drei inneren Winkelhalbierungslinien (H_1), (H_2) und (H_3) eines Dreiseits

Dreiecks liegen in einer und derselben Geraden (L_∞).

Der Beweis dieses Satzes erscheint nach Gl. (54) in § 11 sofort erbracht, wenn man bedenkt, dass zufolge der obigen Gleichungen (g) die Identität besteht:

$$M'_\infty + M''_\infty + M'''_\infty \equiv o.$$

durchschneiden sich in einem und demselben Punkte.

Auch hier ist der Beweis des Satzes nach Gl. (53) in § 11 sofort gegeben, indem zufolge der obigen Gleichungen (h) die Identität besteht:

$$H_1 + H_2 + H_3 \equiv o.$$

Beide Sätze resultieren aber auch aus den Sätzen von Carnot und Ceva, indem ja

$$(M_2 M_3 M'_\infty)(M_3 M_1 M''_\infty)(M_1 M_2 M'''_\infty) = +1$$

$$(L_2 L_3 H_1)(L_3 L_1 H_2)(L_1 L_2 H_3) = +1$$

ist.

Die Gerade (L_∞), in welcher die drei unendlich fernen Punkte der Geraden $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$ oder der Strahlen (L_1), (L_2) und (L_3) (Fig. 18) zu liegen kommen, ist gleichzeitig der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte der Ebene des Dreiecks und heißt deshalb die unendlich ferne Gerade dieser Ebene. Es hat somit jede Ebene nur eine unendlich ferne Gerade und wird hier wieder ausdrücklich hervorgehoben, dass diese Gerade keine wirklich vorhandene, sondern blos eine fingierte ist. Um nun den Beweis zu erbringen, dass alle unendlich fernen Punkte der Ebene des Dreiecks in (L_∞) liegen müssen, nehme man an, es seien (L_1) und (L_2) fest und lasse (L_3) alle möglichen Lagen in der Ebene annehmen. Dann ändert auch M'''_∞ seinen Ort, verbleibt aber nach dem vorletzten Satze immer in der Verbindungsgeraden der beiden nun ebenfalls festen Punkte M'_∞ und M''_∞, d. h. also der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte der Ebene des Dreiecks ist die Gerade $M'_\infty M''_\infty$, welche wir mit (L_∞) bezeichnen und die unendlich ferne Gerade der Ebene nennen. Sie ist darum fingiert, weil auch M'_∞, M''_∞ und M'''_∞ blos fingierte Punkte darstellen, wie in § 15 bereits gesagt wurde.

Satz. Die drei Geraden, welche die Mittelpunkte M', M'' und M''' der drei Seiten

Satz. Die drei äußeren Winkelhalbierungslinien (H'), (H'') und (H''') eines Drei-

des Dreiecks mit den Gegenecken M_1, M_2 und M_3 verbinden, durchschneiden sich in einem und demselben Punkte S, dem Schwerpunkte des Dreiecks.

Bedenkt man nämlich, dass zufolge (g), eine jede der drei Gleichungen

$$m_1 + (m_2 + m_3) = o,$$
$$m_2 + (m_3 + m_1) = o,$$
$$m_3 + (m_1 + m_2) = o$$

einen Punkt darstellt, welcher beziehungsweise in der Verbindungsgeraden $M_1 M'$, $M_2 M''$, $M_3 M'''$ liegt, und diese drei Gleichungen, vermöge ihres Baues, dasselbe geometrische Äquivalent besitzen, so erhellt, dass der Punkt

$$S \equiv m_1 + m_2 + m_3 = o$$

den Geraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 M'''$ gleichzeitig angehört, wodurch obiger Satz bewiesen ist. Nachdem überdies $m_1 + m_2 + m_3 = (x_1 + x_2 + x_3)\, u + (y_1 + y_2 + y_3)\, v + 3$ ist, sind die Coordinaten von S:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

seits durchschneiden die Gegenseiten (L_1), (L_2) und (L_3) in drei Punkten einer und derselben Geraden.

Nachdem nämlich, zufolge (h), eine jede der drei Gleichungen

$$l_1 + (l_2 + l_3) = o$$
$$l_2 + (l_3 + l_1) = o,$$
$$l_3 + (l_1 + l_2) = o$$

einer Geraden angehört, welche beziehungsweise durch die Schnittpunkte der Geraden (L_1) und (H'), (L_2) und (H''), (L_3) und (H''') hindurchgeht, und diese drei Gleichungen, vermöge ihres Baues, dasselbe geometrische Äquivalent haben, so folgt, dass die Gerade

$$L \equiv l_1 + l_2 + l_3 = o$$

die Schnittpunkte der Geraden (L_1) und (H'), (L_2) und (H''), (L_3) und (H''') gleichzeitig enthält, womit die Richtigkeit des obigen Satzes ebenfalls constatiert erscheint.

Beide Sätze können ebenfalls mittels der Sätze von Carnot und Ceva bewiesen werden, denn es ist hier:

$$(M_2 M_3 M')(M_3 M_1 M'')(M_1 M_2 M''') = -1.$$

$$(L_2 L_3 H')(L_3 L_1 H'')(L_1 L_2 H''') = -1.$$

Satz. Die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks und der unendlich ferne Punkt der dritten Seite liegen in einer und derselben Geraden.

Satz. Die äußeren Winkelhalbierungslinien zweier Ecken und die innere Winkelhalbierungslinie der dritten Ecke eines Dreiseits durchschneiden sich in einem und demselben Punkte.

Dieser Satz resultiert sofort aus den drei Identitäten:

$$M'' - M''' + M'_\infty \equiv o,\quad M''' - M' + M''_\infty \equiv o,\quad M' - M'' + M'''_\infty \equiv o;$$

$$H'' - H''' + H_1 \equiv o,\quad H''' - H' + H_2 \equiv o,\quad H' - H'' + H_3 \equiv o;$$

er folgt aber auch wieder aus den Sätzen von Carnot Ceva, denn es ist

$$(M_2 M_3 M'_\infty) \cdot (M_3 M_1 M'')(M_1 M_2 M''') = +1.$$

$$(L_2 L_3 H_1)(L_3 L_1 H'')(L_1 L_2 H''') = +1.$$

etc. etc.

Der links stehende Satz beweiset übrigens gleichzeitig, dass die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks zur dritten Seite parallel gerichtet ist.

Satz. Die Verbindungsgerade zweier Ecken eines Dreiecks mit den unendlich fernen Punkten der Gegenseiten durchschneiden sich in einem Punkte, durch welchen die Verbindungsgerade der dritten Ecke mit dem Mittelpunkte ihrer Gegenseite hindurchgeht.

Satz. Die inneren Winkelhalbierungslinien zweier Ecken eines Dreiseits und die äußere Winkelhalbierungslinie der dritten Ecke durchschneiden die drei Gegenseiten in drei Punkten einer und derselben Geraden.

Um diesen Satz analytisch zu beweisen, bemerke ich zunächst, dass nach den Gleichungen (g), beziehungsweise (h), eine jede der drei folgenden Gleichnngen

$$-m_1 - (m_2 - m_3) = o,\quad -m_2 + (m_3 - m_1) = o,\quad m_3 - (m_1 + m_2) = o$$

$$-l_1 - (l_2 - l_3) = o,\quad -l_2 + (l_3 - l_1) = o,\quad l_3 - (l_1 + l_2) = o$$

einen Punkt bestimmt, der beziehungsweise in den Verbindungsgeraden $M_1 M'_\infty$, $M_2 M''_\infty$ und $M_3 M'''$ liegt. Nun sind aber die obigen drei Gleichungen identisch, demnach ist, zufolge § 14,

$$m_1 + m_2 - m_3 = o$$

die Gleichung eines Punktes, in welchem die Geraden $M_1 M'_\infty$, $M_2 M''_\infty$ und $M_3 M'''$ gleichzeitig sich schneiden, daher etc.

eine Gerade bestimmt, die beziehungsweise durch die Schnittpunkte der Geraden (L_1) und (H_1), (L_2) und (H_2), (L_3) und (H''') hindurchgeht. Nun sind aber die drei obigen Gleichungen identisch, es ist daher, zufolge § 14,

$$l_1 + l_2 - l_3 = o$$

die Gleichung einer Geraden, in welcher die Schnittpunkte der Geraden (L_1) und (H_1), (L_2) und (H_2), (L_3) und (H''') gleichzeitig liegen, daher etc.

Auch aus den Sätzen von Carnot und Ceva lassen sich die beiden letzten Sätze ableiten; man braucht nur wieder zu bedenken, dass:

$$(M_2 M_3 M'_\infty)\,(M_3 M_1 M''_\infty)\,(M_1 M_2 M''') = -1$$

$$(L_2 L_3 H_1)\,(L_3 L_1 H_2)\,(L_1 L_2 H''') = -1$$

ist.

Satz. Die drei Normalen (N_1), (N_2) und (N_3) aus den Ecken eines Dreiecks (oder Dreiseits) auf die Gegenseiten durchschneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Höhenpunkte des Dreiecks.

Beweis. Die Gleichung der durch den Punkt M_1 auf die Gerade (L_1) gefällten Senkrechten (Fig. 22) lautet, wenn der Ursprung des Coordinatensystems wieder im Dreieck angenommen wird und $\lambda_1 = (L_2 L_3 N_1)$ ist; $N_1 \equiv l_2 - \lambda_1 l_3 = o$. In dem vorliegenden Fall ist aber, wenn $(L_2 L_3) = M_1$, $(L_3 L_1) = M_2$ und $(L_1 L_2) = M_3$ gesetzt wird, das Theilverhältnis $\lambda_1 =$

$$\frac{\sin(L_2, N_1)}{\sin(L_3, N_1)} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} =$$

Fig. 22.

$$\frac{\cos(\pi - M_3)}{\cos(\pi - M_2)} = \frac{\cos M_3}{\cos M_2} \text{ und folglich } N_1 \equiv l_2 - \frac{\cos M_3}{\cos M_2} \cdot l_3$$

$= o$ die Gleichung der Normalen (N_1). Da man die letzte Gleichung auch ersetzen kann durch $l_2 \cos M_2 - l_3 \cos M_3 = o$, so hat man für die drei Normalen (N^i) die Gleichungen $N_1 \equiv l_2 \cos M_2 - l_3 \cos M_3 = o$, $N_2 \equiv l_3 \cos M_3 - l_1 \cos M_1 = o$, $N_3 \equiv l_1 \cos M_1 - l_2 \cos M_2 = o$ und aus diesen ergibt sich nach § 11, (Gl. 53), die unseren Satz beweisende Identität:

$$N_1 + N_2 + N_3 \equiv o.$$

Man kann übrigens den Beweis dieses Satzes noch in einer anderen Weise geben und hierbei gleichzeitig die Gleichung und Coordinaten des Höhepunktes H bestimmen. Zu diesem Zwecke trachte man vorerst die Gleichungen der Fusspunkte M', M'' und M''' der Normalen (N_1) (N_2) und (N_3) ausfindig zu machen und schließe hernach von den Gleichungen besagter Punkte auf die Gleichung des Höhenpunktes selbst. Nun sind, wenn wieder $\lambda' = (M_2\ M_3\ M')$, $\lambda'' = (M_3\ M_1\ M'')$ und $\lambda''' = (M_1\ M_2\ M''')$ gesetzt wird, nach Gl. (92)

$$(a) \quad \ldots \quad M' \equiv m_2 - \lambda' m_3 = o, \quad M'' \equiv m_3 - \lambda'' m_1 = o, \quad M''' \equiv m_1 - \lambda''' m_2 = o$$

die Gleichungen der Punkte M', M'' und M''', wenn $m_i \equiv x_i u + y_i v + 1 = o$ die Gleichungen der Ecken M_i in der Normalform sind, und handelt es sich nunmehr darum, die Theilverhältnisse λ', λ'' und λ''' zu bestimmen. Aus der beigegebenen Fig. 22 erkennt man aber, sobald die Strecken $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$, wie früher positiv angenommen werden, dass das Theilverhältnis

$$\lambda' = \frac{M_2\ M'}{M_3\ M'} = \frac{M_1\ M_2 \sin\alpha}{M_1\ M_3 \sin\beta} = -\frac{M_1\ M_2 \cos(\pi - M_2)}{M_3\ M_1 \cos(\pi - M_3)}$$
$$= -\frac{\sin M_3 \cos M_2}{\sin M_2 \cos M_3} = -\frac{\operatorname{tg} M_3}{\operatorname{tg} M_2}$$

ist, und desshalb lautet die Gleichung von M'

$m_2 + \dfrac{\operatorname{tg} M_3}{\operatorname{tg} M_2} \cdot m_3 = o$. Man kann daher schließlich sagen, es sind die Gleichungen der Fusspunkte $M^{(i)}$ der Normalen (N_i)

$$(b) \quad \ldots \quad M' \equiv m_2 \cdot \operatorname{tg} M_2 + m_3 \operatorname{tg} M_3 = o, \quad M'' \equiv m_3 \cdot \operatorname{tg} M_3 + m_1 \operatorname{tg} M_1 = o, \quad M''' \equiv m_1 \cdot \operatorname{tg} M_1 + m_2 \operatorname{tg} M_2 = o$$

und aus diesen sieht man nach § 14, dass

(134) . . . $H \equiv m_1 \operatorname{tg} M_1 + m_2 \,.\, \operatorname{tg} M_2 + m_3 \,.\, \operatorname{tg} M_3 = o$

die Gleichung eines Punktes darstellt, welcher gleichzeitig den drei Geraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 M'''$ angehört, d. h. also die drei Normalen (N_i) durchschneiden sich thatsächlich in einem und demselben Punkte H, bestimmt durch die obige Gleichung, und dieser Punkt hat sonach die Coordinaten:

(135) . . .
$$x_h = \frac{x_1 \operatorname{tg} M_1 + x_2 \operatorname{tg} M_2 + x_3 \operatorname{tg} M_3}{\operatorname{tg} M_1 + \operatorname{tg} M_2 + \operatorname{tg} M_3},$$
$$y_h = \frac{y_1 \operatorname{tg} M_1 + y_2 \operatorname{tg} M_2 + y_3 \operatorname{tg} M_3}{\operatorname{tg} M_1 + \operatorname{tg} M_2 + \operatorname{tg} M_3}.$$

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung und Coordinaten desjenigen Kreises, welcher einem Dreieck (Dreiseit) umgeschrieben ist.

Lösung. Auch hier erscheint es wieder zweckdienlich, vorerst die Gleichungen derjenigen Punkte M', M'' und M''' (Fig. 23) zu bestimmen, in welchen die Verbindungsgeraden des Kreiscentrums C mit den Ecken M_1, M_2 und M_3 des Dreiecks die Gegenseiten $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$ durchschneiden. Unter Anwendung der in der früheren Aufgabe schon gewählten Bezeichnungen für die Theilverhältnisse der Punkte $M^{(i)}$, lauten die Gleichungen der letzteren

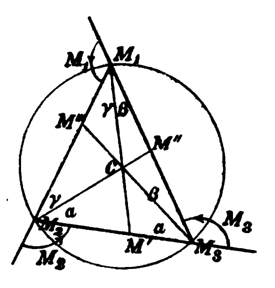


Fig. 23.

(a) . . . $M' \equiv m_2 - \lambda' m_3 = o, \quad M'' \equiv m_3 - \lambda'' m_1 = o,$
$M''' \equiv m_1 - \lambda''' m_2 = o$

und müssen jetzt noch die Werte von $\lambda^{(i)}$ für den vorliegenden Fall ermittelt werden. Dies geschieht hier unter Zuhilfenahme der in Fig. 23 verzeichneten Winkel α, β und γ, die man desshalb zunächst bestimmen muss. Nach der Figur ist nun $\alpha + \beta = \pi - M_3, \gamma + \alpha = \pi - M_2, \beta + \gamma = \pi - M_1$ und aus der zweiten und dritten der letzten Gleichungen ergibt sich, sobald man nämlich die dritte von der zweiten subtrahiert, $\alpha - \beta = M_1 - M_2$; man hat daher zur Berechnung von α und β die beiden einfachen Gleichungen: $\alpha + \beta = \pi - M_3$ und $\alpha - \beta = M_1 - M_2$, woraus durch Addition

beider sich ergibt: $2\alpha = \pi + M_1 - M_2 - M_3 = \pi - (M_1 + M_2 + M_3) + 2M_1 = 2M_1 - \pi$ und demnach $\alpha = M_1 - \frac{\pi}{2}$ folgt. Die fraglichen Winkel α, β und γ resultieren daher aus den Gleichungen

$$\alpha = M_1 - \frac{\pi}{2},\ \beta = M_2 - \frac{\pi}{2},\ \gamma = M_3 - \frac{\pi}{2}$$

und steht nun der Berechnung der Theilverhältnisse $\lambda^{(i)}$ nichts mehr im Wege; denn, wie die diesbezügliche Figur lehrt, ist ja das Abstandsverhältnis

$$\lambda' = \frac{M_2 M'}{M_3 M'} = \frac{M_1 M_2 \sin\gamma}{M_1 M_3 \sin\beta} = -\frac{M_1 M_2 \sin\gamma}{M_3 M_1 \sin\beta} = -\frac{\sin M_3 \cos M_3}{\sin M_2 \cos M_2}$$
$$= -\frac{\sin\ (2M_3)}{\sin\ (2M_2)}.$$

Ermittelt man noch in derselben Weise λ'' und λ''' und führt die betreffenden Werte in (a) ein, so erhält man nach Wegschaffung der Brüche für die Punkte $M^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, schließlich die Gleichungen:

(b) . . . $M' \equiv m_2 \sin(2M_2) + m_3 \sin(2M_3) = o$, $M'' \equiv m_3 \sin(2M_3) + m_1 \sin(2M_1) = o$, $M''' \equiv m_1 \sin(2M_1) + m_2 \sin(2M_2) = o$, welche aber nach § 14 sogleich erkennen lassen, dass

$$(136)\ .\ .\ .\quad C \equiv m_1 \,.\, \sin(2M_1) + m_2 \,.\, \sin(2M_2) + m_3 \sin(2M_3) = o$$

einen Punkt darstellt, der den Geraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 M'''$ gleichzeitig angehört, d. h. also (136) ist die Gleichung des Centrums C des dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ umgeschriebenen Kreises, während die Coordinaten x_c, y_c dieses Punktes resultieren aus

$$(137)\ .\ .\ .\quad \begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 \sin(2M_1) + x_2 \sin(2M_2) + x_3 \sin(2M_3)}{\sin(2M_1) + \sin(2M_2) + \sin(2M_3)}, \\ y_c &= \frac{y_1 \sin(2M_1) + y_2 \sin(2M_2) + y_3 \sin(2M_3)}{\sin(2M_1) + \sin(2M_2) + \sin(2M_3)}. \end{aligned}$$

Aufgabe. Man besimme die Gleichungen und Coordinaten der Centra jener vier Kreise, die einem Dreieck eingeschrieben sind.

Lösung. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Auffindung des Centrums desjenigen dem Dreieck $M_2 M_2 M_3$

eingeschriebenen Kreises, welcher alle drei Seiten des Dreiecks innen berührt. Sind M', M'' und M''' in Fig. 24 diejenigen Punkte, in welchen die Verbindungsgeraden des Centrums C mit den Ecken M_1, M_2 und M_3 die Gegenseiten $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$ durchschneiden und repräsentiert $\lambda^{(i)}$ das Theilverhältnis des Punktes $M^{(i)}$, bezüglich der mit letzterem in einer Geraden liegenden Ecken des Dreiecks als Grundpunkte, so lauten die Gleichungen dieser Punkte $M^{(i)}$ wieder (siehe Gl. 92)

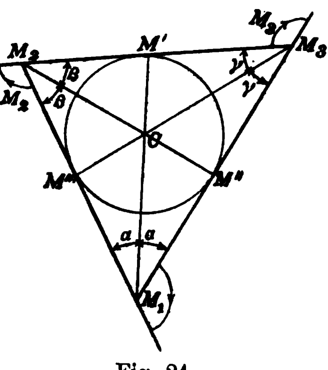


Fig. 24.

(a) . . . $M' \equiv m_2 - \lambda' m_3 = o$, $M'' \equiv m_3 - \lambda'' m_1 = o$, $M''' \equiv m_1 - \lambda''' m_2 = o$,

sobald auch hier $m_i \equiv x_i\, u + y_i\, v + 1 = o$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichungen der drei Ecken M_i des Dreiecks in der Normalform sind.

Behufs Berechnung von λ' wird bemerkt, dass nach der beigegebenen Fig. 24

$$\lambda' = \frac{M_2 M'}{M_3 M'} = \frac{M_1 M_2 \sin \alpha}{M_1 M_3 \sin \alpha} = -\frac{M_1 M_2}{M_3 M_1} = -\frac{\sin M_3}{\sin M_2},$$

ist, weshalb die Gleichung des vorhin definierten Punktes M' sein wird $M' \equiv m_2 + \frac{\sin M_3}{\sin M_2} m_3 = o$, oder $M' \equiv m_2 \,.\, \sin M_2 + m_3 \sin M_3 = o$. Nun kann aber auch dieselbe geometrische Betrachtung für die beiden anderen Punkte M'' und M''' angestellt werden, wodurch man λ'' und λ''' erhält, ausgedrückt durch die sinusse der Winkel M_1, M_2 und M_3, und dann schließlich für die Punkte $M^{(i)}$ zu den Gleichungen gelangt:

(b) . . . $M' \equiv m_2 \sin M_2 + m_3 \sin M_3 = o$, $M'' \equiv m_3 \sin M_3 + m_1 \sin M_1 = o$, $M''' \equiv m_1 \sin M_1 + m_2 \sin M_2 = o$,

aus welchen unter gleichzeitiger Berücksichtigung des in § 14 bereits Vorgeführten folgt, dass

(c) . . . $C \equiv m_1 \,.\, \sin M_1 + m_2 \sin M_2 + m_3 \,.\, \sin M_3 = o$

einen Punkt darstellt, welcher in einer jeden der drei Verbindungsgeraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 M'''$ zu liegen kommt,

d. h. also *(c)* ist die Gleichung des Centrums C des dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ eingeschriebenen Kreises, welcher die drei Seiten dieses Dreiecks aber innen berührt.

Noch existieren aber drei Kreise, welche dem Dreieck (Dreiseit) ebenfalls eingeschrieben sind, von denen jedoch ein jeder eine Seite des Dreiecks außen und nur die beiden übrigen innen berührt. In Fig. 25 wurde nun derjenige Fall gegeben, wo die Seite $M_1 M_2$ von dem Kreise außen berührt wird, und mit der Auffindung der Gleichung des Centrums C dieses Kreises wollen wir uns jetzt beschäftigen. Die Punkte M', M'' und M''' haben wieder die frühere Bedeutung und ihre Gleichungen erscheinen zunächst in der Form *(a)*. Was jedoch die in diesen Gleichungen vorkommenden Abstandsverhältnisse λ', λ'' und λ''' anbelangt, so

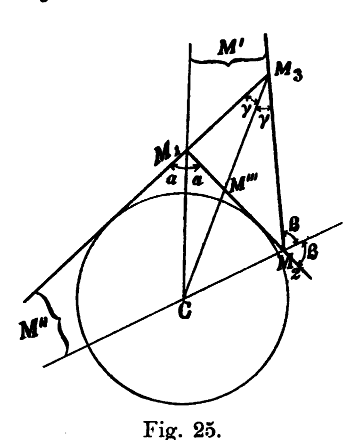


Fig. 25.

ist bloß $\lambda''' = -\frac{\sin M_2}{\sin M_1}$, während $\lambda' = \frac{\sin M_3}{\sin M_2}$ und $\lambda'' = \frac{\sin M_1}{\sin M_3}$ wird, denn man erhält sofort aus der Figur

$$\lambda'' = \frac{M_3\ M''}{M^1\ M''} = \frac{M_2\ M_3\ .\ \sin\beta}{M_1\ M_2\ .\ \sin\beta} = \frac{M_2\ M_3}{M_1\ M_2} = \frac{\sin M_1}{\sin M_3}.$$

Die Gleichungen der Punkte M', M'' und M''' sind daher

(d) . . . $M' \equiv m_2 \sin M_2 - m_3 \sin M_3 = o$, $M'' \equiv m_3 \sin M_3 - m_1 \sin M_1 = o$, $M''' \equiv m_1 \sin M_1 + m_2 \sin M_2 = o$ und aus diesen gelangt man wieder nach § 14 zu der Schlussfolgerung, dass das geometrische Äquivalent von

(e) . . . $C \equiv + m_1\ .\ \sin M_1 + m_2 \sin M_2 - m_3 \sin M_3 = o$

ein Punkt ist, der den drei Verbindungsgeraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 M'''$ gleichzeitig angehört, d. h. es ist *(e)* die gesuchte Gleichung des Centrums unseres Kreises, welcher dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ der Art eingeschrieben ist, dass er die beiden Seiten $M_3 M_1$ und $M_2 M_3$ innen, dagegen die dritte Seite $M_1 M_2$ außen berührt. Man kann daher sagen, die Gleichungen

der Centra der vier dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ eingeschriebenen Kreise sind

(138)... $C \equiv m_1 . \sin M_1 + k m_2 \sin M_2 + k' m_3 \sin M_3 = o,$

wenn die Coefficienten k und k' die Wurzeln der quadratischen Gleichungen darstellen $k^2 = +1$ und $k'^2 = +1$; während die Coordinaten x_c, y_c dieser vier Kreise resultieren aus:

$$(139)\ldots\quad x_c = \frac{x_1 \sin M_1 + k x_2 \sin M_2 + k' x_3 \sin M_3}{\sin M_1 + k \sin M_2 + k' \sin M_3}$$

$$y_c = \frac{y_1 \sin M_1 + k y_2 \sin M_2 + k' y_3 \sin M_3}{\sin M_1 + k \sin M_2 + k' \sin M_3.}.$$

Satz von Euler. Der Mittelpunkt eines einem Dreieck umgeschriebenen Kreises, der Höhenpunkt und der Schwerpunkt dieses Dreiecks liegen in einer und derselben Geraden.

Beweis. Nennt man in Übereinstimmung mit dem bereits Vorgeführten x_s, y_s und x_h, y_h die Coordinaten des Schwerpunktes und Höhenpunktes eines Dreiecks $M_1 M_2 M_3$, sowie x_c, y_c jene des Centrums des diesem Dreieck umgeschriebenen Kreises, so erscheint nach § 11, Gl. 52, die Richtigkeit obigen Satzes erwiesen, sobald der Nachweis erbracht wird, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_s, & x_c, & x_h \\ y_s, & y_c, & y_h \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Nun ist aber $x_s = {}^1/_3\,(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_s = {}^1/_3\,(y_1 + y_2 + y_3)$, wenn x_i, y_i, $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten der **Ecken** M_i des Dreiecks sind, während die Coordinaten x_c, y_c und x_h, y_h aus den früheren Gleichungen (137) und (135) hervorgehen, weshalb obige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\sum_1^3 x_i, & \dfrac{\sum_1^3 x_i \sin(2M_i)}{\sum_1^3 \sin(2M_i)}, & \dfrac{\sum_1^3 x_i \operatorname{tg} M_i}{\sum_1^3 \operatorname{tg} M_i} \\ \frac{1}{3}\sum_1^3 y_i, & \dfrac{\sum_1^3 y_i \sin(2M_i)}{\sum_1^3 \sin(2M_i)}, & \dfrac{\sum_1^3 y_i \operatorname{tg} M_i}{\sum_1^3 \operatorname{tg} M_i} \\ 1, & 1, & 1. \end{vmatrix}$$

wird. Die obige Gleichung kann aber nach der Theorie der Determinanten auch so geschrieben werden

$$\triangle = \varrho \cdot \begin{vmatrix} \sum_1^3 x_i, & \sum_1^3 x_i \sin 2 M_i, & \sum_1^3 x_i \operatorname{tg} M_i \\ \sum_1^3 y_i. & \sum_1^3 y_i \sin 2 M_i, & \sum_1^3 y_i \operatorname{tg} M_i \\ 3, & \sum_1^3 \sin (2 M_i) & \sum_1^3 \operatorname{tg} M_i \end{vmatrix}$$

und jetzt zeigt sich sofort, wenn man die rechts vom Gleichheitszeichen vorkommende 3^2 elementige Determinante zerlegt, dass in der That $\triangle = o$ wird, wodurch der Satz erwiesen erscheint.

§ 22. Die harmonischen Eigenschaften des Dreiecks (Dreiseits). — Fortsetzung.

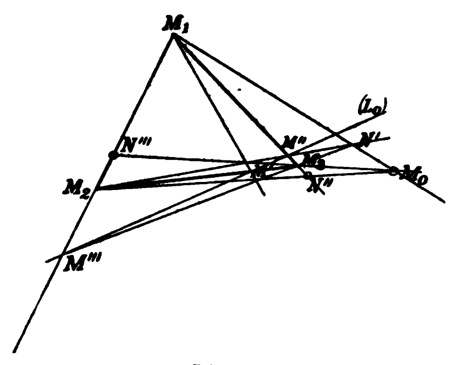


Fig. 26.

Man bringe das in Fig. 26 verzeichnete Dreieck M_1 M_2 M_3 zum Schnitte mit einer Geraden (L_0) von den Coordinaten u_0, v_0, wodurch die Punkte M', M'' und M''' sich ergeben,

Man verbinde die Ecken des in Fig. 27 gegebenen Dreiseits (L_1) (L_2) (L_3) durch Strahlen mit dem Punkte M_0 von den Coordinaten x_0, y_0 und erhält so die Strahlen (D_1), (D_2) und (D_3),

deren Gleichungen nach dem in § 19 bereits Gezeigtem offenbar lauten müssen:

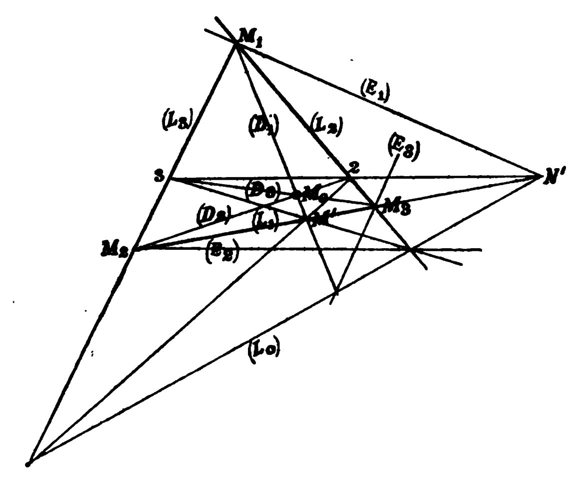


Fig. 27.

$$M' \equiv \frac{M_2}{M_2^{(o)}} - \frac{M_3}{M_3^{(o)}} = o,$$

$$(a) \ldots M'' \equiv \frac{M_3}{M_3^{(o)}} - \frac{M_1}{M_1^{(o)}} = o,$$

$$M''' \equiv \frac{M_1}{M_1^{(o)}} - \frac{M_2}{M_2^{(o)}} = o,$$

wenn $M_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichungen der drei Ecken des Dreiecks darstellen und das Symbol $M_i^{(o)}$ definiert erscheint durch $M_i^{(o)} = A_i u_o + B_i v_o + C_i$. Alsdann verzeichne man zu einem jeden Schnittpunkte auf der zugehörigen Seite des Dreiecks den vierten harmonischen Punkt und erhält so drei neue Punkte N' N'' und N''', deren Gleichungen nach Gl. (124) in § 19 sind:

$$D_1 \equiv \frac{L_2}{L_2^{(o)}} - \frac{L_3}{L_3^{(o)}} = o,$$

$$D_2 \equiv \frac{L_3}{L_3^{(o)}} - \frac{L_1}{L_1^{(o)}} = o, . (b)$$

$$D_3 \equiv \frac{L_1}{L_1^{(o)}} - \frac{L_2}{L_2^{(o)}} = o,$$

wenn $L_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o$, $i = 1, 2, 3$ die Gleichungen der drei Seiten des Dreiseits sind und das Symbol $L_i^{(o)}$ definiert erscheint durch $L_i^{(o)} = A_i x_o + B_i y_o + C_i$. Alsdann verzeichne man in jeder Ecke zu den Strahlen $(L\alpha)$, $(L\beta)$, $(D\gamma)$ den vierten harmonischen Strahl und erhält so die drei neuen Strahlen (E_1), (E_2) und (E_3), deren Gleichungen nach Gl. (125) in § 19 sind:

$$N' \equiv \frac{M_2}{M_2^{(o)}} + \frac{M_3}{M_3^{(o)}} = o,$$
$$(c)..N'' \equiv \frac{M_3}{M_3^{(o)}} + \frac{M_1}{M_1^{(o)}} = o,$$
$$N''' \equiv \frac{M_1}{M_1^{(o)}} + \frac{M_2}{M_2^{o}} = o.$$

$$E_1 \equiv \frac{L_2}{L_2^{(o)}} + \frac{L_3}{L_3^{(o)}} = o,$$
$$E_2 \equiv \frac{L_3}{L_3^{(o)}} + \frac{L_1}{L_1^{(o)}} = o \;..(d)$$
$$E_3 \equiv \frac{L_1}{L_1^{(o)}} + \frac{L_2}{L_2^{(o)}} = o.$$

Mittelst der Gleichungen *(a)* und *(c)*, beziehungsweise *(b)* und *(d)*, kann man nun eine Reihe von Sätzen gewinnen, welche zusammen die harmonischen Eigenschaften des Dreiecks (Dreiseits) ausmachen. In dem Folgenden führen wir diese Sätze an und beweisen dieselben aus den Gleichungen *(a)* bis *(d)*, dabei dasselbe Verfahren einschlagend, welches schon im vorigen Paragraphen gezeigt wurde.

Satz. Die drei Verbindungsgeraden $M_i N^{(i)}$ der vierten harmonischen Punkte mit den Gegenecken des Dreiecks durchschneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Pol M_o der Geraden (L_o), bezüglich des Dreiecks.

Satz. Die drei Schnittpunkte der vierten harmonischen Strahlen (E_i) mit den Gegenseiten (L_i) des Dreiseits liegen in einer und derselben Geraden, der Polaren des Punktes M_o, bezüglich des Dreiseits.

Der Beweis dieses Satzes geht aus den Gleichungen *(c)*, beziehungsweise *(d)*, unmittelbar hervor, denn nach diesen leuchtet ja ohneweiters ein, dass die Gleichung

$$M_o \equiv \frac{M_1}{M_1^{(o)}} + \frac{M_2}{M_2^{(o)}} + \frac{M_3}{M_3^{(o)}} = o$$

einen Punkt darstellt, welcher gleichzeitig den drei Geraden $M_1 N'$, $M_2 N''$ und $M_3 N'''$ angehört; es durchschneiden sich somit diese drei Geraden in der That in einem und demselben Punkte, bestimmt durch die letzte Gleichung.

$$L_o \equiv \frac{L_1}{L_1^{(o)}} + \frac{L_2}{L_2^{(o)}} + \frac{L_3}{L_3^{(o)}}$$

einen Strahl darstellt, in welchem gleichzeitig die Schnittpunkte der Geraden (L_1) und (E_1), (L_2) und (E_2), (L_3) und (E_3) liegen; es liegen somit diese drei Schnittpunkte in der That in einer und derselben Geraden, gegeben durch obige Gleichung.

Satz. Die vierten harmonischen Punkte $N^{(\alpha)}$ und $N^{(\beta)}$ zweier Seiten des Dreiecks

Satz. Die vierten harmonischen Strahlen (E_α) und (E_β) zweier Ecken des Drei-

und der dritte harmonische Punkt $M(\gamma)$ der dritten Seite liegen auf einer und derselben Geraden.

seits und der dritte harmonische Strahl (D_γ) der dritten Ecke durchschneiden sich in einem und demselben Punkte.

Dieser Satz folgt nach § 11 unmittelbar aus den Gleichungen *(a)* und *(c)*, beziehungsweise *(b)* und *(d)*, nach welchen ist:

$$N'' - N''' + M' \equiv o,$$
$$N''' - N' + M'' \equiv o,$$
$$N' - N'' + M''' \equiv o.$$

$$E_2 - E_3 + D_1 \equiv o,$$
$$E_3 - E_1 + D_2 \equiv o,$$
$$E_1 - E_2 + D_3 \equiv o.$$

Satz. Die Verbindungsgeraden $M_\alpha M(\alpha)$ und $M_\beta M(\beta)$ der dritten harmonischen Punkte zweier Seiten des Dreiecks mit den Gegenecken und die Verbindungsgerade $M_\gamma N(\gamma)$ des vierten harmonischen Punktes der dritten Seite mit der Gegenecke durchschneiden sich in einem und demselben Punkte.

Satz. Die dritten harmonischen Geraden (D_α) und (D_β) zweier Ecken M_α und M_β des Dreiseits und die vierte harmonische Gerade (E_γ) der dritten Ecke M_γ durchschneiden die Gegenseiten (L_α), (L_β) und (L_γ) in drei Punkten einer und derselben Geraden.

Um diesen Satz zu beweisen, mache ich bloß darauf aufmerksam, dass die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{M_1}{M_1^{(o)}} + \left(\frac{M_2}{M_2^{(o)}} - \frac{M_3}{M_3^{(o)}}\right) = o$$
$$\frac{M_2}{M_2^{(o)}} - \left(\frac{M_3}{M_3^{(o)}} - \frac{M_1}{M_1^{(o)}}\right) = o$$
$$-\frac{M_3}{M_3^{(o)}} + \left(\frac{M_1}{M_1^{(o)}} + \frac{M_2}{M_2^{(o)}}\right) = o$$

nach § 14 einen und denselben Punkt darstellen, welcher gleichzeitig in den Verbindungsgeraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 N'''$ zu liegen kommt, und mithin durchschneiden sich auch diese drei Geraden wirklich in einem und dem-

$$\frac{L_1}{L_1^{(o)}} + \left(\frac{L_2}{L_2^{(o)}} - \frac{L_3}{L_3^{(o)}}\right) = o$$
$$\frac{L_2}{L_2^{(o)}} - \left(\frac{L_3}{L_3^{(o)}} - \frac{L_1}{L_1^{(o)}}\right) = o$$
$$-\frac{L_3}{L_3^{(o)}} + \left(\frac{L_1}{L_1^{(o)}} + \frac{L_2}{L_2^{(o)}}\right) = o$$

nach § 14 eine und dieselbe Gerade angeben, in welcher gleichzeitig die Schnittpunkte der Strahlen (L_1) und (D_1), (L_2) und (D_2), (L_3) und (E_3) sich befinden. Die Schnittpunkte dieser Geraden liegen somit in der That in einer

selben Punkte, bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{M_1}{M_1^{(0)}} + \frac{M_2}{M_2^{(0)}} - \frac{M_3}{M_3^{(0)}} = o.$$

und derselben Geraden und diese hat die Gleichung

$$\frac{L_1}{L_1^{(0)}} + \frac{L_2}{L_2^{(0)}} - \frac{L_3}{L_3^{(0)}} = o.$$

Der letzte Satz bietet uns noch die Möglichkeit, zu drei Strahlen eines Büschels den vierten harmonischen Strahl, oder zu drei Punkten einer Reihe den vierten harmonischen Punkt durch Construction zu ermitteln. So hat man, um zu den drei gegebenen Punkten M_2, M_3 und M' (Fig. 27) den vierten harmonischen Punkt N' zu finden, die gegebenen drei Punkte durch die Strahlen (L_3), (L_2) und (D_1) mit einem beliebigen Punkte M_1 zu verbinden, alsdann durch einen in (D_1) ganz beliebig gewählten Punkt M_0 und die Punkte M_2 und M_3 ebenfalls Strahlen zu legen und diese bis zu ihrem Durchschnitte mit (L_2), beziehungsweise (L_3), zu verlängern. Die so gefundenen Punkte 2 und 3 bestimmen nun einen Strahl, welcher die Gerade, auf der die drei gegebenen Punkte liegen, in dem gesuchten vierten harmonischen Punkte N' durchschneidet. In derselben Weise lässt sich nun zu den gegebenen drei Strahlen (L_2), (L_3) und (D_1) der vierte harmonische Strahl (E_1) ausfindig machen. Man bringe zunächst diese drei Strahlen mit einer willkürlich gewählten Transversalen zum Schnitte, wodurch man die Punkte M_3, M_2 und M' erhält, wähle in (D_1) den Punkt M_0 und verbinde diesen durch Strahlen mit den Punkten M_2 und M_3. Diese Strahlen durchschneiden die gegebenen Strahlen (L_2) und (L_3) in den Punkten 2 und 3, und die Verbindungsgerade 23 trifft die (L_1) in jenem Punkte N', durch welchen die vierte harmonische Gerade (E_1) geht.

§ 23. Sätze über das vollständige Viereck und Vierseit.

Das vollständige Viereck hat nach dem in § 20 bereits Vorgeführten vier Ecken und sechs Seiten und es sind, sobald M_1, M_2, M_3 und M_4 (Fig. 28) die vier

Das vollständige Vierseit hat nach dem in § 20 bereits Vorgeführten vier Seiten und sechs Ecken und es sind, sobald (L_1), (L_2), (L_3) und (L_4) (Fig. 29) die vier

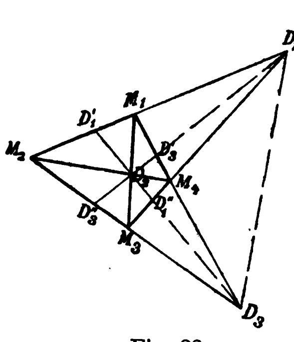


Fig. 28.

Ecken eines vollständigen Vierecks repräsentieren, $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$; $M_1 M_3$ und $M_2 M_4$; $M_1 M_4$ und $M_2 M_3$ die drei Gegenseitenpaare desselben. Je zwei Gegenseiten durchschneiden sich in einem Punkte, welcher ein Diagonalpunkt (Diagonalecke) genannt wird, und es hat daher das vollständige Viereck drei Diagonalpunkte, welche in der Figur mit D_1, D_2 und D_3 bezeichnet wurden. Diese drei Diagonalpunkte bestimmen ein Dreieck, das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, und es gehen durch jede Ecke dieses Dreiecks vier Strahlen hindurch, u. zw. ein Paar Gegenseiten des Vierecks und zwei Seiten des Diagonaldreiecks.

Satz. Der Schnittpunkt einer Seite des vollständigen Vierecks mit der Verbindungs-

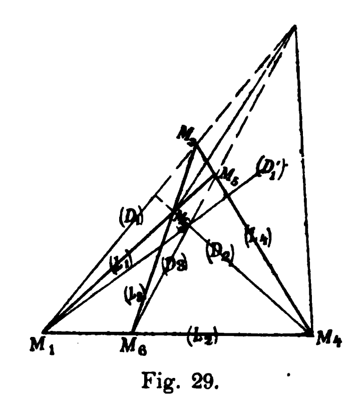


Fig. 29.

Seiten eines vollständigen Vierseits darstellen, M_1 und M_2; M_3 und M_4, M_5 und M_6 die drei Gegeneckenpaare desselben. Je zwei Gegenecken bestimmen eine Gerade, welche eine Diagonale (Diagonalseite) genannt wird, und es hat folglich das vollständige Vierseit drei Diagonalen, welche in der Figur mit (D_1), (D_2) und (D_3) bezeichnet wurden. Diese drei Diagonalen bestimmen ein Dreiseit, das Diagonaldreiseit des vollständigen Vierseits, und es liegen auf einer jeden Seite obigen Dreiseits vier Punkte, u. zw. ein Paar Gegenecken des Vierseits und zwei Ecken des Diagonaldreiseits.

Satz. Der durch eine Ecke des vollständigen Vierseits und den Schnittpunkt

geraden derjenigen Diagonalpunkte, welche nicht in dieser Seite liegen, der dritte Diagonalpunkt und die beiden in der besagten Seite liegenden Ecken des Vierseits sind harmonisch.

Beweis. Es seien $m_i \equiv x_i u + y_i v + 1 = o$, $i = 1, 2, 3, 4$ die Gleichungen der vier Ecken M_i des Vierecks und k_1, k_2, k_3, k_4 vier Coëfficienten, welche derart gewählt sind, dass die Identität besteht

$$(a) \ldots k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3 + k_4 m_4 \equiv o.$$

derjenigen Diagonalen, welche nicht durch diese Ecken gehen, bestimmte Strahl, die dritte Diagonale und die durch diese Ecken gehenden zwei Seiten des vollständigen Vierseits sind harmonisch.

Beweis. Es seien $l_i \equiv x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i + d_i = o$, $i = 1, 2, 3, 4$, die Gleichungen der vier Seiten (L_i) des Vierseits und k_1, k_2, k_3, k_4 vier Coëfficienten, welche derart gewählt sind, dass die Identität besteht

$$k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3 + k_4 l_4 \equiv o \ldots (b)$$

Solche Coëfficienten sind hier immer möglich und es ergeben sich dieselben aus den Gleichungen:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = o$$

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4 = o$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = o.$$

Zufolge der Identität (a) haben nun $k_1 m_1 + k_2 m_2 = o$ und $k_3 m_3 + k_4 m_4 = o$ dasselbe geometrische Äquivalent, und weil nach § 14 die erste dieser Gleichungen einen in der Geraden $M_1 M_2$, die zweite aber einen in $M_3 M_4$ liegenden Punkt darstellt, so repräsentiert eine jede der beiden letzten Gleichungen den Schnittpunkt von den Geraden $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$, d. h. den Diagonalpunkt D_1. Die Gleichungen der drei

$$k_1 \cos\alpha_1 + k_2 \cos\alpha_2 + k_3 \cos\alpha_3 + k_4 \cos\alpha_4 = o$$

$$k_1 \sin\alpha + k_2 \sin\alpha_2 + k_3 \sin\alpha_3 + k_4 \sin\alpha_4 = o$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = o.$$

Zufolge der Identität (b) haben nun $k_1 l_1 + k_2 l_2 = o$ und $k_3 l_3 + k_4 l_4 = o$ dasselbe geometrische Äquivalent, und weil nach § 14 die erste dieser Gleichungen eine durch den Schnittpunkt von (L_1) und (L_2), die zweite aber eine durch den Schnittpunkt von (L_3) und (L_4) gehende Gerade darstellt, so repräsentiert eine jede der beiden letzten Gleichungen die eine Diagonalseite (D_1). Die Gleichungen

Diagonalpunkte D_i lauten somit:

$D_1 \equiv k_1 m_1 + k_2 m_2 = o$ oder
$D_1 \equiv k_3 m_3 + k_4 m_4 = o$,
$D_2 \equiv k_1 m_1 + k_3 m_3 = o$ oder
$D_2 \equiv k_2 m_2 + k_4 m_4 = o$,
$D_3 \equiv k_1 m_1 + k_4 m_4 = o$ oder
$D_3 \equiv k_2 m_2 + k_3 m_3 = o$

und hieraus ersieht man sofort, dass wegen $D_2 - D_3 = = k_1 m_1 - k_2 m_2$ die Gleichung $D_1' \equiv k_1 m_1 - k_2 m_2 = o$ denjenigen Punkt angibt, in welchem die Geraden $D_2 D_3$ und $M_1 M_2$ sich durchschneiden, und weil nach § 19 die vier Gleichungen

$$m_1 = o,\ m_2 = o,$$
$$D_1 \equiv k_1 m_1 + k_2 m_2 = o,$$
$$D'_1 \equiv k_1 m_1 - k_2 m_2 = o$$

zwei harmonische Punktpaare ausdrücken, ist $(M_1 M_2 D_1 D_1') = -1$ und erscheint somit obiger Satz erwiesen. Von selbst folgt jetzt nach dem Satze von Pappus, dass die vier Geraden, welche den Punkt D_2 mit den Punkten M_1 M_2, D_1 und D_1' verbinden, ebenfalls harmonisch sein werden und daher gilt noch der zweite

Satz. Zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks und die durch ihren Schnittpunkt gehenden beiden Seiten des Diagonaldreiecks sind harmonisch.

der drei Diagonalseiten (D_i) lauten somit:

$D_1 \equiv k_1 l_1 + k_2 l_2 = o$ oder
$D_1 \equiv k_3 l_3 + k_4 l_4 = o$,
$D_2 \equiv k_1 l_1 + k_3 l_3 = o$ oder
$D_2 \equiv k_2 l_2 + k_4 l_4 = o$,
$D_3 \equiv k_1 l_1 + k_4 l_4 = o$ oder
$D_3 \equiv k_2 l_2 + k_3 l_3 = o$

und hieraus ersieht man sofort, dass wegen $D_2 - D_3 = = k_1 l_1 - k_2 l_2$ die Gleichung $D_1' \equiv k_1 l_1 - k_2 l_2 = o$ diejenige Gerade angibt, welche die Ecke M_1 verbindet mit dem Schnittpunkte von (D_2) mit (D_3), und weil nach § 19 die vier Gleichungen

$$l_1 = o,\ l_2 = o,$$
$$D_1 \equiv k_1 l_2 + k_2 l_2 = o,$$
$$D_1' \equiv k_1 l_1 - k_2 l_2 = o$$

zwei harmonische Strahlenpaare ausdrücken, ist $(L_1 L_2 D_1 D_1') = -1$ und erscheint somit obiger Satz erwiesen. Von selbst folgt jetzt nach dem Satze von Pappus, dass die vier Punkte, in welchen die Diagonale (D_2) von den Strahlen (L_1), (L_2), (D_1) und (D_1') geschnitten wird, ebenfalls harmonisch sein müssen und daher der zweite

Satz. Zwei Gegenecken des vollständigen Vierseits und die auf ihrer Verbindungsgeraden liegenden Ecken des Diagonaldreiecks sind harmonisch.

Aus dem letzten Satze und dem mehrfach hier angewendeten Satze von Pappus folgt endlich noch, dass

jede Seite des Diagonaldreiecks von denjenigen Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch geschnitten wird, die durch die Gegenecke des Diagonaldreiecks gehen.

zwei Seiten des Diagonaldreiseits und jene zwei Strahlen, welche den Schnittpunkt dieser Seiten verbinden, mit den auf der dritten Diagonale liegenden Gegenecken des Vierseits, harmonisch sind.

Satz. Die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer und derselben Geraden.

Beweis. Es seien zu diesem Ende $m_1 \equiv x_1 u + y_1 v + 1 = o$, $m_2 \equiv x_2 u + y_2 v + 1 = o$, $m_5 \equiv x_5 u + y_5 v + 1 = o \ldots (a)$ die Gleichungen der Ecken M_1, M_2 und M_5 des vollständigen Vierseits (Fig. 30), u. zw. in der Normalform. Man kann nun sehr leicht aus diesen Gleichungen sofort jene der drei übrigen Ecken M_3, M_4 und M_6 herleiten. Denn zunächst lassen sich immer drei Coëfficienten k_1, k_2 und k_5 auffinden, für welche die Gleichungen bestehen

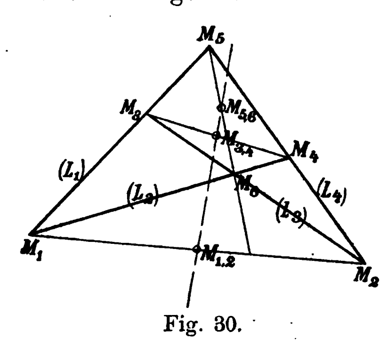


Fig. 30.

$$x_6 = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_5}{k_1 + k_2 + k_5}, \quad y_6 = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_5}{k_1 + k_2 + k_5}$$

und hieraus folgt

$$(b) \ldots \ldots M_6 \equiv k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_5 m_5 = o$$

als Gleichung der Ecke M_6, aber nicht in der Normalform, und erscheint somit die Gleichung der Ecke M_6 aus den Gleichungen der Ecken M_1, M_2 und M_5 bestimmt. Diese Coëfficienten k_1, k_2 und k_5 dienen aber auch gleichzeitig zur Bestimmung der Gleichungen der Ecken M_3 und M_4. Um dies zu zeigen, bringe ich bloß in Erinnerung, dass nach § 14 eine jede der Gleichungen

$$M' \equiv k_2 m_2 + k_5 m_5 = o, \quad M'' \equiv k_1 m_1 + k_5 m_5 = o,$$
$$M^{V} \equiv k_1 m_1 + k_2 m_2 = o$$

einen Punkt darstellt, der beziehungsweise in der Geraden $M_2 M_5$, $M_1 M_5$ und $M_1 M_2$ liegt, weshalb auch Gl. (b) einen Punkt bestimmt, der gleichzeitig in den drei Geraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_5 M^{V}$ sich befindet. Anderseits ist aber M_6 der durch Gl. (b) gegebene Punkt und deshalb ist auch M' mit M_4 und M'' mit M_3 identisch und erscheinen somit die Gleichungen der Ecken M_4 und M_3 in der einfachen Form:

$$(c) \ldots . M_4 \equiv k_2 m_2 + k_5 m_5 = o, \quad M_3 \equiv k_1 m_1 + k_5 m_5 = o.$$

Nun ist es aber auch leicht, die Gleichungen der Mittelpunkte $M_{1,2}$, $M_{3,4}$ und $M_{5,6}$ der drei Diagonalen $M_1 M_2$, $M_3 M_4$ und $M_5 M_6$ anzugeben und man erhält, zufolge (95_a), weil die Gleichungen der sechs Ecken des vollständigen Vierseits in der Normalform lauten:

$$(d) \ldots . m_1 = o, \quad m_2 = o, \quad m_3 \equiv \frac{k_1 m_1 + k_5 m_5}{k_1 + k_5} = o,$$

$$m_4 \equiv \frac{k_2 m_2 + k_5 m_5}{k_2 + k_5} = o, \; m_5 = o, \; m_6 \equiv \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_5 m_5}{k_1 + k_2 + k_5} = o:$$

$$M_{1,2} \equiv m_1 + m_2 = o, \; M_{3,4} \equiv \frac{k_1 m_1 + k_5 m_5}{k_1 + k_5} + \frac{k_2 m_2 + k_5 m_5}{k_2 + k_5} = o,$$

$$M_{5,6} \equiv m_5 + \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_5 m_5}{k_1 + k_2 + k_5} = o,$$

oder auch:

$$(e) \ldots . M_{1,2} \equiv m_1 + m_2 = o, \quad M_{3,4} \equiv k_1 (k_2 + k_5) m_1 +$$
$$+ k_2 (k_1 + k_5) m_2 + k_5 (k_1 + k_2 + 2k_5) m_5 = o,$$
$$M_{5,6} \equiv k_1 m_1 + k_2 m_2 + (k_1 + k_2 + 2k_5) m_5 = o$$

als die Gleichungen vorliegender drei Mittelpunkte $M_{1,2}$, $M_{3,4}$, $M_{5,6}$ und hieraus ergibt sich die Identität:

$$M_{3,4} - k_1 . k_2 . M_{1,2} - k_5 . M_{5,6} \equiv o,$$

zum Beweise, dass die drei Punkte $M_{1,2}$, $M_{3,4}$, $M_{5,6}$ in der That in einer und derselben Geraden zu liegen kommen, wie behauptet wurde.

§ 24. Sätze über das einfache n-Eck und n-Seit.

Satz von Carnot. Sind M_1, M_2, M_3, $M_4 \ldots M_{n-1}$, M_n die n-Ecken eines einfachen n-Ecks (Fig. 31) und M', M'' $M''' \ldots . M^{(n)}$ die Punkte, in

Satz von Ceva. Sind (L_1), (L_2), (L_3), $(L_4) \ldots (L_{n-1})$, (L_n) die n-Seiten eines einfachen n-Seits (Fig. 32) und (L'), (L''), $(L''') \ldots (L^{(n)})$ die

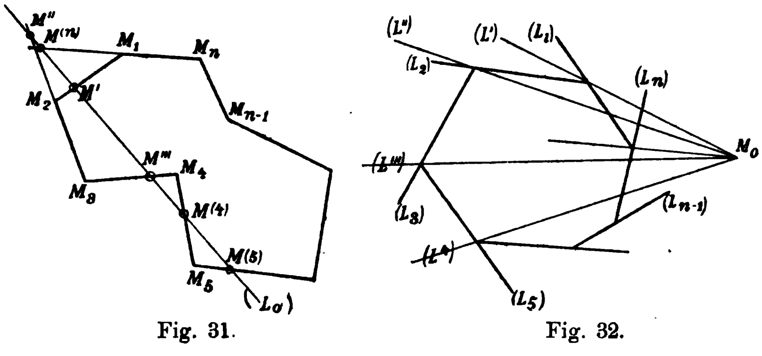


Fig. 31. Fig. 32.

welchen die n-Seiten $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_4 \ldots . M_n M_1$ von einer beliebigen Geraden (L_0) geschnitten werden, so ist das Product:

$$(140) \ldots (M_1 M_2 M')(M_2 M_3 M'')(M_3 M_4 M''') \ldots \ldots (M_n M_1 M^{(n)}) = +1.$$

Beweis. Sind $m_i \equiv x_i u + y_i v + 1 = o$, $i = 1, 2, 3 \ldots n$, die Gleichungen der n-Ecken M_i des einfachen n-Ecks, so lauten nach Gl. (92) in § 16 die Gleichungen der Schnittpunkte $M^{(i)}$:

$$(a) \ldots M' \equiv m_1 - \lambda' m_2 = o,$$
$$M'' \equiv m_2 - \lambda'' m_3 = o,$$
$$M''' \equiv m_3 - \lambda''' m_4 = o,$$
$$M^{(n-1)} \equiv m_{n-1} - \lambda^{(n-1)} m_n = o,$$
$$M^{(n)} \equiv m_n - \lambda^{(n)} m_1 = o,$$

wenn die Coëfficienten $\lambda^{(i)}$ definiert erscheinen durch

$$(b) \ldots . \lambda' = (M_1 M_2 M'),$$
$$\lambda'' = (M_2 M_3 M''),$$
$$\lambda''' = (M_3 M_4 M''')$$
$$\ldots . \lambda^{(n-1)} = (M_{n-1} M_n M^{(n-1)}),$$
$$\lambda^{(n)} = (M_n M_1 M^{(n)}).$$

Strahlen, welche einen beliebigen Punkt M_0 mit den n-Ecken des n-Seits verbinden, so ist das Product:

$$(L_1 L_2 L')(L_2 L_3 L'')(L_3 L_4 L''') \ldots (L_n L_1 L^{(n)}) = +1 \ldots (141)$$

Beweis. Sind $l_i \equiv x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i + d_i = o$, $i = 1, 2, 3 \ldots n$, die Gleichungen der n-Seiten (L_i) des einfachen n-Seits, so lauten nach Gl. (96) in § 17 die Gleichungen der Verbindungsgraden $(L^{(i)})$:

$$(c) \ldots . L' \equiv l_1 - \lambda' l_2 = o,$$
$$L'' \equiv l_2 - \lambda'' l_3 = o,$$
$$L''' \equiv l_3 - \lambda''' l_4 = o,$$
$$\ldots L^{(n-1)} \equiv l_{n-1} - \lambda^{(n-1)} l_n = o,$$
$$L^{(n)} \equiv l_n - \lambda^{(n)} l_1 = o,$$

wenn die Coëfficienten $\lambda^{(i)}$ definiert erscheinen durch

$$(d) \ldots \lambda' = (L_1 L_2 L'),$$
$$\lambda'' = (L_2 L_3 L''),$$
$$\lambda''' = (L_3 L_4 L'''),$$
$$\ldots \ldots \lambda^{(n-1)} = (L^{n-1} L_n L^{(n-1)}),$$
$$\lambda^{(n)} = (L_n L_1 L^{(n)}).$$

Nun liegen aber die Punkte M', M'', $M'''\ldots M^{(n)}$ sammt und sonders in der Geraden (L_0) und deshalb müssen die Gleichungen (a) befriedigt werden für $u = u_0$ und $v = v_0$, wenn u_0, v_0 die Coordinaten von (L_0) sind, d. h. es unterliegen die Theilverhältnisse $\lambda^{(i)}$ den n Bedingungen:

$$\begin{aligned} m_1^{(0)} - \lambda' m_2^{(0)} &= o, \\ m_2^{(0)} - \lambda'' m_3^{(0)} &= o, \\ m_3^{(0)} - \lambda''' m_4^{(0)} &= o, \\ \ldots m_{n-1}^{(0)} - \lambda^{(n-1)} m_n^{(0)} &= o, \\ m_n^{(0)} - \lambda^{(n)} m_1^{(0)} &= o, \end{aligned}$$

sobald $m_i^{(0)} = x_i u_0 + y_i v_0 + 1$ gesetzt wird. Aus den letzten Gleichungen ergibt sich aber, wenn man dieselben nach $\lambda^{(i)}$ auflöst

$$\lambda' = \frac{m_1^{(0)}}{m_2^{(0)}}, \quad \lambda'' = \frac{m_2^{(0)}}{m_3^{(0)}}, \quad \lambda''' = \frac{m_3^{(0)}}{m_4^{(0)}}, \quad \ldots \lambda^{(n-1)} = \frac{m_{n-1}^{(0)}}{m_n^{(0)}}, \quad \lambda^{(n)} = \frac{m_n^{(0)}}{m_1^{(0)}}$$

Nun ist aber M_0 ein gemeinsamer Punkt der n-Strahlen $(L^{(i)})$ und deshalb müssen die Gleichungen (d) befriedigt werden für $x = x_0$ und $y = y_0$, wenn x_0, y_0 die Coordinaten des Punktes M_0 bedeuten, d. h. es unterliegen die Theilverhältnisse $\lambda^{(i)}$ den Bedingungen:

$$\begin{aligned} l_1^{(0)} - \lambda' l_2^{(0)} &= o, \\ l_2^{(0)} - \lambda'' l_3^{(0)} &= o, \\ l_3^{(0)} - \lambda''' l_4^{(0)} &= o \\ \ldots l_{n-1}^{(0)} - \lambda^{(n-1)} l_n^{(0)} &= o, \\ l_n^{(0)} - \lambda^{(n)} l_1^{(0)} &= o, \end{aligned}$$

sobald $l_i^{(0)} = x_0 \cos\alpha_i + y_0 \sin\alpha_i + d_i$ gesetzt wird. Aus den letzten Gleichungen ergibt sich aber, wenn man diese nach $\lambda^{(i)}$ auflöst

$$\lambda' = \frac{l_1^{(0)}}{l_2^{(0)}}, \quad \lambda'' = \frac{l_2^{(0)}}{l_3^{(0)}}, \quad \lambda''' = \frac{l_3^{(0)}}{l_4^{(0)}}, \quad \ldots \lambda^{(n-1)} = \frac{l_{n-1}^{(0)}}{l_n^{(0)}}, \quad \lambda^{(n)} = \frac{l_n^{(0)}}{l_1^{(0)}}.$$

und hieraus

$$\lambda' . \lambda'' . \lambda''' \ldots\ldots\ldots \lambda^{(n)} = 1,$$

was zu beweisen war.

Capitel V.

Die homogenen Coordinaten.

§ 25. Punktcoordinaten.

Außer den bereits in Anwendung gekommenen Parallel-Coordinaten eines Punktes werden in neuerer Zeit in der analytischen Geometrie noch solche Punktcoordinaten verwendet, durch welche die Gleichungen derjenigen Curven, die durch die Bewegung eines Punktes entstanden gedacht werden, homogen erscheinen. Gleichzeitig werden bei Anwendung dieser Coordinaten auch die Brüche möglichst vermieden, wie die folgenden Untersuchungen noch zeigen werden.

Offenbar wird eine algebraische Gleichung zwischen den alten Coordinaten x und y auf die einfachste Weise dadurch homogen gemacht, dass man die letzteren ersetzt durch die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ und hierauf die ganze Gleichung mit z^n multiplciert, wenn n der Grad der Gleichung ist. Denn ersetzt man z. B. in der Gleichung

$$(a) \quad . \; . \; . \quad a_0 + (a_1 x + b_1 y) + (a_2 x^2 + 2 b_2 x y + c_2 y^2) + (a_3 x^3 + 3 b_3 x^2 y + 3 c_3 x y^2 + d_3 y^3) = o,$$

welche, nebenbei bemerkt, eine algebraische Cur. 3. Ord. darstellt, die Coordinaten x und y durch die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ und multipliciert alsdann die Gleichung mit z^3, so nimmt diese in der That die bezüglich x, y und z homogene Form an:

$$(b) \quad . \; . \; . \quad a_0 z^3 + (a_1 x + b_1 y) z^2 + (a_2 x^2 + 2 b_2 x y + c_2 y^2) z + (a_3 x^3 + 3 b_3 x^2 y + 3 c_3 x y^2 + d_3 y^3) = o.$$

Selbstverständlich sind aber x, y und z nicht Strecken, sondern bloß Zahlen, deren Verhältnisse die alten Coordi-

naten des Cartesius repräsentieren — wenn man diese Verhältnisse mit der Längeneinheit multipliciert — und, weil diese Zahlen den Punkt eindeutig bestimmen und die Gleichung der Curven, welche durch die Bewegung eines Punktes entstanden gedacht werden (der Ortscurven), homogen machen, so sind sie homogene Coordinaten des Punktes. Es ist klar, dass die Zahlen x, y, z und jene kx, ky, kz — k ein beliebiger Coefficient — einen und denselben Punkt darstellen müssen, indem in beiden Fällen die bewussten Quotienten dieselben Werte besitzen, und man erkennt demnach, dass unendlich viele Systeme homogener Coordinaten x, y, z existieren, welche einen und denselben Punkt angeben. Selbstverständlich kann die Gl. (b) wieder auf die nicht homogene Form (a) gebracht werden, sobald man in (b) z überall durch die Einheit ersetzt. Die eben definierten homogenen Punktcoordinaten sind die einfachsten homogenen Coordinaten***) eines Punktes und es wird nun ohne Schwierigkeiten einleuchten, dass in der bereits bekannten Gleichung $M \equiv Au + Bv + C = o$, die Coefficienten A, B, C oder ihre gleichen Vielfachen als ein System homogener Coordinaten des durch obige Gleichung bestimmten Punktes betrachtet werden können.

Übergehend auf ein allgemeineres System homogener Punktcoordinaten, seien x_1, x_2 und x_3 drei Größen, welche mit den Parallel-Coordinaten x, y verbunden sind durch die drei linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3, \end{aligned} \qquad (142)$$

in welchen a_i, b_i und c_i neun gegebene Coefficienten bedeuten und ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, der bei der Berechnung von x_1, x_2, x_3 aus x, y ganz beliebig gewählt werden kann. Dass durch die Angabe der Größen x_i der Punkt eindeutig bestimmt erscheint, folgt sofort, sobald man die drei obigen Gleichungen nach x, y und ϱ auflöst, wodurch man dann nach der Lehre von den Determinanten die Ausdrücke erhält:

***) Diese homogenen Coordinaten rühren von O. Hesse her.

$$(c) \quad \ldots \quad x = -\frac{(c\,b\,x)}{(a\,b\,x)}, \quad y = -\frac{(a\,c\,x)}{(a\,b\,x)}, \quad \varrho = \frac{(a\,b\,c)}{(a\,b\,x)},$$

oder

$$(d) \quad \ldots \quad \begin{aligned} x &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3}, \\ y &= \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3}, \\ \varrho &= \frac{(a\,b\,c)}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3}, \end{aligned}$$

durch welche sich x, y und ϱ in der That aus x_1, x_2, x_3 eindeutig bestimmen lassen. Gleichzeitig ersieht man, dass für x und y dieselben Werte zum Vorschein kommen, wenn man x_1, x_2 und x_3 durch ihre gleichen Vielfachen ersetzt, und dass eine jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Coordinaten x und y übergeht in eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen x_1, x_2 und x_3, sobald man in der Originalgleichung für x und y die in (d) gegebenen Werte substituiert. Es sind somit wirklich die durch die Gl. (142) definierten Größen x_i, $i = 1, 2, 3$, homogene Punktcoordinaten, die Coefficienten a_i, b_i, c_i mögen was immer für Zahlenwerte besitzen, wenn nur die aus ihnen gebildete 3^2 elementige Determinante $(a\,b\,c)$ nicht verschwindet, indem sonst, zufolge der dritten der Gleichungen (c), der Factor $\varrho = o$ werden würde, was offenbar unstatthaft wäre. Nachdem die in den Gleichungen (142) erscheinenden neun Coefficienten a_i, b_i, c_i ganz beliebig gewählt werden können, ist es auch gestattet, diese drei Gleichungen zu ersetzen durch die folgenden:

$$(143) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) \\ \varrho x_2 &= k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) \\ \varrho . x_3 &= k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3), \end{aligned}$$

in welchen die Coefficienten k_i wohl willkürlich, aber fest gewählt sind. Auch hier muss wieder die Determinante $(a\,b\,c)$ von null verschieden sein.

Die aus (143) fließenden Werte von x_i haben auch eine geometrische Bedeutung, mit der wir uns nun zu beschäftigen haben. Zunächst sei bemerkt, dass eine jede der drei Gleichungen

$$(e) \ldots \quad L_i \equiv a_i x + b_i y + c_i = o, \quad i = 1, 2, 3$$

eine Gerade (L_i) darstellt und diese drei Geraden hier unmöglich in einem und demselben Punkte sich durchschneiden können, weil ja die Determinante $(a\,b\,c)$, laut Annahme, nicht gleich null wird. Die durch die drei Gleichungen (e) gegebenen Geraden (L_i) bestimmen somit ein Dreiseit, und wir machen wieder die Annahme, dass der Ursprung O des rechtwinkeligen Coordinatensystems innerhalb dieses Dreiseits sich befinde. Für die Normaldistanz δ_i der Seite (L_i) dieses Dreiseits von einem in seiner Ebene liegenden Punkte M wird sonach, wenn noch x, y die rechtwinkeligen Coordinaten von M darstellen, zufolge Gl. (56) in § 12:

$$(f) \ldots \quad \delta_i = \pm \frac{a_i x + b_i y + c_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad i = 1,2,3,$$

und es ist hierin wieder das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem c_i eine positive oder negative Größe repräsentiert. Aus (143) und (f) ergibt sich nun durch die Elimination von $a_i x + b_i y + c_i$

$$\varrho x_i = \pm k_i \,.\, \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \,.\, \delta_i,$$

oder

$$(144) \ldots \quad \varrho x_i = \lambda_i \,.\, \delta_i,$$

wenn man noch setzt

$$(145) \ldots \quad \lambda_i = \pm k_i \,.\, \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\,.$$

Die Größen x_i, $i = 1,2,3$, sind sonach den Normaldistanzen δ_i des Punktes M von den drei Seiten (L_i) eines Dreiseits, jede dieser Normaldistanzen multipliciert mit einem beliebigen, aber fest gewählten Coefficienten λ_i, direct proportioniert, weshalb man x_i die Dreieckcoordinaten (trilinearen oder trimetrischen Coordinaten) des Punktes M nennt. Auf diese Weise gelangt man daher zur nachfolgenden Definition für diese homogenen Coordinaten eines Punktes, u. zw.:

Die homogenen Coordinaten eines Punktes sind drei Zahlen, welche sich verhalten, wie die mit beliebigen, aber fest gewählten Coefficienten multiplicierten Normaldistanzen dieses Punktes von den drei Seiten eines Dreiseits.

Es ist sonach klar, dass für die drei Seiten (L_1), (L_2), (L_3) des Dreiseits beziehungsweise die Gleichungen gelten:

$$x_1 = o, \qquad x_2 = o, \qquad x_3 = o,$$

während für die diesen Seiten gegenüber liegenden Ecken M_1, M_2 und M_3 dieses Dreiseits

$$x_2 = o, \quad x_3 = o;$$
$$x_3 = o, \quad x_1 = o;$$
$$x_1 = o, \quad x_2 = o$$

sein wird.

§ 26. Liniencoordinaten.

Überträgt man das eben vorgeführte Verfahren auf die Coordinaten einer Geraden, so gelangt man zu den homogenen Liniencoordinaten. Es wird sonach eine algebraische Gleichung zwischen den Liniencoordinaten u, v auf die einfachste Art dadurch homogen gemacht, dass man die letzteren ersetzt durch die Brüche $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ und hierauf die Gleichung mit w^n multipliciert, wenn n der Grad der letzteren ist. Denn ersetzt man z. B. in der Gleichung

$$(g) \quad \ldots \quad \alpha_0 + (\alpha_1 u + \beta_1 v) + \alpha_2 u^2 + 2\beta_2 uv + \gamma_2 v^2) + (\alpha_3 u^3 + 3\beta_3 u^2 v + 3\gamma_3 uv^2 + \delta_3 v^3) = o,$$

welche eine algebrische Curve 3. Classe darstellt, die alten Plücker'schen Coordinaten u und v durch die Brüche $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ und multipliciert sodann die Gleichung noch mit w^n, so nimmt diese die homogene Form an:

$$(h) \quad \ldots \quad \alpha_0 w^3 + (\alpha_1 u + \beta_1 v) w^2 + (\alpha_2 u^2 + 2\beta_2 uv + \gamma_2 v^2) w + (\alpha_3 u^3 + 3\beta_3 u^2 v + 3\gamma_3 uv^2 + \delta_3 v^3) = o.$$

Selbstverständlich sind u, v und w ebenfalls Zahlen, deren Verhältnisse $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ die alten Plücker'schen Coordinaten einer Geraden versinnlichen, während die Achsenabschnitte a und b der durch u, v und w bestimmten Geraden sich ergeben aus:

$$(i) \quad \ldots \quad a = -\frac{w}{u}, \qquad b = -\frac{w}{v}.$$

Man erkennt sonach, dass die Zahlen u, v und w die Gerade eindeutig bestimmen und die Gleichung einer jeden

Classencurve — d. i. eine solche Curve, die durch die Bewegung einer Geraden entstanden gedacht wird — homogen machen, weshalb sie homogene Coordinaten der Geraden sind. Auch ersieht man, dass die Zahlen u, v, w und ku, kv, kw — k ein beliebiger Coefficient — eine und dieselbe Gerade angeben, denn in beiden Fällen haben die Achsenabschnitte a und b dieselben Werte, weshalb auch unendlich viele Systeme homogener Coordinaten u, v, w existieren, welche einer und derselben Geraden angehören.***) Es ist ferner klar, dass man die Gl. (h) wieder auf die nicht homogene Form (g) zurückführen kann, sobald man in derselben $w = 1$ setzt. Die eben definierten Liniencoordinaten sind die einfachsten homogenen Coordinaten einer Geraden, und es ergibt sich jetzt wohl von selbst, dass in der Gleichung $L \equiv Ax + By + C = o$ die Coefficienten A, B, C oder ihre gleichen Vielfachen als ein System homogener Coordinaten der durch diese Gleichung bestimmten Geraden erscheinen.

Um auch für die Geraden ein allgemeines System homogener Coordinaten zu erhalten, seien u_1, u_2 und u_3 drei Größen, welche mit den alten Plücker'schen Coordinaten u und v verbunden sind durch die drei linearen Gleichungen:

$$(146) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_1 u + B_1 v + C_1 \\ \sigma . u_2 &= A_2 u + B_2 v + C_2 \\ \sigma . u_3 &= A_3 u + B_3 v + C_3 , \end{aligned}$$

in welchen A_i, B_i, C_i neun gegebene Coefficienten bedeuten und σ ein Proportionalfactor ist, der bei der Berechnung von u_1, u_2, u_3 aus u, v ganz beliebig gewählt werden darf. Dass durch die Angabe der Größen u_i die Gerade eindeutig bestimmt ist, folgt sofort, wenn man die drei obigen Gleichungen nach u, v und σ auflöst, wodurch man die Ausdrücke erhält:

$$(k) \quad \ldots \quad u = -\frac{(CBu)}{(ABu)}, \qquad v = -\frac{(ACu)}{(ABu)},$$

$$\sigma = \frac{(ABC)}{(ABu)},$$

oder

***) Auch diese homogenen Coordinaten wurden von O. Hesse eingeführt.

$$(l) \quad \ldots \quad \begin{aligned} u &= \frac{\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha_3' u_3}{\gamma'_1 u_1 + \gamma'_2 u_2 + \gamma'_3 u_3}, \\ v &= \frac{\beta'_1 u_1 + \beta'_2 u_2 + \beta'_3 u_3}{\gamma'_1 u_1 + \gamma'_2 u_2 + \gamma'_3 u_3}, \\ \sigma &= \frac{(ABC)}{\gamma'_1 u_1 + \gamma'_2 u_2 + \gamma'_3 u_3}, \end{aligned}$$

mittelst welchen sich u, v und σ in der That aus u_1, u_2, u_3 eindeutig bestimmen lassen. Gleichzeitig sagen die letzten Gleichungen aus, dass für u und v dieselben Werte zum Vorschein kommen, wenn man u_1, u_2, u_3 durch ihre gleichen Vielfachen ersetzt, und dass jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades zwischen u und v übergeht in eine homogene Gleichung desselben Grades zwischen u_1, u_2, u_3, sobald man in die Originalgleichung für u und v die in (l) gegebenen Werte einführt. Es sind somit thatsächlich die durch (146) definierten Größen u_i, $i = 1, 2, 3$, homogene Liniencoordinaten, die darin vorkommenden 9 Coefficienten A_i, B_i, C_i mögen was immer für Werte besitzen, wenn nur die aus ihnen gebildete 3^2 elementige Determinante (ABC) nicht verschwindet, weil ja sonst $\sigma = o$ werden würde, was nicht sein darf. Nachdem auch hier die in (146) erscheinenden Coefficienten A_i, B_i, C_i ganz beliebig gewählt werden dürfen, ist es auch gestattet, die Gleichungen (146) zu ersetzen durch die folgenden:

$$(147) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \sigma . u_1 &= \nu_1 (A_1 u + B_1 v + C_1) \\ \sigma . u_2 &= \nu_2 (A_2 u + B_2 v + C_2) \\ \sigma . u_3 &= \nu_3 . (A_3 u + B_3 v + C_3), \end{aligned}$$

in welchen die drei Coefficienten ν_1, ν_2, ν_3 willkürlich, aber fest gewählt sind.

Die aus den Gleichungen (147) fließenden Werte von u_i haben nun ebenfalls eine höchst einfache geometrische Bedeutung, mit deren Auffindung wir uns in dem Folgenden beschäftigen. Zu diesem Zwecke wird zunächst darauf aufmerksam gemacht, dass eine jede der drei Gleichungen

$$(m) \quad \ldots \quad M_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o$$

einen Punkt darstellt, welche drei Punkte aber unmöglich in einer und derselben Geraden liegen können, weil ja nach der gemachten Voraussetzung die Determinante (ABC)

nicht gleich null ist. Es wird demnach durch die hier vorliegenden drei Punkte in den Gleichungen (m) ein Dreieck $M_1 M_2 M_3$ bestimmt und lässt sich sofort zeigen, dass die Normaldistanzen e_i der Geraden (L), von den Coordinaten u, v, von den drei Ecken M_i dieses Dreiecks zu den aus (147) fließenden Werten von u_i in einer sehr einfachen Beziehung stehen. Nach Gl. (57) in § 12 ist nämlich die Normaldistanz der durch die Coordinaten u, v bestimmten Geraden (L) von dem durch die Gl. (m) gegebenen Punkte M_i gleich

$$(n) \quad . \; . \; . \quad e_i = \frac{A_i u + B_i v + C_i}{C_i \sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

indem der Punkt M_i die alten Coordinaten $x_i = \frac{A_i}{C_i}$, $y_i = \frac{B_i}{C_i}$ besitzt. Durch die Elimination des Trinoms $A_i u + B_i v + C_i$ aus den Gleichungen (147) und (n) folgt aber

$$\sigma . u_i = \nu_i C_i \sqrt{u^2 + v^2} . e_i,$$

oder

$$(148) \quad . \; . \; . \quad \sigma . u_i = \mu_i . e_i,$$

sobald man $\sqrt{u^2 + v^2}$ in σ eingehen lässt und noch setzt

$$(149) \quad . \; . \; . \quad \mu_i = \nu_i . C_i.$$

Die Größen u_i sind daher den Normaldistanzen e_i der Geraden (L) von den Ecken M_i eines Dreiecks, jede dieser Normaldistanzen multipliciert mit einem beliebigen, aber fest gewählten Coëfficienten, direct proportioniert, weshalb man auch u_i die Dreieckcoordinaten (trigonalen Coordinaten) der Geraden nennt. Man gelangt sonach schließlich zu der nachfolgenden einfachen Definition für diese homogenen Coordinaten einer Geraden, u. zw.:

Die homogenen Coordinaten einer Geraden sind drei Zahlen, welche den Normaldistanzen der Geraden von den drei Ecken eines Dreiecks, diese Normaldistanzen multipliciert mit drei beliebigen, aber fest gewählten Coefficienten, direct proportioniert erscheinen.

Es ist daher für sich klar, dass für die drei Ecken M_1, M_2 und M_3 des Dreiecks beziehungsweise die Gleichungen gelten:

$$u_1 = o, \quad u_2 = o, \quad u_3 = o,$$

während für die Gegenseiten $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$

$$\begin{aligned} u_2 &= o, & u_3 &= o; \\ u_3 &= o, & u_1 &= o; \\ u_1 &= o, & u_2 &= o \end{aligned}$$

wird.

§ 27. Das Fundamentaldreieck.

Aus den beiden vorangegangenen Paragraphen ersieht man, dass der Bestimmung eines Punktes durch homogene Coordinaten ein Dreiseit, jener einer Geraden durch solche Coordinaten ein Dreieck zu Grunde gelegt werden kann. In dem Folgenden lassen wir nun das Dreieck mit dem Dreiseit zusammenfallen, und nennen es das Fundamental-Dreieck oder auch das Coordinatendreieck. Die drei Seiten dieses Dreiecks bezeichnen wir ferner mit (x_1), (x_2), (x_3) und die den letzteren gegenüber liegenden Ecken mit M_1, M_2, M_3. Sind jetzt noch

$$(a) \; \ldots\ldots \quad \begin{aligned} a_{1,1}\, x + a_{1,2}\;\; y + a_{1,3} &= o \\ a_{2,1}\, x + a_{2,2}\;\; y + a_{2,3} &= o \\ a_{3,1}\, x + a_{3,2}\;\; y + a_{3,3} &= o \end{aligned}$$

die Gleichungen der drei Seiten (x_1), $(x)_2$, (x_3) des Fundamentaldreiecks, so resultieren die Coordinaten ξ_i, η_i der drei Ecken M_i dieses Dreiecks aus:

$$(b) \; \ldots \; \xi_1 = \frac{A_{1,1}}{A_{1,3}}, \eta_1 = \frac{A_{1,2}}{A_{1,3}}; \; \xi_2 = \frac{A_{2,1}}{A_{2,3}}, \eta_2 = \frac{A_{2,2}}{A_{2,3}};$$
$$\xi_3 = \frac{A_{3,1}}{A_{3,3}}, \eta_3 = \frac{A_{3,2}}{A_{3,3}},$$

wenn wieder $A_{i,k} = (-1)^{i+k}$. $D_{i,k}$ ist und $D_{i,k}$ diejenige Minore oder Unterdeterminante bedeutet, welche aus der 3^2 elementigen Determinante

$$(c) \; \ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

dadurch hervorgeht, dass man in derselben die Zeile i und Colonne k unterdrückt und aus den übrig bleibenden 4 Elementen eine neue Determinante bildet. Die Gleichungen der drei Ecken des Fundamentaldreiecks lauten daher:

$$(d) \ldots \quad \begin{aligned} A_{1,1} u + A_{1,2} v + A_{1,3} &= o \\ A_{2,1} u + A_{2,2} v + A_{2,3} &= o \\ A_{3,1} u + A_{3,2} v + A_{3,3} &= o, \end{aligned}$$

und folglich dienen zur Bestimmung der homogenen Coordinaten x_i, $i = 1, 2, 3$, eines Punktes M, wenn x, y die Parallel-Coordinaten des letzteren bedeuten, nach Gl. (143) die einfachen Relationen:

$$(e) \ldots \quad \rho x_i = k_i (a_{i,1} x + a_{i,2} y + a_{i3}) \quad i = 1, 2, 3;$$

dagegen resultieren die homogenen Coordinaten u_i einer Geraden (L), bestimmt durch die alten Plücker'schen Coordinaten u, v, nach Gl. (147) aus

$$(f) \ldots \quad \sigma u_i = v_i (A_{i,1} u + A_{i,2} v + A_{i,3}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Coefficienten k_i und v_i, welche in den Gleichungen (e) und (f) vorkommen, sind bekanntlich ganz frei wählbar und deshalb ist es auch erlaubt $k_i = v_i = 1$ zu nehmen, wodurch dann, zufolge der früheren Gleichungen (145) und (149), auch $\lambda_i = \pm \sqrt{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2}$ und $\mu_i = A_{i,3}$, mithin $\rho x_i = \pm \sqrt{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2} \cdot \delta_i$ und $\sigma u_i = A_{i,3}\, e_i$ werden, ferner die Gleichungen (e) und (f) übergehen in die einfacheren:

(150) . . .	. . . (151)
$\rho \cdot x_1 = a_{1,1} x + a_{1,2} y + a_{1,3}$	$\sigma u_1 = A_{1,1} u + A_{1,2} v + A_{1,3}$
$\rho \cdot x_2 = a_{2,1} x + a_{2,2} y + a_{2,3}$	$\sigma u_2 = A_{2,1} u + A_{2,2} v + A_{2,3}$
$\rho \cdot x_3 = a_{3,1} x + a_{3,2} y + a_{3,3},$	$\sigma u_3 = A_{3,1} u + A_{3,2} v + A_{3,3},$

und diese Gleichungen dienen zur Bestimmung der homogenen Punkt- und Liniencoordinaten aus den gebräuchlichen Coordinaten x, y, beziehungsweise u, v. Die eben gewonnenen Gleichungen können aber auch sehr leicht nach x und y, beziehungsweise u und v, aufgelöst werden. Multipliciert man nämlich die drei Gleichungen (150) der Reihe nach mit den bereits bekannten Coefficienten $A_{1,1}$, $A_{2,1}$, $A_{3,1}$ und addiert sie hierauf und wiederholt dieses Verfahren noch zweimal, nur mit dem Unterschiede, dass man an die Stelle der früheren Coefficienten, diesmal $A_{1,2}$, $A_{2,2}$, $A_{3,2}$, beziehungsweise $A_{1,3}$, $A_{2,3}$, $A_{3,3}$, treten lässt; unterwirft alsdann die Gleichungen (151) denselben algebraischen Operationen, aber mit $a_{i,k}$ für $A_{i,k}$, so ergeben sich unter gleichzeitiger Berücksichtigung des bekannten Hauptsatzes der Determinanten-

theorie, nach welchem nämlich die Summe: $a_{1,k} A_{1,\sigma} + a_{2k} A_{2,\sigma} + a_{3,k} A_{3,\sigma}$ gleich A oder gleich null wird, je nachdem $k = \sigma$ oder k von σ verschieden ist, die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A \cdot x &= \varrho \cdot (A_{1,1} x_1 + A_{2,1} x_2 + A_{3,1} x_3) \\
A \cdot y &= \varrho \cdot (A_{1,2} x_1 + A_{2,2} x_2 + A_{3,2} x_3) \\
A &= \varrho \cdot (A_{1,3} x_1 + A_{2,3} x_2 + A_{3,3} x_3) \\
A \cdot u &= \sigma (a_{1,1} u_1 + a_{2,1} u_2 + a_{3,1} u_3) \\
A \cdot v &= \sigma (a_{1,2} u_1 + a_{2,2} u_2 + a_{3,2} u_3) \\
A &= \sigma (a_{1,3} u_1 + a_{2,3} u_2 + a_{3,3} u_3)
\end{aligned}$$

und aus diesen folgt

(152) . . . . . . (153)

$$x = \frac{A_{1,1} x_1 + A_{2,1} x_2 + A_{3,1} x_3}{A_{1,3} x_1 + A_{2,3} x_2 + A_{3,3} x_3}, \quad u = \frac{a_{1,1} u_1 + a_{2,1} u_2 + a_{3,1} u_3}{a_{1,3} u_1 + a_{2,3} u_2 + a_{3,3} u_3},$$

$$y = \frac{A_{1,2} x_1 + A_{2,2} x_2 + A_{3,2} x_3}{A_{1,3} x_1 + A_{2,3} x_2 + A_{3,3} x_3}, \quad v = \frac{a_{1,2} u_1 + a_{2,2} u_2 + a_{3,2} u_3}{a_{1,3} u_1 + a_{2,3} u_2 + a_{3,3} u_3}.$$

Mittelst der eben gewonnenen Gleichungen kann man also von den homogenen Coordinaten eines Punktes oder einer Geraden auf die rechtwinkeligen Coordinaten dieser Gebilde schließen. Wir werden später von diesen Gleichungen noch Gebrauch machen.

Bekanntlich besteht zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punkets M und denjenigen u, v einer durch ihn gelegten Geraden nach § 9, Gl. (21), die höchst einfache Beziehung $ux + vy + 1 = o$; es lässt sich nun ebenfalls eine analoge Beziehung zwischen den homogenen Coordinaten x_i eines Punktes M und den homogenen Coordinaten u_i einer durch letzteren gehenden Geraden (L) herleiten. Aus den sechs Gleichungen (150) und (151) ergibt sich nämlich zunächst

$$\sigma \varrho \, (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = \sum_{i=1}^{i=3} (a_{i,1} x + a_{i,2} y + a_{i3}) (A_{i,1} u + A_{i,2} v + A_{i,3})$$

und hieraus, weil die Summe $a_{i,1} A_{\varrho,1} + a_{i,2} \cdot A_{\varrho,2} + a_{i,3} \cdot A_{\varrho,3}$ nach einem bekannten Hauptsatze der Determinantentheorien gleich A oder gleich null wird, je nachdem $\varrho = i$ oder ϱ von i verschieden ist

$$\varrho \sigma \, (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = A \cdot (ux + vy + 1).$$

Nun ist aber, wenn der Punkt M von den Coordinaten x, y in der Geraden von den Coordinaten u, v liegt, d. h. M und (L) perspectivisch sind, allemal $ux + vy + 1 = o$, daher wird auch

(154) . . . $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$

und d. i. also die Bedingung, welcher die homogenen Coordinaten x_i eines Punktes M und diejenigen u_i einer Geraden (L) unterworfen sind, sobald M in (L) liegt, u. zw. bei der hier getroffenen Wahl von k_i und v_i. Wir werden später andere Werte für k_i und v_i wählen und alsdann für Gl. (154) auch eine andere, etwas compliciertere Relation zwischen u_i und x_i erhalten.

Zum Schlusse dieses Paragraphen mag noch gezeigt werden, in welcher Weise das alte rechtwinkelige Coordinatensystem aus dem eben vorgeführten allgemeineren hervorgeht. Zu diesem Zwecke lasse man die Fundamentallinien (x_1) und (x_2) des Coordinatendreiecks mit den Achsen (y) und (x) eines rechtwinkeligen Coordinatensystems zusammenfallen (Fig. 33), wodurch $\delta_1 = x$, $\delta_2 = y$ wird und

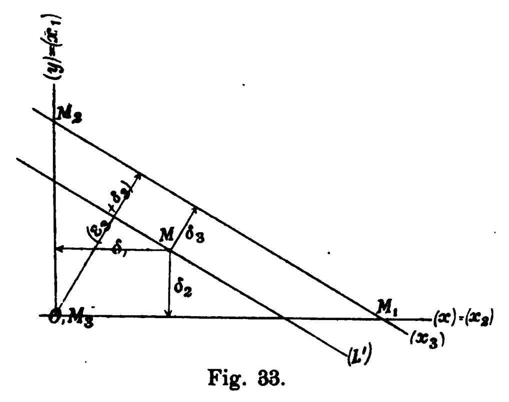


Fig. 33.

zufolge (144) zwischen den homogenen Coordinaten x_i des Punktes M und seinen gebräuchlichen x, y die einfachen Beziehungen bestehen:

$$\varrho \,.\, x_1 = \lambda_1 \,.\, x, \qquad \varrho x_2 = \lambda_2 \,.\, y, \qquad \varrho x_3 = \lambda_3 \,.\, \delta_3.$$

Die in diesen Gleichungen erscheinenden Coefficienten λ_i können aber, wie bereits gesagt wurde, ganz beliebig angenommen werden und wir treffen nun diesmal die Wahl:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\varepsilon_3 + \delta_3},$$

wo ε_3 die Normaldistanz einer durch den Punkt M zur Fundamentallinie (x_3) gelegten Parallelen (L') vom Ursprunge O des rechtwinkeligen Coordinatensystems bedeutet. Dadurch wird aber

$$\varrho \cdot x_1 = x, \quad \varrho x_2 = y, \quad \varrho x_3 = \frac{\delta_3}{\varepsilon_3 + \delta_3} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_3}{\delta_3}}$$

und hieraus folgt, sobald man noch die dritte Seite (x_3) des Coordinatendreiecks mit der unendlich fernen Geraden (L_∞) der Ebene dieses Dreiecks zusammenfallen lässt, wodurch dann δ_3 unendlich groß wird,

$$(155) \quad \ldots \quad \varrho x_1 = x, \quad \varrho x_2 = y, \quad \varrho x_3 = 1,$$

oder

$$(156) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Lässt man daher die beiden Seiten (x_1) und (x_2) des Fundamentaldreiecks mit den Achsen (y) und (x) eines rechtwinkeligen Coordinatensystems und die dritte Seite (x_3) dieses Dreiecks mit der unendlich fernen Geraden (L_∞) der Ebene, in welcher das Coordinatendreieck sich befindet, zusammenfallen und setzt den Proportionalfactor $\varrho = 1$, so wird $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ und hieraus ersieht man, dass die rechtwinkeligen Coordinaten x, y eines Punktes aus seinen homogenen x_1, x_2, x_3 hervorgehen, d. h. also, es können auch x, y und 1 oder ihre gleichen Vielfachen kx, ky und k als ein System homogener Coordinaten desjenigen Punktes betrachtet werden, der durch die rechtwinkeligen Coordinaten x, y bestimmt erscheint.

Dieselbe Betrachtung kann nun auch auf die Coordinaten einer Geraden (L) übertragen werden, und es wird wieder vorausgesetzt, dass die durch die gebräuchlichen Coordinaten u, v bestimmte Gerade die homogenen Coordinaten u_i besäße, und x, y, beziehungsweise x_i, einen Punkt M der (L) fixieren. Alsdann bestehen nach Gl. (21) und (154) gleichzeitig die Beziehungen:

$$(g) \quad \ldots \quad ux + vy + 1 = o, \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o.$$

Lässt man auch hier wieder (x_1) mit (y), (x_2) mit (x) und (x_3) mit (L_∞) zusammenfallen, so geht nach (156) die zweite der obigen Gleichungen über in

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = o$$

und aus dieser, sowie der ersten der Gleichungen (g), folgt unmittelbar

$$(157) \quad \sigma u_1 = u, \qquad \sigma u_2 = v, \qquad \sigma u_3 = 1,$$

oder

$$(158) \quad u = \frac{u_1}{u_3}, \qquad v = \frac{u_2}{u_3},$$

d. h. die zwischen den rechtwinkeligen und homogenen Punktcoordinaten stattfindenden Beziehungen (155) gelten auch für die Liniencoordinaten und können demnach, sobald u, v die rechtwinkeligen Coordinaten einer Geraden repräsentieren, $u, v, 1$ oder ku, kv, k als ein System homogener Coordinaten derselben betrachtet werden.

Auf Grund dieser Untersuchungen gelangt man daher zur Einsicht, dass die rechtwinkeligen Punkt- oder Liniencoordinaten in den homogenen Coordinaten des Punktes und der Geraden enthalten sind, und dass aus einer homogenen Gleichung zwischen den Coordinaten x_1, x_2 und x_3 oder u_1, u_2 und u_3 sofort diejenige in rechtwinkeligen Coordinaten x, y, oder u, v erhalten wird, wenn man in der Originalgleichung $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = 1$, beziehungsweise $u_1 = u$, $u_2 = v$ und $u_3 = 1$ setzt.

§ 28. Homogene Gleichung der Geraden und des Punktes.

Zwischen den homogenen Coordinaten u_i einen Geraden (L) und denjenigen x_1 eines in ihr liegenden Punktes M besteht nach dem Früheren die Beziehung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o$. Es ist daher in analoger Weise, wie in § 11

$$(159) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o$$

die homogene Gleichung einer Geraden von den Coordinaten u_i, $i = 1, 2, 3$, wenn u_i constant und x_i veränderlich gedacht werden,

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = o \quad (160)$$

die homogene Gleichung eines Punktes von den Coordinaten x_i, $i = 1, 2, 3$, wenn x_i constant und u_i veränderlich gedacht werden,

und aus diesen Gleichungen folgt, dass das geometrische Aquivalent der homogenen und linearen Gleichung

(161). $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ eine Gerade ist von den Coordinaten a_1, a_2, a_3, während x_1, x_2, x_3 die Coordinaten irgend eines Punktes in dieser Geraden angeben.

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = o$. (162) ein Punkt ist von den Coordinaten α_1, α_2, α_3, während u_1, u_2, u_3 die Coordinaten irgend einer Geraden aus diesem Punkte sind.

Wir haben somit die allgemeine Gleichung der Geraden und des Punktes in homogenen Coordinaten gefunden und erlauben uns noch einige hierher gehörige Aufgaben vorzuführen, die bei den folgenden Untersuchungen in Dreieckcoordinaten wichtig erscheinen.

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung einer Geraden, welche durch die Ecke M_i des Fundamentaldreiecks geht.

Lösung. Ist M_1 die Ecke, durch welche die Gerade gelegt werden soll, so muss die Gleichung (161) befriedigt werden für $x_2 = x_3 = o$ und $x_1 = k_1 h_1$, wenn h_1 die Normaldistanz des Punktes M_1 von (x_1) angibt, und dies bedingt $a_1 = o$. Die Gleichung der Geraden nimmt sonach die einfachere Form an $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$, und es sind daher $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$, $a_3 x_3 + a_1 x_1 = o$, $a_1 x_1 + a_2 x_2 = o$ die Gleichungen von drei Geraden, welche beziehungsweise durch die Ecken

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3$$

des Coordinatendreiecks hindurchgehen. Leicht ist es

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung eines Punktes, welcher in einer Seite x_i des Fundamentaldreiecks liegt.

Lösung. Ist (x_1) die Seite, in welcher der Punkt liegt, so muss die Gleichung (162) befriedigt werden für $u_2 = u_3 = o$ und $u_1 = v_1 h_1$, wenn auch hier h_1 die Normaldistanz der Ecke M_1 von (x_1) bedeutet, und dies bedingt $\alpha_1 = o$. Die Gleichung des Punktes nimmt sonach die einfachere Form $\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = o$ an, und es sind daher $\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = o$, $\alpha_3 u_3 + \alpha_1 u_1 = o$, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = o$ die Gleichungen von drei Punkten, welche beziehungsweise auf den Seiten

$$(x_1), \quad (x_2), \quad (x_3)$$

des Coordinatendreiecks liegen. Von selbst ergeben sich

jetzt auch, die Gleichungen derjenigen drei Geraden aufzustellen, welche die Ecken M_i des Fundamentaldreiecks mit einem Punkte M' von den Coordinaten x'_i verbinden. Dieselben lauten:

$$\frac{x_2}{x_2'} - \frac{x_3}{x_3'} = o, \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_1}{x_1'} = o,$$
$$\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} = o.$$

Aufgabe. Es ist die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte M' und M'' aufzustellen, wenn x_i' und x_i'', $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten der letzteren sind.

Lösung. Die Gleichung der Geraden ist

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o.$$

Soll nun die Gerade die Punkte M' und M'' enthalten, so muss das obige Gleichungspolynom für $x_i = x_i'$, sowie für $x_i = x_i''$ verschwinden, d. h., es müssen die beiden Gleichungen bestehen

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' = o,$$
$$a_1 x_1'' + a_2 x_2'' + a_3 x_3'' = o$$

nun auch die Gleichungen der drei Punkte, in welchen die Seiten (x_i) des Fundamentaldreiecks von einer Geraden (L'), deren Coordinaten u'_i sind, geschnitten werden. Dieselben lauten:

$$\frac{u_2}{u_2'} - \frac{u_3}{u_3'} = o, \frac{u_3}{u_3,} - \frac{u_1}{u_1'} - o,$$
$$\frac{u_1}{u_1'} - \frac{u_2}{u_2'} = o.$$

Aufgabe. Es ist die Gleichung des Schnittpunktes der beiden Geraden (L') und (L'') aufzustellen, wenn u_i' und u_i'', $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten der letzteren sind.

Lösung. Die Gleichung des Punktes ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = o.$$

Soll nun der Punkt in den Geraden (L') und (L'') liegen, so muss das obige Gleichungspolynom für $u_i = u_i'$, sowie für $u_i = u_i''$ verschwinden, d. h., es müssen die beiden Gleichungen bestehen

$$\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' = o,$$
$$\alpha_1 u_1'' + \alpha_2 n_2'' + \alpha_3 u_3'' = o$$

und aus diesen und der ersten Gleichung ergibt sich durch die Elimination von a_i, respective α_i

$$(163) \ldots \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = o, \ldots (164)$$

oder

$(x_2' x_3'' - x_2'' x_3') x_1 + (x_3' x_1'' - x_3'' x_1') x_2 + (x_1' x_2'' - x_2' x_1'') x_3 = o$

$(u_2' u_3'' - u_2'' u_3') u_1 + (u_3' u_1'' - u_3'' u_1') u_2 + (u_1' u_2'' - u_2' u_1'') u_3 = o$

als die gesuchte Gleichung der Geraden, beziehungsweise des Punktes. Ersetzt man in diesen beiden eben gewonnenen Gleichungen x_1, x_2, x_3 durch $x, y, 1$ und u_1, u_2, u_3 durch $u, v, 1$, so gelangt man zu den früher gefundenen Gleichungen (29) und (44).

Jetzt ist es aber auch leicht, die Bedingung anzugeben, welcher die Coordinaten x_i', x_i'', x_i''' dreier Punkte einer und derselben Geraden, oder die Coordinaten u_i', u_i'', u_i''' dreier Geraden aus einem und demselben Punkte unterworfen sind, und man findet

$$(165) \ldots \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} u_1', & u_2', & u_3' \\ u_1'', & u_2'', & u_3'' \\ u_1''', & u_2''', & u_3''' \end{vmatrix} = o \ldots (166)$$

und hieraus ersieht man, dass die früheren Gleichungen (53) und (54) auch wieder in Kraft treten.

Aufgabe Man bestimme die homogenen Gleichungen der Achsen (x) und (y) des rechtwinkeligen Coordinatensystems, sowie die Gleichung der unendlich fernen Geraden (L_∞).

Lösung. Nachdem, wie in § 9 gezeigt wurde, die Gleichungen dieser Achsen in rechtwinkeligen Punktcoordinaten beziehungsweise sind

$$y = o, \qquad x = o,$$

so sind nach den Gleichungen (152)

$$A_{1,1} x_1 + A_{2,1} x_2 + A_{3,1} x_3 = o$$
$$A_{1,2} x_1 + A_{2,2} x_2 + A_{3,2} x_3 = o$$

die gesuchten homogenen

Aufgabe. Man suche die homogene Gleichung der unendlich fernen Punkte x_∞ und y_∞ der Achsen (x) und (y) des rechtwinkeligen Coordinatensystems, sowie die Gleichung des Ursprungs O.

Lösung. Nachdem, wie in § 10 gezeigt wurde, die Gleichungen der unendlich fernen Punkte x_∞ und y_∞ in rechtwinkeligen Liniencoordinaten beziehungsweise sind

$$u = o, \qquad v = o,$$

so sind nach den Gleichungen (153)

$$a_{1,1} u_1 + a_{2,1} u_2 + a_{3,1} u_3 = o$$
$$a_{1,2} u_1 + a_{2,2} u_2 + a_{3,2} u_3 = o$$

die gesuchten homogenen

Gleichungen der Coordinatenachsen (y) und (x).

Auf die homogene Gleichung der unendlich fernen Geraden übergehend, bemerke ich, dass für sämmtliche Punkte derselben $x = \infty$, $y = \infty$, oder $\frac{1}{x} = o$, $\frac{1}{y} = o$ sein muss, was zufolge der früheren Gleichungen (152) nur dann möglich ist, wenn die homogenen Coordinaten x_i aller Punkte dieser Geraden der Bedingung genügen

$$(167) \ldots L_\infty \equiv A_{1,3} x_1 + A_{2,3} x_2 + A_{3,3} x_3 = o,$$

und d. i. somit die Gleichung der unendlich fernen Geraden der Ebene des Coordinatendreiecks bei der früher getroffenen Wahl der Coefficienten k_i und v_i. Hätte man für die letzteren andere Werte gewählt, so würde auch obige Gleichung eine andere Form angenommen haben.

Sehr einfach wird die Gleichung der unendlich fernen Geraden, wenn zwischen den homogenen Coordinaten x_i und den gebräuchlichen Coordinaten x, y eines Punktes die einfachen Beziehungen bestehen:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3};$$

Gleichungen der unendlich fernen Punkte x_∞ und y_∞.

Auf die homogene Gleichnng des Ursprungs O übergehend, bemerke ich, dass für sämmtliche Strahlen aus demselben die rechtwinkeligen Coordinaten $u = \infty$, $v = \infty$, oder deren Reciproken $\frac{1}{u} = o$, $\frac{1}{v} = o$ werden, was zufolge der früheren Gleichungen (153) nur dann möglich ist, sobald die homogenen Coordinaten u_i aller Strahlen aus O der Bedingung genügen

$$O \equiv a_{1,3} u_1 + a_{2,3} u_2 + a_{3,3} u_3 = o, \ldots (168)$$

und d. i. somit die Gleichung des Ursprungs O bei der früher getroffenen Wahl der Coefficienten k_i und v_i. Für andere Werte der letzteren hätte auch obige Gleichung eine andere Form angenommen.

Sehr einfach gestaltet sich die Gleichung des Ursprungs O, wenn zwischen den homogenen Coordinaten u_i und den gebräuchlichen Coordinaten u, v einer Geraden die einfachen Beziehungen obwalten:

$$u = \frac{u_1}{u_3}, \quad v = \frac{u_2}{u_3};$$

denn, weil in diesem Fall $A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = 1$ wird, während die übrigen Coefficienten $A_{i,k}$ verschwinden, so ist

$$L_\infty \equiv x_3 = o$$

die Gleichung der unendlich fernen Geraden.

Die letzte Gleichung kann auch direct aus jener $Ax + By + C = o$ hergeleitet werden, u. zw. dadurch, dass man letztere durch die Einführung von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ für x und y homogen macht und hierauf, im Sinne des in § 9 für die unendlich ferne Gerade bereits Gesagten, $A = B = o$ setzt. Man erhält dann zunächst

$$Ax + By + Cz = o$$

als die homogene Gleichung der Geraden und hieraus für $A = B = o$

$$C.z = o,$$

welche Gleichung, weil C bei der unendlich fernen Geraden nicht null sein darf, die Form annimmt

$$(169) \quad . \; . \; . \quad L_\infty \equiv z = o,$$

und d. i. somit die Gleichung der unendlich fernen Geraden bei der einfachsten Wahl homogener Punktcoordinaten.

denn, weil in diesem Fall $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 1$ wird, während die übrigen Coefficienten $a_{i,k}$ verschwinden, so ist

$$O \equiv u_3 = o$$

die Gleichung des Ursprungs O.

Die letzte Gleichung kann auch direct aus jener $Au + Bv + C = o$ gefunden werden, u. zw. dadurch, dass man letztere durch die Einführung von $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ für u und v homogen macht und hierauf, im Sinne des in § 10 für den Ursprung O bereits Gesagten, $A = B = o$ setzt. Man erhält dann zunächst

$$Au + Bv + Cw = o$$

als die homogene Gleichung des Punktes und hieraus für $A = B = o$

$$C.w = o,$$

welche Gleichung, weil C bei dem Ursprunge O nicht null sein darf, die Form annimmt

$$O \equiv w = o, \quad . \; . \; . \quad (170)$$

und d. i. somit die Gleichung des Ursprungs O bei der einfachsten Wahl homogener Liniencoordinaten.

§ 29. Transformation der Coordinaten.

Man denke sich (Fig. 34) zwei Coordinatendreiecke $M_1 M_2 M_3$ und $M_1' M_2' M_3'$ von den Seiten (x_i) und (x_i'), deren Gleichungen, bezogen auf das rechtwinkelige Coordinatensystem von den Achsen (x) und (y), lauten: $a_{i,1} x + a_{i,2} y + a_{i,3} = o$, beziehungsweise $a_{i,1}' x + a_{i,2}' y + a_{i,3}' = o$, $i = 1, 2, 3$. Bezeichnen nun x_i und x_i' die trilinearen Coordinaten irgend eines Punktes M, bezogen auf diese beiden Coordinatendreiecke, dagegen x, y die rechtwinkeligen Coordinaten desselben Punktes, so bestehen zwischen letzteren und ersteren, zufolge der Gleichungen (150), die Beziehungen:

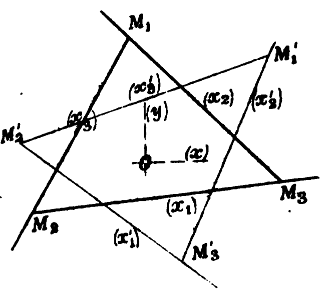


Fig. 34.

$$(a) \,.\, \varrho x_i = a_{i,1} x + a_{i,2} y + a_{i,3}, \quad \varrho x_i' = a_{i,1}' x + a_{i,2}' y + a_{i,3}' \,.(b)$$

Die Aufgabe aber, welche hier gestellt wird, besteht darin, x_i' durch x_i oder x_i durch x_i' auszudrücken, und dies geschieht dadurch, dass man aus obigen Gleichungen x und y eliminiert, wozu man bloß die aus (a) resultierenden Werte von x und y in (b) zu substituieren braucht. Die aus (a) hervorgehenden Werte von x und y sind jedoch bereits in den Gleichungen (152) angegeben, und durch Einführung derselben in (b) erhält man, sobald man noch die Gleichungen (b) nach erfolgter Substitution mit dem Trinom $(A_{1,3} x_1 + A_{2,3} x_2 + A_{3,3} x_3)$ multipliciert und letzteres links vom Gleichheitszeichen in den Proportionalfactor ϱ mit einbezieht:

$$\varrho x_i' = (a_{i,1}' A_{1,1} + a_{i,2}' A_{1,2} + a_{i,3}' A_{1,3}) x_1 + (a_{i,1}' A_{2,1} + a_{i,2}' A_{2,2} + a_{i,3}' A_{2,3}) x_2 + (a_{i,1}' A_{3,1} + a_{i,2}' A_{3,2} + a_{i,3}' A_{3,3}) x_3 .$$

Die Transformationsgleichungen für homogene Punktcoordinaten sind demnach:

$$(171) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \varrho x_1' &= b_{1,1} x_1 + b_{1,2} x_2 + b_{1,3} x_3 \\ \varrho x_1' &= b_{2,1} x_1 + b_{2,2} x_2 + b_{2,3} x_3 \\ \varrho x_3' &= b_{3,1} x_1 + b_{3,2} x_2 + b_{3,3} x_3, \end{aligned}$$

$$(172) \ldots \quad \begin{aligned} \mu x_1 &= B_{1,1} x_1' + B_{2,1} x_2' + B_{3,1} x_3' \\ \mu x_2 &= B_{1,2} x_1' + B_{2,2} x_2' + B_{3,2} x_3' \\ \mu x_3 &= B_{1,3} x_1' + B_{2,3} x_2' + B_{3,3} x_3', \end{aligned}$$

wenn

$$B = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}$$

die aus den 3^2 Elementen $b_{i,k}$ gebildete 3^2 elementige Determinante darstellt, während die Coefficienten $B_{i,k}$ zu B in demselben Verhältnisse stehen, wie früher $A_{i,k}$ zu A, d. h. es ist $B_{i,k}$ gleich $(-1)^{i+k}$ multipliciert mit jener Minore, die aus B dadurch hervorgeht, dass man dort die Zeile i und Colonne k unterdrückt und aus den übrigen 2^2 Elementen $b_{i,k}$ eine neue Determinante bildet. Gleichzeitig sei hier noch erwähnt, dass die Gleichungen (172) aus den vorhergehenden (171) unmittelbar erhalten werden, wenn man die letzteren mit den Coefficienten $B_{1,k}$, $B_{2,k}$, $B_{3,k}$ multipliciert, $k = 1,2,3$, sie hierauf addiert und hierbei wieder darauf Bedacht nimmt, dass $b_{1,\sigma} B_{1,k} + b_{2,\sigma} B_{2,k} + b_{3,\sigma} B_{3k}$ gleich B oder null wird, je nachdem σ gleich k, oder von k verschieden erscheint.

Noch handelt es sich aber, die diesbezüglichen Transformationsgleichungen für Liniencoordinaten zu finden, und man denke sich zu diesem Zwecke durch M eine Gerade (L) gelegt, deren homogene Coordinaten in den beiden Dreiecken $M_1 M_2 M_3$ und $M_1' M_2' M_3'$ wieder u_i und u_i' wären, weshalb die Gleichung dieser Geraden in dem ersten und zweiten Dreieck beziehungsweise lautet:

$$(c) \ldots \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$$

$$(d) \ldots \quad u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3' = o.$$

Nachdem aber die beiden letzten Gleichungen einer und derselben Geraden angehören, so kann das Gleichungspolynom in (c), nach erfolgter Substitution der in den Gleichungen (172) gegebenen Werte von x_i, von dem Gleichungspolynom in (d) bloß durch einen Factor σ unterschieden sein, d. h. es ist

$$[(B_{1,1} u_1 + B_{1,2} u_2 + B_{1,3} u_3) x_1' + (B_{2,1} u_1 + B_{2,2} u_2 + B_{2,3} u_3) x_2' + (B_{3,1} u_1 + B_{3,2} u_2 + B_{3,3} u_3) x_3'] = \sigma (u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3'),$$

und daher nehmen die Transformationsgleichungen für homogene Liniencoordinaten die Gestalt an:

$$(173)\quad \begin{aligned} \sigma u_1' &= B_{1,1} u_1 + B_{1,2} u_2 + B_{1,3} u_3 \\ \sigma u_2' &= B_{2,1} u_1 + B_{2,2} u_2 + B_{2,3} u_3 \\ \sigma u_3' &= B_{3,1} u_1 + B_{3,2} u_2 + B_{3,3} u_3 ; \end{aligned}$$

$$(174)\quad \begin{aligned} \nu u_1 &= b_{1,1} u_1' + b_{2,1} u_2' + b_{3,1} u_3' \\ \nu u_2 &= b_{1,2} u_1' + b_{2,2} u_2' + b_{3,2} u_3' \\ \nu u_3 &= b_{1,3} u_1' + b_{2,3} u_2' + b_{3,3} u_3'. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die Gleichungen (174) nur eine unmittelbare Folge der Gleichungen (173) sind, und man erhält die letzteren aus den ersteren, wenn man diese mit den Coefficienten $b_{1,k}$, $b_{2,k}$, $b_{3,k}$, $k = 1, 2, 3$, multipliciert und hierauf addiert.

Die Transformationsgleichungen für homogene Punkt- und Liniencoordinaten sind also ebenfalls homogen und linear, daher ist der Grad einer homogenen Gleichung zwischen Punkt- oder Liniencoordinaten von der Wahl des Coordinatendreiecks völlig unabhängig. Ungeachtet dessen wird man aber das Coordinatendreieck stets der Art wählen, dass die Gleichung der Curve möglichst einfach ausfällt.

Zum Schlusse mögen noch die geometrischen Bedeutungen der in den Gleichungen (171) bis (174) vorkommenden Coefficienten $b_{i,k}$ und $B_{i,k}$ erörtert werden. Nachdem $x_1' = o$, $x_2' = o$, $x_3' = o$ die Gleichungen der drei Seiten und $u_1' = o$, $u_2' = o$, $u_3' = o$ jene der drei Ecken des Coordinatendreiecks $M_1' M_2' M_3'$ sind, repräsentieren nämlich

$$\begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{matrix}$$

die Coordinaten der Seiten und Ecken des Coordinatendreiecks $M_1' M_2' M_3'$, bezogen auf das alte $M_1 M_2 M_3$. Umgekehrt sind nun auch

$$\begin{matrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{2,3} & b_{3,3} \end{matrix}$$

die Coordinaten der Seiten und Ecken des Coordinatendreiecks $M_1 M_2 M_3$, bezogen auf das neue $M_1' M_2' M_3'$.

§ 30. Coordinaten und Gleichung eines Theilpunktes und Theilstrahls.

Es seien zwei Punkte M' und M'' gegeben durch ihre homogenen Coordinaten x_i' und x_i'', $i = 1, 2, 3$; es wird gefragt, in welcher Beziehung steht der durch die homogenen Coordinaten

$$(175) \ldots x_i = k' x_i' + k'' x_i''$$

bestimmte Punkt M zu den beiden ersten Punkten?

Diese Aufgabe erscheint sofort gelöst, sobald man aus den homogenen Coordinaten obiger drei Punkte die gebräuchlichen rechtwinkeligen Coordinaten der letzteren berechnet, wozu die früheren Gleichungen (152) dienen. Nennt man demnach x', y'; x'', y'' und x, y die gebräuchlichen rechtwinkeligen Coordinaten der Punkte M', M'' und M, so wird nach diesen Gleichungen:

$$x' = \frac{\Sigma A_{i,1} x_i'}{\Sigma A_{i,3} x_i'}, \; y' = \frac{\Sigma A_{i,2} x_i'}{\Sigma A_{i,3} x_i'};$$

$$x'' = \frac{\Sigma A_{i,1} x_i''}{\Sigma A_{i,3} x_i''}, \; y'' = \frac{\Sigma A_{i,2} x_i''}{\Sigma A_{i,3} x_i''};$$

$$x = \frac{\Sigma A_{i,1} (k' x_i' + k'' x_i'')}{\Sigma A_{i,3} (k' x_i' + k'' x_i'')},$$

$$y = \frac{\Sigma A_{i,2} (k' x_i' + k'' x_i'')}{\Sigma A_{i,3} (k' x_i' + k'' x_i'')}.$$

Nun ist aber der Bruch, welcher den Wert von x darstellt, auch gleich

Es seien zwei Strahlen (L') und (L'') gegeben durch ihre homogenen Coordinaten u_i' und u_i'', $i = 1, 2, 3$; es wird gefragt, in welcher Beziehung steht der durch die homogenen Coordinaten

$$u_i = k' u_i' + k'' u_i'' \ldots (176)$$

bestimmte Strahl (L) zu den beiden ersten Strahlen?

Diese Aufgabe erscheint sofort gelöst, sobald man aus den homogenen Coordinaten obiger drei Strahlen die gebräuchlichen rechtwinkeligen Coordinaten der letzteren berechnet, wozu die früheren Gleichungen (153) dienen. Nennt man demnach u', v'; u'', v'' und u, v die gebräuchlichen rechtwinkeligen Coordinaten der Strahlen (L'), (L'') und (L), so wird nach den citirten Gleichungen:

$$u' = \frac{\Sigma a_{i,1} u_i'}{\Sigma a_{i,3} u_i'}, \; v' = \frac{\Sigma a_{i,2} u_i'}{\Sigma a_{i,3} u_i'}.$$

$$u'' = \frac{\Sigma a_{i,1} u_i''}{\Sigma a_{i,3} u_i''}, \; v'' = \frac{\Sigma a_{i,2} u_i''}{\Sigma a_{i,3} u_i''};$$

$$u = \frac{\Sigma a_{i,1} (k' u_i' + k'' u_i'')}{\Sigma a_{i,3} (k' u_i' + k'' u_i'')};$$

$$v = \frac{\Sigma a_{i,2} (k' u_i' + k'' u_i'')}{\Sigma a_{i,3} (k' u_i' + k'' u_i'')}.$$

Nun ist aber der Bruch, welcher den Wert von u darstellt, auch gleich

$$\frac{k'.\Sigma A_{i,1}x_i'+k''.\Sigma A_{i,1}x_i''}{k'.\Sigma A_{i,3}x_i'+k''.\Sigma A_{i,3}x_i''} = \frac{k'.\frac{\Sigma A_{i,1}x_i'}{\Sigma A_{i,3}x_i'}+k''.\frac{\Sigma A_{i,3}x_i''}{\Sigma A_{i,3}x_i'}.\frac{\Sigma A_{i,1}x_i''}{\Sigma A_{i,3}x_i''}}{k'+k''\frac{\Sigma A_{i,3}x_i''}{\Sigma A_{i,3}x_i'}}$$

und hieraus ersieht man, weil der den Wert von y darstellende Bruch auf dieselbe Form gebracht werden kann, sobald man noch die oben angegebenen Ausdrücke für $x', y' \dots$ berücksichtigt, dass

$$x = \frac{k'x'+k''Cx''}{k'+k''C},$$

$$y = \frac{k'y'+k''Cy''}{k'+k''C}$$

ist, und diese beiden Gleichungen lassen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der früher gefundenen Gleichungen (91) erkennen, dass der durch die Coordinaten in (175) bestimmte Punkt M in der Verbindungsgeraden der Punkte M' und M'' liegt und bezüglich der letzteren als Grundpunkte das Abstandsverhältnis

$$(177)..(M'M''M) = -C.\frac{k''}{k'}$$

besitzt, wenn C eine Constante bezeichnet, die von der Wahl des Punktes M in der Verbindungsgeraden $M'M''$ unabhängig erscheint.

$$\frac{k'\Sigma a_{i,1}u_i'+k''\Sigma a_{i,1}u_i''}{k'\Sigma a_{i,3}u_i'+k''\Sigma a_{i,3}u_i''} = \frac{k'\frac{\Sigma a_{i,1}u_i'}{\Sigma a_{i,3}u_i'}+k''.\frac{\Sigma a_{i,3}u_i''}{\Sigma a_{i,3}u_i'}.\frac{\Sigma a_{i,1}u_i''}{\Sigma a_{i,3}u_i''}}{k'+k''.\frac{\Sigma a_{i,3}u_i''}{\Sigma a_{i,3}u_i'}}$$

und hieraus ersieht man, weil der den Wert von v darstellende Bruch auf dieselbe Form gebracht werden kann, sobald man noch die oben angegebenen Ausdrücke für $u', v' \dots$ berücksichtigt, dass

$$u = \frac{k'u'+k''Du''}{k'+k''D},$$

$$v = \frac{k'v'+k''Dv''}{k'+k''D}$$

ist, und diese beiden Gleichungen lassen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der früher gefundenen Gleichungen (103) erkennen, dass der durch die Coordinaten in (176) bestimmte Strahl (L) durch den Schnittpunkt der Strahlen (L') und (L'') geht und bezüglich der letzteren als Grundstrahlen das Abstandsverhältnis

$$(L'L''L) = -D.\frac{k''}{k'}.\frac{d'}{d''}(178)$$

besitzt, wenn d' und d'' die Normaldistanzen der Strahlen (L') und (L'') vom Ursprunge O angeben und D eine Constante bedeutet, die von der Wahl des Strahls (L) aus dem Schnittpunkte von (L') mit (L'') unabhängig ist.

Es liegt in der Natur der homogenen Coordinaten, dass die eben gewonnenen Resultate unverändert bleiben, sobald der dritte Punkt M, beziehungsweise dritte Strahl (L), gegeben erscheint durch die aus den Gleichungen

$$\varrho x_i = k' x_i' + k'' x_i'' \quad | \quad \sigma u_i = k' u_i' + k'' u_i''$$

resultierenden Coordinaten, in welchen ϱ und σ Proportionalitätsfactoren sind, und dass, wenn die Coordinaten von M, beziehungsweise von (L), unterliegen den Relationen

$$\varrho x_i = x_i' - \lambda x_i'', \quad | \quad \varrho u_i = u_i - \lambda u_i'',$$

das Abstandsverhältnis

$$(M' M'' M) = \lambda . C \quad | \quad (L' L'' L) = \lambda \frac{d'}{d''} D$$

sein wird.

Wesentlich vereinfacht werden die Ausdrücke für $(M' M'' M)$ und $(L' L'' L)$, wenn an die Stelle der Dreieckcoordinaten die einfachsten homogenen Coordinaten treten, indem hier wieder $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = 1$ sind, dagegen die übrigen Coefficienten $a_{i,k}$ und $A_{i,k}$ sammt und sonders verschwinden und aus diesem Grunde $C = \frac{x_3''}{x_3'}$ und $D = \frac{u_3''}{u_3'}$ werden. Erscheinen somit drei

Punkte M', M'' und M gegeben durch die einfachsten homogenen Coordinaten x', y', z'; $x''\ y''\ z''$ und

$$x = k' x' + k'' x'',$$
$$y = k' y' + k'' y'',$$
$$z = k' z' + k'' z'',$$

so liegt M ebenfalls in der Verbindungsgeraden $M' M''$ und ist das Abstandsverhältnis von M, bezüglich M' und M'' als Grundpunkte, gleich

$$(M' M'' M) = -\frac{k''}{k'} \cdot \frac{z''}{z'}.$$

Strahlen (L'), (L'') und (L) gegeben durch die einfachsten homogenen Coordinaten u', v', w'; u'', v'', w'' und

$$u = k' u' + k'' u'',$$
$$v = k' v' + k'' v'',$$
$$w = k' w' + k'' w'',$$

so geht (L) durch den Schnittpunkt von (L') und (L'') und ist das Abstandsverhältnis von (L), bezüglich (L') und (L'') als Grundstrahlen, gleich

$$(L' L'' L) = -\frac{k''}{k'} \cdot \frac{w''}{w'} \cdot \frac{d'}{d''}.$$

Nachdem die durch die homogenen Coordinaten x_i', x_i'' und $k' x_i' + k'' x_i''$, $i = 1, 2, 3$, bestimmten Punkte die Gleichungen besitzen:

$$M' \equiv x_1' u_1 + x_2' u_2 + + x_3' u_3 = o,$$
$$M'' \equiv x_1'' u_1 + x_2'' u_2 + + x''_3 u_3 = o,$$
$$M \equiv (k' x_1' + k'' x_1'') u_1 + + (k' x_2' + k'' x_2'') u_2 + + (k' x_3' + k'' x_3'') u_3 = o,$$

Nachdem die durch die homogenen Coordinaten u_i' u_i'' und $k' u_i' + k'' u_i$, $i = 1, 2, 3$, bestimmten Strahlen die Gleichungen besitzen:

$$L' \equiv u_1' x_1 + u_2' x_2 + + u_3' x_3 = o,$$
$$L'' \equiv u_1'' x_1 + u_2'' x_2 + + u_3'' x_3 = o,$$
$$L \equiv (k' u_1' + k'' u_1'') x_1 + + (k' u_2' + k'' u_2'') x_2 + + (k' u_3' + k'' u_3'') x_3 = o,$$

so repräsentieren die drei homogenen Gleichungen

$$(179) \ldots M' = o,\ M'' = o,\quad M \equiv k' M' + k'' M'' = o,\quad M^{(i)} = x_1^{(i)} u_1 + x_2^{(i)} u_2 + x_3^{(i)} u_3$$

drei Punkte M', M'' und M einer Geraden, und ist das Abstandsverhältnis von M, bezüglich M' und M'' als Grundpunkte, gleich dem in Gl. (177) gegebenen Ausdrucke.

$$L' = o,\ L'' = o,\quad L \equiv k' L' + k'' L'' = o,\quad L^{(i)} = u_1^{(i)} x_1 + u_2^{(i)} x_2 + + u_3^{(i)} x_3 \ldots (180)$$

drei Strahlen (L'), (L'') und (L) aus einem Punkte, und ist das Abstandsverhältnis von (L), bezüglich (L') und (L'') als Grundstrahlen, gleich dem in Gl. (178) gegebenen Ausdrucke.

Gleichzeitig führen diese einfachen Betrachtungen zur Erkenntnis, dass die durch die homogenen Coordinaten:

$$(181) \ldots \begin{aligned} x_i' &= y_i - \lambda' z_i, \\ x_i'' &= y_i - \lambda'' z_i \\ x_i''' &= y_i - \lambda''' z_i, \\ x_i^{IV} &= y_i - \lambda^{IV} z_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_i' &= v_i - \lambda' w_i, \\ u_i'' &= v_i - \lambda'' w_i, \\ u_i''' &= v_i - \lambda''' w_i, \\ u_i^{IV} &= v_i - \lambda^{IV} w_i \end{aligned} \ldots (182)$$

oder, was dasselbe ist, durch die homogenen Gleichungen:

$$(183) \ldots \begin{aligned} M' &\equiv U - \lambda' V = o, \\ M'' &\equiv U - \lambda'' V = o, \\ M''' &\equiv U - \lambda''' V = o, \\ M^{IV} &\equiv U - \lambda^{IV} V = o, \\ U &= y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3, \\ V &= z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L' &\equiv U - \lambda' V = o, \\ L'' &\equiv U - \lambda'' V = o, \\ L''' &\equiv U - \lambda''' V = o \\ L^{IV} &\equiv U - \lambda^{IV} V = o, \\ U &= v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3, \\ V &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \end{aligned} \ldots (184)$$

gegebenen vier Punkte auf einer Geraden liegen, und dass nach Gl. (113) das Doppelverhältnis

$$(185)\ldots(M'M''M'''M^{IV}) = \frac{\lambda'-\lambda'''}{\lambda''-\lambda'''}:\frac{\lambda'-\lambda^{IV}}{\lambda''-\lambda^{IV}}$$

gegebenen vier Strahlen in einem einzigen Punkte sich durchschneiden, und dass nach Gl. (114) das Doppelverhältnis

$$(L'L''L'''L^{IV}) = \frac{\lambda'-\lambda'''}{\lambda''-\lambda'''}:\frac{\lambda'-\lambda^{IV}}{\lambda''-\lambda^{IV}}\ldots(186)$$

ist, und ebenso wird man begreifen, dass die homogenen Coordinaten:

$$x_i',\ x_i'',\ k'x_i'+k''x_i'',\ k'x_i''-k''x_i'' \quad i=1,2,3;$$

respective $u_i',\ u_i'',\ k'u_i'+k''u_i'',\ k'u_i'-k''u_i''$,

oder die hieraus fließenden vier homogenen Gleichungen:

$$M'=o,\ M''=o,$$
$$k'M'+k''M''=o,$$
$$k'M'-k''M''=o$$

zwei harmonischen Punktpaaren angehören.

$$L'=o,\ L''=o,$$
$$k'L'+k''L''=o,$$
$$k'L'-k''L''=o$$

zwei harmonischen Strahlenpaaren angehören.

§ 31. Anhang I.

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit der Gleichung der Geraden und des Punktes unter der ausdrücklichen Voraussetzung beschäftigen, dass unter den Punktcoordinaten x_i die Normaldistanzen der drei Seiten des Fundamentaldreiecks von dem Punkte, unter den Liniencoordinaten u_i aber die Normaldistanzen der Geraden von den drei Ecken besagten Dreiecks verstanden werden. Es geschieht dies darum, weil bei manchen Aufgaben gerade diese Coordinaten mit Erfolg angewendet werden und überdies die folgenden Betrachtungen reichlich Gelegenheit bieten,

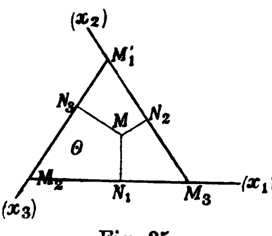


Fig. 35.

von den vorhergehenden Principien eine zweckdienliche Anwendung zu machen. Nimmt man nun hier wieder an, dass der Ursprung O des rechtwinkeligen Coordinatensystem im Coordinatendreieck $M_1 M_2 M_3$ (Fig. 35) zu liegen kommt, so folgt sofort im Sinne des in § 12 bereits

Gesagten, dass $x_i = N_i M$ $(i = 1, 2, 3)$ für irgend einen in der Ebene dieses Dreiecks liegenden Punkt M positiv wird, sobald der Punkt M mit O, bezüglich (x_i), auf derselben Seite sich befindet; sonst ist x_i negativ. Ebenso wird die Coordinate $u_i = N_i M_i$ $(i = 1, 2, 3)$ einer in der Ebene von $M_1 M_2 M_3$ liegenden Geraden (L) positiv oder negativ, je nachdem (Fig. 37) der vorerwähnte Ursprung O und die Ecke M_i, bezüglich (L), auf derselben Seite sich befinden oder nicht. Natürlich lassen sich jetzt auch die Coordinaten der Ecken M_i und Seiten (x_i) des Coordinatendreiecks leicht angeben, u. zw. hat man, sobald h_1, h_2 und h_3 die von den Ecken M_i auf die Gegenseiten (x_i) gefällten Höhen des letzteren darstellen, für die Coordinaten der Ecken

$$\begin{aligned} M_1 \ldots\ldots x_1 &= h_1, \quad x_2 = x_3 = o, \\ M_2 \ldots\ldots x_2 &= h_2, \quad x_3 = x_1 = o, \\ M_3 \ldots\ldots x_3 &= h_3, \quad x_1 = x_2 = o; \end{aligned}$$

dagegen für die Coordinaten der Seiten

$$\begin{aligned} (x_1) \ldots\ldots u_1 &= h_1, \quad u_2 = u_3 = o, \\ (x_2) \ldots\ldots u_2 &= h_2, \quad u_3 = u_1 = o, \\ (x_3) \ldots\ldots u_3 &= h_3, \quad u_1 = u_2 = o; \end{aligned}$$

ferner sind die Coordinaten des Ursprungs O des rechtwinkeligen Coordinatensystems im Coordinatendreieck $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$, $x_3 = d_3$, wenn wieder d_i die Normaldistanzen der Seiten (x_i) von O repräsentieren, und $x_1 = \frac{h_1}{3}$, $x_2 = \frac{h_2}{3}$, $x_3 = \frac{h_3}{3}$ die Coordinaten des Schwerpunktes des Coordinatendreiecks.

Aus der Natur dieses Coordinatensystems geht sofort hervor, dass die drei Coordinaten x_i eines Punktes M, oder jene u_i einer Geraden (L), nicht gänzlich unabhängig von einander erscheinen, sondern dass dieselben mit einander durch je eine Gleichung verbunden sein müssen. Die letztere lässt sich nun für Punktcoordinaten ohneweiteres angeben und lautet:

$$(187) \ldots\ldots\ldots s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = S,$$

wenn $s_1 = M_2 M_3$, $s_2 = M_3 M_1$, $s_3 = M_1 M_2$ ist und $S = 2 \operatorname{area} M_1 M_2 M_3$ gesetzt wird, woraus man erkennt, dass

die dritte Coordinate eines Punktes aus den beiden übrigen eindeutig bestimmt werden kann. Die diesbezügliche Relation, welcher die Coordinaten u_i einer Geraden unterliegen, wird später gegeben werden.

Sehr einfach gestaltet sich hier die Bestimmung der Dreieckcoordinaten x_i eines Punktes M aus seinen rechtwinkeligen x, y. Sind nämlich (N_i) die Normalen der drei Seiten (x_i) des Coordinatendreiecks und bezeichnen α_i die Winkel (x, N_i), $i = 1, 2, 3$, so ist nach Gl. (55):

$$\begin{aligned} & x_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 + d_1 \\ (188)\ldots\ldots\ldots & x_2 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 + d_2 \\ & x_3 = x\cos\alpha_5 + y\sin\alpha_3 + d_3, \end{aligned}$$

und hieraus erkennt man ohneweiters, dass das geometrische Äquivalent der linearen Gleichung

$$(189)\ldots\ldots\ldots L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o,$$

in welcher a_i ganz willkürlich gewählte Coëfficienten sind und x_i veränderliche Punktcoordinaten darstellen, eine Gerade sein wird. Ist somit $x\cos\alpha + y\sin\alpha + d = o$ die Gleichung derselben Geraden in rechtwinkeligen Punktcoordinaten und in der Hesse'schen Normalform, so muss immer ein Coëfficient ϱ sich ermitteln lassen, für welchen die Identität besteht

$$(a)\ldots\varrho(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = x\cos\alpha + \sin\alpha + d$$

und aus (a) findet man, sobald für x_i die aus (188) resultierenden Werte eingeführt werden:

$$\begin{aligned} & \varrho.(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3) = \cos\alpha, \\ (b)\ldots\ & \varrho.(a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3) = \sin\alpha, \\ & \varrho.(a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3) = d. \end{aligned}$$

Quadriert man nun die beiden ersten der obigen drei Gleichungen und addiert sie hierauf, so ergibt sich zur Berechnung des Coëfficienten ϱ zunächst

$$\begin{aligned} \varrho^2[a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2a_3a_1\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ + 2a_2a_3\cos(\alpha_3 - \alpha_2)] = 1, \end{aligned}$$

oder weil ja nach der beigegebenen Fig. 36

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 = (x_1, x_2) = M_3,\ \alpha_3 - \alpha_1 = 2\pi - (x_3, x_1) = 2\pi - M_2, \\ \alpha_3 - \alpha_2 = (x_2, x_3) = M_1 \end{aligned}$$

ist,

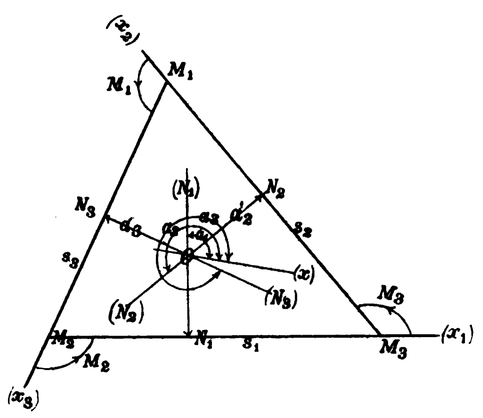


Fig. 36.

$$(d) \ldots \varrho^2 (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + 2 a_1 a_2 \cos M_3 + 2 a_1 a_3 \cos M_2 + \\ + 2 a_2 a_3 \cos M_1) = 1,$$

woraus sofort folgt

$$(190) \quad \varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + 2a_1 a_2 \cos M_3 + 2a_3 a_1 \cos M_2 + 2a_2 a_3 \cos M_1}},$$

und ist rechts vom Gleicheitszeichen das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem die Summe: $a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3$ positiv oder negativ erscheint. Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (b):

$$(191) \ldots \quad
\begin{aligned}
\triangle \cdot a_1 &= \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha & \sin\alpha_2, & \sin\alpha_3 \\ d & d_2, & d_3 \end{vmatrix} \\
\triangle \cdot a_2 &= \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1, & \sin\alpha & \sin\alpha_3 \\ d_1 & d & d_3 \end{vmatrix} \\
\triangle \cdot a_3 &= \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha \\ \sin\alpha_1, & \sin\alpha_2, & \sin\alpha \\ d_1, & d_2, & d \end{vmatrix} \\
\triangle &= \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1, & \sin\alpha_2, & \sin\alpha_3 \\ d_1, & d_2, & d_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

zur Berechnung von a_1, a_2 und a_3 aus α und d.

Die Identität (a) gilt für jedes zusammengehörige Wertesystem von x_1, x_2, x_3 und x, y, d. h. also, sie gilt auch dann noch, sobald man für x_i die Dreieckcoordinaten

irgend eines Punktes M und für x, y die rechtwinkeligen Coordinaten desselben Punktes einführt, nur muss immer an Stelle von ϱ der in Gl. (190) gegebene Wert gedacht werden. Versteht man sonach, im Sinne dieser Bemerkung, in Gl. (a) unter x_i und x, y die Coordinaten einer Ecke M_i des Coordinatendreiecks, so wird $x_i = h_i$, während die beiden übrigen Dreieckcoordinaten verschwinden, und $x \cos\alpha + y \sin\alpha + d = u_i$, wo u_i die Normaldistanz der Geraden (L) von der Ecke M_i angibt, mithin $\varrho\, a_i\, h_i = u_i$, oder

$$(192) \ldots\ldots\ldots \frac{u_i}{h_i} = \varrho\, a_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

und mittelst dieser drei Gleichungen können daher die Coordinaten u_i der Geraden $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ aus den Coëfficienten a_i berechnet werden. Durch die Substitution dieser Werte von a_i in die Gl. (189) nimmt selbe die Form an

$$(193) \ldots\ldots \frac{u_1}{h_1} x_1 + \frac{u_2}{h_2} x_2 + \frac{u_3}{h_3} x_3 = o,$$

und es ist dies also die Gleichung einer Geraden von den bereits früher definierten Coordinaten u_1, u_2, u_3. Man kann diese Form der Gleichung einer Geraden die Normalform nennen und die vorhergegangene Betrachtung lehrt deutlich, dass die allgemeine Gleichung (189) einer Geraden sofort auf die Normalform (193) überführt werden kann, sobald man sie mit dem in Gl. (190) gegebenen Faktor ϱ multipliciert. In dem speciellen Fall, wo $\varrho = 1$ wird, ist natürlich (189) ebenfalls die Gleichung der Geraden in der Normalform und wird dann $\frac{u_i}{h_i} = a_i$. Gleichzeitig ist man aber auch jetzt in der Lage, die zwischen den Coordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden obwaltende Beziehung aufzufinden. Man erhält nämlich zunächst, sobald man in Gl. (d) die aus den Gleichungen (192) hervorgehenden Werte für a_i einführt:

$$\frac{u_1^2}{h_1^2} + \frac{u_2^2}{h_2^2} + \frac{u_3^2}{h_3^2} + 2\frac{u_1}{h_1}\frac{u_2}{h_2}\cos M_3 + 2\frac{u_1}{h_1}\frac{u_3}{h_3}\cos M_2 + \\ + 2\frac{u_2}{h_2}\frac{u_3}{h_3}\cos M_1 = 1 \quad .$$

und hieraus, weil ja nach der bereits gegebenen Bedeutung von s_i, h_i und S das Product

$$h_1 s_1 = h_2 s_2 = h_3 s_3 = 2 \text{ area } M_1 M_2 M_3 = S$$

sein muss,

$$(194)\ldots s_1^2 u_1^2 + s_2^2 u_2^2 + s_3^2 u_3^2 + 2 s_2 s_3 u_2 u_3 \cos M_1 + \\ + 2 s_3 s_1 u_3 u_1 \cos M_2 + 2 s_1 s_2 u_1 u_2 \cos M_3 = S^2$$

als Bedingung, welcher die Coordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden unterworfen sind. Die letzte Gleichung steht der früher gefundenen (187) reciprok gegenüber.

Um nun bei dieser Wahl des Coordinatensystems auch die Gleichung eines Punktes zu finden, bemerke ich vorerst, dass man die Gleichung eines jeden Punktes, bezogen auf das alte rechtwinkelige Coordinatensystem, auf die Form bringen kann

$$(e)\ldots\ldots M \equiv a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 = o,$$

in welcher a_1, a_2, a_3 drei noch zu bestimmende Coëfficienten darstellen und $m_i \equiv \alpha_i u + \beta_i v + 1 = o$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichungen der drei Ecken M_i des Coordinatendreiecks in der Normalform, mithin α_i, β_i die rechtwinkeligen Coordinaten dieser Ecken sind. Ist nämlich $m \equiv \alpha u + \beta v + 1 = o$ die Gleichung irgend eines Punktes M in der Normalform und bezogen auf das alte rechtwinkelige Coordinatensystem, so muss sich unter Annahme obiger Behauptung stets ein Coëfficient ϱ ausfindig machen lassen, für welchen die Identität besteht:

$$\varrho\,(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3) = \alpha u + \beta v + 1$$

und aus dieser erhält man

$$\varrho\,(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) = \alpha$$
$$\varrho\,(\beta_1 a_2 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3) = \beta$$
$$\varrho\,(a_1 + a_2 + a_3) = 1,$$

woraus sofort folgt:

$$(195)\ldots\ldots\ldots\ \varrho = \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}$$

$$(196)\ldots \begin{cases} \Delta \cdot a_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \dfrac{1}{\varrho}, & \Delta \cdot a_2 = \dfrac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta \cdot a_3 = \dfrac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Mittelst den eben gewonnenen Gleichungen (195) und (196) kann man daher a_1, a_2, a_3 und ϱ für jedes Wertesystem von α, β berechnen, weshalb die in (e) gemachte Annahme richtig ist. Dividiert man nun die Gleichung (e) durch $\sqrt{u^2+v^2}$, substituiert für die Symbole m_i die Werte und bedenkt noch, dass $u_i = \frac{\alpha_i u + \beta_i v + 1}{\sqrt{u^2+v^2}}$ die Normaldistanz einer durch den Punkt M gelegten Geraden (u, v) von der Ecke M_i des Coordinatendreiecks angibt, so erhält man

$$(197) \ldots\ldots M \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = o,$$

und d. i. zugleich die Bedingung, welcher die Dreieckcoordinaten aller durch M gehenden Strahlen unterworfen sind, d. h. also die Geichung des Punktes M in den bereits definierten Liniencoordinaten. Von selbst drängt sich nun die Frage heran, wie bestimmt man die Dreieckcoordinaten x_1, x_2, x_3 des durch die Gl. (197) gegebenen Punktes aus den Coëfficienten a_i. Zu diesem Zwecke wird in Erinnerung gebracht, dass nach Gl. (14)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,\text{area}\, M_1 M_2 M_3 = h_i s_i,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,\text{area}\, M M_2 M_3 = x_1 s_1$$

ist, mithin zufolge der ersten und vierten der früher gefundenen Gleichung (196) sein muss

$$h_1 s_1 a_1 = \frac{x_1 s_1}{\varrho}.$$

Nachdem nun eine analoge Gleichung auch für x_2 und x_3 gefunden werden kann, hat man daher hier für die Bestimmung der fraglichen Coordinaten des Punktes M

$$(198) \ldots\ldots \frac{x_i}{h_i} = \varrho . a_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

womit obige Frage beantwortet erscheint. Jetzt ist man aber auch im Stande aus den Dreieckcoordinaten x_i eines Punktes dessen Gleichung herzuleiten. Denn eliminiert man aus (197) und (198) die drei Coëfficienten a_i, so folgt

$$(199)\ldots\ldots \quad \frac{x_1}{h_1}u_1 + \frac{x_2}{h_2}\cdot u_2 + \frac{x_3}{h_3}\cdot u_3 = o$$

als Gleichung dieses Punktes. Man kann nun ebenfalls diese Form der Gleichung eines Punktes die Normalform nennen und erkennt, dass die allgemeine Gleichung (197) auf die Normalform gebracht wird, wenn man sie mit dem durch Gl. (195) gegebenen Faktor ϱ multipliciert. In dem besonderen Fall, wo $\varrho = 1$ wird, ist (197) die Gleichung des Punktes in der Normalform und wird einfacher $\frac{x_i}{h_i} = a_i$.

§ 32. Anhang II.

Schließlich mögen noch, unter Zugrundelegung der eben definierten Punkt- und Liniencoordinaten, einige Aufgaben über den Punkt und die Geraden vorgeführt werden.

1. Aufgabe. Man bestimme die Gleichung der unendlich fernen Geraden der Ebene des Coordinatendreiecks $M_1 M_2 M_3$.

Lösung. Offenbar repräsentiert die lineare Gleichung

$$(a) \quad \ldots \quad s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = o$$

ebenfalls eine Gerade und es lässt sich sofort der Nachweis erbringen, dass letztere zugleich diese unendlich ferne Gerade selbst ist. Zu diesem Zwecke ermittle man bloß die Coordinaten des Schnittpunktes der durch obige Gleichung gegebenen Geraden mit irgend einer Geraden (L) in der Ebene des Coordinatendreiecks $M_1 M_2 M_3$. Ist nun $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ die Gleichung von (L), so resultieren die Coordinaten dieses Schnittpunktes aus

$$\begin{aligned} s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 &= o, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= o, \\ s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 &= S, \end{aligned}$$

indem die Coordinaten desselben nicht bloß den Gleichungen der beiden Geraden zu genügen haben, sondern auch noch der Bedingung (187) unterworfen sind; weil aber die aus den neuen Coefficienten links vom Gleichheitszeichen gebildete Determinante $(s a s)$ gleich null wird, so erscheinen

x_1, x_2 und x_3 gleichzeitig unendlich groß, d. h. die Coordinaten des Schnittpunktes von (L) mit der durch Gl. (a) bestimmten Geraden sind unendlich groß. Bedenkt man schließlich, dass die Gerade (L) ganz beliebig in der Ebene des Coordinaten-Dreiecks angenommen wurde, so resultiert ohneweiters, dass sämmtliche Punkte der Geraden $\Sigma s_i x_i = o$ unendlich große Coordinaten besitzen, d. h. in unendlicher Ferne liegen, weshalb bei dieser Wahl des Coordinatensystems

$$(200) \quad . \; . \; . \quad L_\infty \equiv s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = o$$

die Gleichung der unendlich fernen Geraden repräsentiert. Wegen der bekannten Proportion $s_1 : s_2 : s_3 = \sin M_1 : \sin M_2 : \sin M_3$ kann übrigens obige Gleichung auch ersetzt werden durch

$$(201) \quad . \quad L_\infty \equiv x_1 \sin M_1 + x_2 \sin M_2 + x_3 \sin M_3 = o\,.$$

2. Aufgabe. Es soll die Gleichung einer Geraden aufgesucht werden, welche durch den Punkt M' von den Coordinaten x_i' geht und zur Geraden $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ parallel gerichtet ist.

Lösung. Selbstverständlich ist das geometrische Äquivalent von $L - \lambda L_\infty = o$, wenn λ einen constanten Parameter darstellt, eine Gerade, welche den Punkt $(L = o,\ L_\infty = o)$ enthält, demnach zu der Geraden $L = o$ parallel läuft. Wählt man nun λ derart, dass das Gleichungspolynom $(L - \lambda L_\infty)$ für $x_i = x_i'$ verschwindet, so ist $L - \lambda L_\infty = o$ gleichzeitig die Gleichung der durch M' gehenden und zur $L = o$ parallelen Geraden. Die verlangte Gleichung ist somit $\frac{L}{L'} - \frac{L_\infty}{L'_\infty} = o$, oder

$$(s_1 x_1' + s_2 x_2' + s_3 x_3')\ (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) - (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)\ (a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3') = o,$$

und weil, wie wir in Gl. (187) gesehen haben, $\Sigma^3_1\, s_i x_i = \Sigma^3_1\, s_i x_i' = S$ ist, so nimmt obige Gleichung die einfachere Form an

$$(202) \quad . \; . \quad a_1 (x_1 - x_1') + a_2 (x_2 - x_2') + a_3 (x_3 - x_3') = o\,.$$

Ebenso leicht gestaltet sich die Lösung, sobald der Punkt M' mit einer Ecke des Coordinatendreiecks, also z. B. mit

M_1 zusammenfällt. Denn in diesem Fall hat man in der Gleichung $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) - \lambda . (s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3) = o$ den Parameter λ bloß derart zu wählen, dass dieselbe die Form annimmt $k_2x_2 + k_3x_3 = o$, in welcher die Gleichungen aller durch M_1 gehenden Strahlen enthalten sind, d. h. man hat $\lambda = \frac{a_1}{s_1}$ zu setzen und erhält dann $(a_1 s_2 - a_2 s_1)\, x_2 - (a_3 s_1 - a_1 s_3)\, x_3 = o$. Die Gleichungen der durch die drei Ecken M_1, M_2 und M_3 des Coordinatendreiecks zur Geraden $\Sigma a_i x_i = o$ parallel gezogenen Strahlen sind folglich:

$$\frac{x_2}{a_3 s_1 - a_1 s_3} = \frac{x_3}{a_1 s_2 - a_2 s_1}, \qquad \frac{x_3}{a_1 s_2 - a_2 s_1} = \frac{x_1}{a_2 s_3 - a_3 s_2},$$
$$\frac{x_1}{a_2 s_3 - a_3 s_2} = \frac{x_2}{a_3 s_1 - a_1 s_3}.$$

Von selbst tritt nun die Frage heran, wie lauten die Gleichungen der drei durch die Ecken des Coordinatendreiecks gelegten Strahlen, welche zu den Gegenseiten desselben parallel erscheinen? Zu diesem Ende bestimme man vorerst die Gleichung eines durch die Ecke M_1 gehenden Strahls, ich nenne ihn (L'), dessen Abstandsverhältnis, bezüglich der beiden Seiten (x_2) und (x_3) als Grundstrahlen, gleich λ' ist. Nennt man nun wieder x_i die Coordinaten irgend eines Punktes M in (L'), so ist $x_2 = M_1M . \sin(x_2, L')$, $x_3 = M_1 M . \sin(x_3, L')$, demnach der Quotient $\frac{x_2}{x_3} = \frac{\sin(x_2, L')}{\sin(x_3, L')} = \lambda'$, und hieraus folgt $x_2 - \lambda' x_3 = o$ als Gleichung von (L').

Erscheint nun (L') parallel zur Gegenseite (x_1) der Ecke M_1, so wird $\lambda' = -\frac{\sin(\pi - M_3)}{\sin(\pi - M_2)} = -\frac{\sin M_3}{\sin M_2}$ und ist folglich dann $x_2 + \frac{\sin M_3}{\sin M_2} . x_3 = o$ die Gleichung von (L'). Die Gleichungen der oben definierten Strahlen (L') . . . sind sonach:

$$L' \equiv x_2 \sin M_2 + x_3 \sin M_3 = o,\ L'' \equiv x_3 \sin M_3 + x_1 \sin M_1 = o,$$
$$L''' \equiv x_1 \sin M_1 + x_2 \sin M_2 = o,$$

und es ist daher

$$L_\infty \equiv x_1 \,.\, \sin M_1 + x_2 \sin M_2 + x_3 \sin M_3 = o$$

die Gleichung derjenigen Geraden, welche die Schnittpunkte der Geraden (L') und (x_1), (L'') und (x_2), (L''') und (x_3) enthält. Nachdem aber diese drei Schnittpunkte in der unendlich fernen Geraden liegen, denn (L') läuft ja parallel zur Seite (x_1)......, gehört die letzte Gleichung der unendlich fernen Geraden an. (Übereinstimmung mit der früheren Gleichung [201].)

3. Aufgabe. Es ist die Gleichung derjenigen Geraden aufzustellen, welche durch die Mittelpunkte der beiden Seiten $M_2 M_3$ und $M_3 M_1$ des Coordinatendreiecks geht.

Lösung. Die homogene Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte M' und M'', deren Coordinaten x_i' und x_i'', $i = 1, 2, 3$, sein sollen, bestimmt erscheint, lautet bekanntlich: (Siehe Gl. [163])

$$(x_2'x_3'' - x_2''x_3')\, x_1 + (x_3'x_1'' - x_1'x_3'')\, x_2 + (x_1'x_2'' - x_1''x_2')\, x_3 = o.$$

Ist nun M' der Mittelpunkt der Strecke $M_2 M_3$ und M'' jener der Strecke $M_3 M_1$, so wird $x_1' = o$, $x_2' = \sin M_3$, $x_3' = \sin M_2$; $x_1'' = \sin M_3$, $x_2'' = o$, $x_3'' = \sin M_1$ und ist daher

$$x_1 \sin M_1 + x_2 \sin M_2 - x_3 \sin M_3 = o$$

die gesuchte Gleichung.

4. Aufgabe. Normaldistanz einer Geraden von einem Punkte. Die Gerade sei gegeben durch die Gleichung $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$, der Punkt M', dessen Abstand δ von $L = o$ ermittelt werden soll, durch seine Coordinaten $x_1' x_2' x_3'$.

Lösung. Behufs Berechnung von δ bestimme man vorerst die Gleichung einer Geraden (L'), welche durch den Punkt M' geht und zu der Geraden $L = o$ parallel gerichtet erscheint. Offenbar hat die Gleichung von (L') die Form

$$L' \equiv a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = o$$

und die hier vorkommenden Coefficienten a_i' unterliegen nach (b) in § 31 den drei Relationen:

$$\varrho' . (a_1' \cos\alpha_1 + a_2' \cos\alpha_2 + a_3' \cos\alpha_3) = \cos\alpha,$$
$$\varrho' . (a_1' \sin\alpha_1 + a_2' \sin\alpha_2 + a_3' \sin\alpha_3) = \sin\alpha,$$
$$\varrho' . (a_1' . d_1 + a_2' . d_2 + a_3' . d_3) = d - \delta,$$

indem diesmal $(d - \delta)$ die Normaldistanz der Geraden vom Ursprunge O repräsentiert. Aus denselben ergibt sich aber für den ersten Coefficienten a_1', sobald man gleichzeitig auf die früher gegebenen Gleichungen (191) Rücksicht nimmt,

$$\varrho' . a_1' . \triangle = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ (d-\delta) & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \varrho a_1 \triangle - \delta . \sin M_1$$

und, weil zwei analoge Gleichungen für a_2' und a_3' gefunden werden können, so ist allgemein

$$\varrho' . a_i' = \varrho a_i - \frac{\delta}{\triangle} . \sin M_i,$$

mithin auch das fragliche Polynom

$$\varrho' (a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3) = \varrho (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) - \frac{x_1 . \sin M_1 + x_2 \sin M_2 + x_3 \sin M_3}{\triangle} . \delta .$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Bruch gleich der Einheit ist. Denn nach der letzten der Gleichungen (191) ist der Nenner

$$\triangle = d_1 . \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + d_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) + d_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$
$$= d_1 \sin M_1 + d_2 \sin M_2 + d_3 \sin M_3 = \frac{S}{k}, \text{ wenn } \sin M_i = \frac{s_i}{k}$$

gesetzt wird, S aber die in Gl. (187) gegebene Bedeutung hat, und nachdem offenbar auch

$$x_1 \sin M_1 + x_2 \sin M_2 + x_3 \sin M_3 = \frac{S}{k}$$

ist, so wird in der That dieser Bruch gleich der Einheit, folglich

$$(203) \ldots \quad \varrho' (a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3) = \varrho (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) - \delta .$$

Nun verschwindet aber der links vom Gleichheitszeichen stehende Klammerausdruck für die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden (L'); somit muss der rechts stehende Ausdruck in (203) ebenfalls gleich null werden, sobald man unter x_i die Coordinaten eines Punktes der Geraden (L')

versteht. Der Punkt M' ist aber ein Punkt der (L'), folglich wird $\varrho(a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3') - \delta = o$ und ist schließlich die gesuchte Normaldistanz

$$(204) \quad . \; . \; . \quad \delta = \varrho(a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3'),$$

wenn der hier vorkommende Coefficient ϱ definiert erscheint durch die Gleichung (190). Ist $\varrho = 1$, d. h., ist $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ die Gleichung der Geraden (L) in der Normalform, so wird einfacher

$$(205) \quad . \; . \; . \quad \delta = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3'$$

und man erkennt mithin, dass die Normaldistanz einer Geraden von einem Punkte auch bei dieser Wahl des Coordinatensystems in derselben Weise berechnet wird, wie unter Zugrundelegung der Coordinaten des Cartesius. Von selbst folgt noch, dass die Normaldistanz einer Geraden von einem Punkte gleich

$$(206) \quad . \; . \; . \quad \delta = \frac{u_1}{h_1} . x_1' + \frac{u_2}{h_2} . x_2' + \frac{u_3}{h_3} x_3'$$

sein wird, wenn u_i und x_i' die Coordinaten der Geraden und des Punktes bedeuten. Die so berechnete Normaldistanz δ erscheint selbstverständlich positiv oder negativ, je nachdem der Punkt M' (Fig. 37) und der Ursprung O auf derselben Seite vom (L) zu liegen kommen oder nicht.

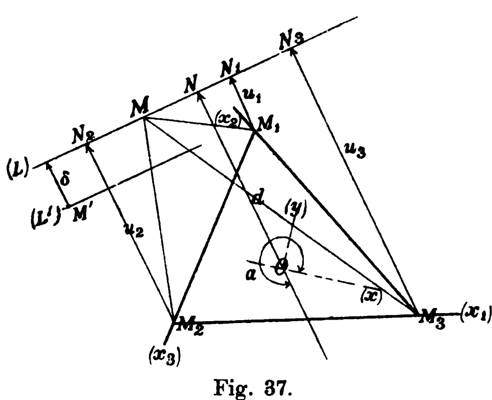


Fig. 37.

5. Aufgabe. Der Neigungswinkel ε der durch die beiden Gleichungen $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ und $L' \equiv a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = o$ gegebenen Geraden ist zu finden.

Lösung. Behufs Auffindung des verlangten Winkels ε transformiere man die Gleichungen der beiden Geraden auf

ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, was mittelst der früheren Transformationsformeln (188) zu geschehen hat, und erhält dann für die beiden Geraden die Gleichungen $L \equiv \Sigma\, a_i (x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i + d_i) = o$, $L' \equiv \Sigma\, a_i' (x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i + d_i) = o$, oder

$$L \equiv Ax + By + C = o, \quad L' \equiv A'x + B'y + C' = o,$$

wenn noch

$$\begin{aligned} A &= a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3\,, \\ A' &= a_1' \cos\alpha_1 + a_2' \cos\alpha_2 + a_3' \cos\alpha_3\,, \\ B &= a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3\,, \\ B' &= a_1' \sin\alpha_1 + a_2' \sin\alpha_2 + a_3' \sin\alpha_3\,, \\ C &= a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3\,, \\ C' &= a_1' d_1 + a_2' d_2 + a_3' d_3 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Nun kann zur Berechnung von ε sofort die bereits bekannte Gleichung (58) in Anwendung kommen und nach dieser erhält man, sobald für A bis inclusive B' die obigen Werte substituiert werden,

$$(207).\cos\varepsilon = \frac{a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' + (a_2 a_3' + a_2' a_3) \cos M_1 + (a_1 a_3' + a_1' a_3) \cos M_2 + (a_1 a_2' + a_1' a_2) \cos M_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 \cos M_1 + 2a_3 a_1 \cos M_2 + 2a_1 a_2 \cos M_3)(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 + 2a_2' a_3' \cos M_1 + 2a_3' a_1' \cos M_2 + 2a_1' a_2' \cos M_3)}}$$

als Lösung unserer Aufgabe. Stehen die beiden Geraden $L = o$, $L' = o$ auf einander senkrecht, so wird $\cos\varepsilon = o$ und daher auch der Zähler des in obiger Gleichung vorkommenden Bruches gleich null, d. h. es ist

$$(208)\;.\;.\,a_1'(a_1 + a_2 \cos M_3 + a_3 \cos M_2) + a_2'(a_2 + a_1 \cos M_3 + a_3 \cos M_1) + a_3'(a_3 + a_1 \cos M_2 + a_2 \cos M_1) = o$$

die Bedingung, welcher die Coefficienten a_i und a_i' unterworfen sind, wenn die in Rede stehenden Geraden rechtwinkelig sich durchschneiden. Erscheinen dagegen $L = o$ und $L' = o$ zu einander parallel, so muss nach Gl. (59)

$$(\Sigma_1^3 a_i \cos\alpha_i)(\Sigma_1^3 a_i' \sin\alpha_i) - (\Sigma_1^3 a_i \sin\alpha_i)\,.\,(\Sigma_1^3 a_i' \cos\alpha_i) = o$$

werden und hieraus erhält man nach einigen einfachen algebraischen Operationen

$$(209)\;.\;.\;a_1'(a_2 \sin M_3 - a_3 \sin M_2) + a_2'(a_3 \sin M_1 - a_1 \sin M_3) + a_3'(a_1 \sin M_2 - a_2 \sin M_1) = o$$

als Bedingung, welcher in diesem Fall die Coefficienten a_i und a_i' genügen müssen.

Nun kann man aber auch die Gleichung der durch den Punkt M' gelegten Senkrechten (N) auf die Gerade $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ aufstellen; denn hierbei hat man nur zu bedenken, dass die in der fraglichen Gleichung vorkommenden Coefficienten a_i' einmal der Bedingung, die durch (208) dargestellt wird, genügen müssen und überdies noch jene $\Sigma_1^3 a_i' x_i' = o$ zu erfüllen haben, sobald x_i' die Coordinaten von M' sind. Eliminiert man dann schließlich aus den drei letzten Gleichungen die drei Coefficienten a_i', so erhält man

$$N \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ (a_1 + a_2 \cos M_3 + a_3 \cos M_2) & (a_2 + a_1 \cos M_3 + a_3 \cos M_1) & (a_3 + a_1 \cos M_2 + a_2 \cos M_1) \end{vmatrix} = o$$

als die gesuchte Gleichung der durch M' gelegten Normalen (N) auf (L). In dem besonderen Fall, wo (L) mit einer Seite des Coordinatendreiecks und M' mit dem Mittelpunkte dieser Seite identisch ist, vereinfacht sich obige Gleichung wesentlich, u. z. wird, wenn z. B. (L) mit (x_1) und M' mit dem Mittelpunkte von $M_2 M_3$ zusammenfällt, $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = o$, $x_1' = o$, $x_2' = \frac{1}{2} s_1 . \sin M_3$, $x_3' = \frac{1}{2} s_1 . \sin M_2$, mithin

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ o, & \sin M_3, & \sin M_2 \\ 1, & \cos M_3, & \cos M_2 \end{vmatrix} = o$$

die Gleichung der Senkrechten (N). Berechnet man noch diese Determinante, so findet man leicht, dass die Gleichungen der in den Mittelpunkten der drei Seiten des Coordinatendreiecks $M_1 M_2 M_3$ auf diese errichteten Normalen (N_1), (N_2), (N_3) sind:

$$\begin{aligned} N_1 &\equiv x_1 . \sin(M_2 - M_3) - x_2 \sin M_2 + x_3 \sin M_3 = o, \\ N_2 &\equiv x_1 \sin M_1 + x_2 \sin(M_3 - M_1) - x_3 \sin M_3 = o, \\ N_3 &\equiv - x_1 \sin M_1 + x_2 \sin M_2 + x_3 \sin(M_1 - M_2) = o. \end{aligned}$$

Ebenso leicht lässt sich nun auch die Gleichung einer durch den Punkt M' gelegten Parallelen (L') zur Geraden $L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ auffinden, man braucht zu diesem Zwecke bloß die Coefficienten a_i' aus den drei Gleichungen $\Sigma_1^3 a_i' x_i = o$, $\Sigma_1^3 a_i' x_i' = o$ und (209) zu eliminieren, wodurch sich ergibt

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ (a_2 \sin M_3 - a_3 \sin M_2), & (a_3 \sin M_1 - a_1 \sin M_3) & (a_1 \sin M_2 - a_2 \sin M_1) \end{vmatrix} = o$$

und hieraus nach Berechnung der Determinante und einigen einfachen Umformungen

$$a_1 (x_1 - x_1') + a_2 (x_2 - x_2') + a_3 (x_3 - x_3') = o,$$

in Übereinstimmung mit (202).

6. Aufgabe. Man berechne den Flächeninhalt F eines Dreiecks $M' M'' M'''$ aus den Coordinaten x_i', x_i'', x_i''', $i = 1, 2, 3$, seiner Ecken.

Lösung. Aus Gl. (14) und den Transformationsformeln (188) ergibt sich nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten, dass

$$(a) \quad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & d_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & d_2 \\ \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & d_3 \end{vmatrix} = 2F . \Delta$$

ist, wenn x', y'; x'', y''; x''', y''' die rechtwinkeligen Coordinaten (Cartesius) der drei Ecken des Dreiecks $M' M'' M'''$ bedeuten und Δ die zweite, rechts vom Gleichheitszeichen vorkommende Determinante repräsentiert. Diese Determinante wurde in Aufgabe 4, § 32, bereits berechnet und man fand dort

$$(b) \quad . \; . \; . \quad \Delta = d_1 . \sin M_1 + d_2 \sin M_2 + d_3 \sin M_3 ;$$

es lässt sich aber dieser Ausdruck noch zweckdienlich vereinfachen, sobald man $\sin M_i$ durch die Seiten und Höhen des Coordinatendreiecks ausdrückt. Bezeichnet nämlich wieder S den doppelten Flächeninhalt des Coordinatendreiecks $M_1 M_2 M_3$, so ist zunächst $S = h_1 s_1 = h_2 s_2$

$= h_3 s_3 = s_2 s_3 \sin M_1 = \ldots\ldots$, folglich der Bruch $\frac{s_1}{\sin M_1}$ $= \frac{s_1 h_1 . s_2 h_2 . s_3 h_3}{h_1 h_2 h_3 s_2 s_3 \sin M_1} = \frac{S^2}{h_1 . h_2 . h_3}$, woraus sofort folgt $\sin M_1$ $= \frac{h_1 . h_2 . h_3}{S^2} . s_1$, und in analoger Weise $\sin M_2 = \frac{h_1 . h_2 . h_3}{S^2} . s_2$, $\sin M_3 = \frac{h_1 . h_2 . h_3}{S^2} s_3$. Die eben gefundenen Werte für $\sin M_i$ substituiere man nun in (b) und erhält dann, weil ja auch $d_1 s_1 + d_2 s_2 + d_3 s_3 = S$ ist,

$$(c) \ldots \qquad \Delta = \frac{h_1 . h_2 . h_3}{S}$$

und aus den Relationen (a) und (c) durch die Elimination von Δ schließlich zur Berechnung der verlangten Dreiecksfläche $M' M'' M'''$ die Gleichung

$$(210). \quad \text{area}\, M' M'' M''' = \frac{\text{area}\, M_1 M_2 M_3}{h_1 . h_2 . h_3} . \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix},$$

aus welcher man ersieht, dass die beiden Dreiecke $M' M'' M'''$ und $M_1 M_2 M_3$ gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind, je nachdem die in obiger Gleichung vorkommende Determinante, welche ebenfalls die Dreieckdeterminante heißt, positiv oder negativ wird; und sei hier noch bemerkt, dass die genannten Dreiecke dann gleichsinnig sind, wenn man, um von M_1 über M_2 nach M_3 zu gelangen, dieselbe Richtung in der Drehung einzuschlagen hat, wie bei der Bewegung von M' über M'' nach M'''. Selbstverständlich wird, sobald der Sinn des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ als der positive gewählt wird, auch die Fläche des Dreiecks $M' M'' M'''$ mit der obigen Determinante gleichzeitig positiv oder negativ werden.

7. Aufgabe. Es ist der Flächeninhalt eines Dreiseits aus den Coordinaten u_i', u_i'', u_i''', $i = 1, 2, 3$, seiner Seiten (L'), (L''), (L''') zu berechnen.

Lösung. Nennt man die Coordinaten der diesen Seiten gegenüber liegenden Ecken M', M'' und M''' des Dreiseits auch hier wieder x_i', x_i'' und x_i''', so bestehen, nachdem

offenbar M'' und M''' Punkte von (L'), M''' und M' Punkte von (L'').... sind, die nachfolgenden neun Relationen, u. z.:

$$
(a) \quad \begin{aligned}
\frac{u_1'}{h_1} x_1' + \frac{u_2'}{h_2} x_2' + \frac{u_3'}{h_3} x_3' &= h',\\
\frac{u_1'}{h_1} x_1'' + \frac{u_2'}{h_2} x_2'' + \frac{u_3'}{h_3} x_3'' &= o,\\
\frac{u_1'}{h_1} x_1''' + \frac{u_2'}{h_2} x_2''' + \frac{u_3'}{h_3} x_3''' &= o,\\
\frac{u_1''}{h_1} x_1' + \frac{u_2''}{h_2} x_2' + \frac{u_3''}{h_3} x_3' &= o,\\
\frac{u_1''}{h_1} x_1'' + \frac{u_2''}{h_2} x_2'' + \frac{u_3''}{h_3} x_3'' &= h'',\\
\frac{u_1''}{h_1} x_1''' + \frac{u_2''}{h_2} x_2''' + \frac{u_3''}{h_3} x_3''' &= o,\\
\frac{u_1'''}{h_1} x_1' + \frac{u_2'''}{h_2} x_2' + \frac{u_3'''}{h_3} x_3' &= o,\\
\frac{u_1'''}{h_1} x_1'' + \frac{u_2'''}{h_2} x_2'' + \frac{u_3'''}{h_3} x_3'' &= o,\\
\frac{u_1'''}{h_1} x_1''' + \frac{u_2'''}{h_2} x_2''' + \frac{u_3'''}{h_3} x_3''' &= h''',
\end{aligned}
$$

in welchen, nebenbei bemerkt, $h^{(i)}$ die von den Ecken $M^{(i)}$ auf die Gegenseiten $L^{(i)}$ gefällten Höhen des Dreiseits darstellen, und aus diesen leitet man nach dem bekannten Multiplicationstheorem der Determinanten die neue Gleichung ab

$$
\begin{vmatrix}
\frac{u_1'}{h_1} & \frac{u_2'}{h_2} & \frac{u_3'}{h_3}\\
\frac{u_1''}{h_1} & \frac{u_2''}{h_2} & \frac{u_3''}{h_3}\\
\frac{u_1'''}{h_1} & \frac{u_2'''}{h_2} & \frac{u_3'''}{h_3}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
x_1' & x_2' & x_3'\\
x_1'' & x_2'' & x_3''\\
x_1''' & x_2''' & x_3'''
\end{vmatrix}
= h' \,.\, h'' \,.\, h'''.
$$

Bezeichnet man nun die aus den neun Coordinaten $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$, $u_3^{(i)}$ der drei Seiten des Dreiseits gebildete 3^2 elementige Determinante mit A und substituiert in der letzten Gleichung für die aus den neun Coordinaten $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, der Ecken $M^{(i)}$ construierte Determinante ihren Wert aus (210), so folgt

$$
(b) \quad \text{area}\, M' M'' M''' = \frac{h' . h'' . h'''}{A} \,.\, \text{area}\, M_1 M_2 M_3
$$

und handelt es sich daher, behufs Berechnung der Fläche des Dreiseits aus den Coordinaten seiner Seiten, nunmehr darum, die bereits definierten Höhen h', h'', h''' durch diese Liniencoordinaten auszudrücken. Zu diesem Zwecke eliminiere man aus $s_1 x_1' + s_2 x_2' + s_3 x_3' = S$ und aus der ersten, vierten und siebenten Gleichung der Gruppe (a) die drei Coordinaten x_1', x_2', x_3' und erhält so:

$$\begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3, & S \\ \frac{u_1'}{h_1} & \frac{u_2'}{h_2} & \frac{u_3'}{h_3} & h' \\ \frac{u_1''}{h_1} & \frac{u_2''}{h_2} & \frac{u_3''}{h_3} & o \\ \frac{u_1'''}{h_1} & \frac{u_2'''}{h_2} & \frac{u_3'''}{h_3} & o \end{vmatrix} = o,$$

woraus sich ergibt, wenn man diese Gleichung mit $h_1 . h_2 . h_3$ multipliciert, hierauf die links vom Gleichheitszeichen stehende Determinante in ihre Minoren 1. Ord. zerlegt und gleichzeitig auf die früher angegebene Bedeutung des Symbols A Rücksicht nimmt:

$$S . A = h' . \begin{vmatrix} h_1 s_1, & h_2 s_2, & h_3 s_3 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix} = h' . S \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}.$$

Setzt man demnach, der Kürze wegen,

$$(211) \quad . \; . \quad \begin{cases} A = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}, & A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}, \\ A_2 = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ 1 & 1 & 1 \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}, & A_3 = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

so ist nach obiger Gleichung, wenn man diese noch auf die beiden anderen Höhen h'' und h''' überträgt,

$$(c) \quad . \; . \; . \quad h' = \frac{A}{A_1}, \quad h'' = \frac{A}{A_2}, \quad h''' = \frac{A}{A_3}$$

und aus (b) und (c) folgt schließlich durch die Elimination der Höhen h', h'', h'''

$$(212) \quad . \; . \quad \text{area } M' M'' M''' = \frac{A^2}{A_1 . A_2 . A_3} . \text{ area } M_1 M_2 M_3,$$

womit die vorliegende Aufgabe gelöst erscheint.

Zweiter Abschnitt.

Projectivische Geometrie.

Capitel VI.

Projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel I. Ordnung.

(Projectivische Grundgebilde I. Stufe.)

§ 33. Verwandtschaftsgleichungen.

Die Grundgebilde erster Stufe oder die einförmigen Grundgebilde sind: die Punktreihe, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel. Wir werden hier speciell nur von den beiden ersteren sprechen, weil der Ebenenbüschel in die Geometrie des Raumes gehört.

Zwei Punktreihen I und II sind projectivisch, wenn jedem Elemente M der einen Reihe ein Element M' der anderen entspricht.

Sind sonach $M_1 \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = o$ und $M_2 \equiv b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = o$ die homogenen Gleichungen zweier Elemente der Punktreihe I, sowie $M_1' \equiv a_1' u_1 + a_2' u_2 + a_3' u_3 = o$ und $M_2' \equiv b_1' u_1 + b_2' u_2 + b_3' u_3 = o$ jene zweier Elemente der Punktreihe II, wobei jedoch keineswegs angenommen wird, dass M_1 und M_1', sowie M_2 und M_2', entsprechende Elemente darstellen,

Zwei Strahlenbüschel I und II sind projectivisch, wenn jedem Elemente (L) des einen Büschels ein Element (L') des anderen entspricht.

Sind sonach $L_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ und $L_2 \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = o$ die homogenen Gleichungen zweier Elemente des Büschels I, sowie $L_1' \equiv a'_1 x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = o$ und $L_2' \equiv b_1' x_1 + b_2' x_2 + b_3' x_3 = o$ jene zweier Elemente des Strahlenbüschels II, wobei jedoch keineswegs angenommen wird, dass (L_1) und (L_1'), sowie (L_2) und (L_2'), entsprechende Elemente darstellen,

ferner λ und μ zwei veränderliche Parameten, unterworfen der Relation

$$(213) \ldots \quad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o,$$

in welcher a, b, c und d gegebene Constanten bezeichnen, so repräsentieren die Gleichungen:

$$(214) \ldots \begin{matrix} M_1 - \lambda M_2 = o, \\ M_1' - \mu M_2' = o \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} L_1 - \lambda L_2 = o, \\ L_1' - \mu L_2' = o \end{matrix} \ldots (215)$$

für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ je ein Paar entsprechender Elemente M und M', beziehungsweise (L) und (L'), der beiden projectivischen Punktreihen oder Strahlenbüschel I und II. Es ist klar, dass die Träger der beiden projectivischen

Punktreihen bestimmt erscheinen durch die Gleichungen

$$M_1 = o,\ M_2 = o \text{ und } M_1' = o,\ M_2' = o,$$

Strahlenbüschel bestimmt erscheinen durch die Gleichungen

$$L_1 = o,\ L_2 = o \text{ und } L_1' = o,\ L_2' = o,$$

und wird noch gleichzeitig bemerkt, dass die früher vorgeführte Gleichung (213) die Gleichung der Projectivität heißt. Mit Zuhilfenahme der Gleichungen (214) und (215) kann man nun auch die homogenen Coordinaten zweier entsprechender Punkte oder zweier entsprechender Strahlen sofort ermitteln. Sind nämlich:

y_i und z_i, $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten der Punkte M_1 und M_2, y_i' und z_i' jene der anderen M_1' und M_2', so nehmen nach Gl. (162), § 28, die früheren Gleichungen (214) die Gestalt an

$$\sum_{i=1}^{i=3} (y_i - \lambda z_i) u_i = o,$$
$$\sum_{i=1}^{i=3} (y_i' - \mu z_i') u_i = o$$

v_i und w_i, $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten der Strahlen (L_1) und (L_2), v_i' und w_i' jene der anderen (L_1') und (L_2'), so nehmen nach Gl. (161), § 28, die früheren Gleichungen (215) die Gestalt an

$$\sum_{i=1}^{i=3} (v_i - \lambda w_i) x_i = o,$$
$$\sum_{i=1}^{i=3} (v_i' - \mu w_i') x_i = o$$

und sind sonach für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ

$$(216) \ldots \begin{matrix} x_i = y_i - \lambda z_i, \\ x_i' = y_i' - \mu z_i' \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} u_i = v_i - \lambda w_i, \\ u_i' = v_i' - \mu w_i' \end{matrix} \ldots (217)$$

die Coordinaten eines Paars entsprechender Punkte M, M' oder Strahlen (L), (L') der beiden projectivischen Punktreihen oder Strahlenbüschel I und II.

In dem besonderen Fall, wo die Punkte M_1 und M_1' oder Strahlen (L_1) und (L_1') selbst ein Paar entsprechende Elemente der beiden projectivischen Gebilde I und II darstellen, muss μ mit λ gleichzeitig verschwinden, was in der Verwandtschaftsgleichung (213) offenbar $d = o$ bedingt. Wenn überdies auch noch M_2 und M_2' oder (L_2) und (L_2') je ein Paar entsprechender Elemente repräsentieren, muss λ mit μ gleichzeitig unendlich groß werden, was nur dann denkbar ist, wenn in (213) der Coefficient $a = o$ wird. Es nimmt sonach, sobald M_1 und M_1', sowie M_2 und M_2', oder (L_1) und (L_1'), sowie (L_2) und (L_2'), je ein Paar entsprechender Elemente der beiden projectivischen Gebilde I und II sein sollen, die frühere Gleichung der Projectivität die einfachere Gestalt an

$$(218) \ldots \qquad b\lambda + c\mu = o$$

und hieraus folgt

$$(219) \ldots \qquad \mu = k\lambda,$$

wenn man noch $k = -\dfrac{b}{c}$ setzt. Aus dieser einfachen Betrachtung ergibt sich demnach, dass die beiden Gleichungen

$$(220) \ldots \quad \begin{array}{l} M_1 - \lambda M_2 = o \\ M_1' - \lambda k M'_2 = o, \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} L_1 - \lambda L_2 = o \\ L_1' - \lambda k L_2' = o, \end{array} \quad \ldots (221)$$

in welchen λ einen veränderlichen Parameter darstellt, für jeden speciellen Wert des letzteren je ein Paar entsprechender Elemente der beiden projectivischen Gebilde I und II bestimmen, sobald $M_1 = o$, $M_1' = o$, sowie $M_2 = o$, $M_2' = o$, oder $L_1 = o$, $L_1' = o$, sowie $L_2 = o$, $L_2' = o$, die Gleichungen zweier Paare entsprechender Elemente sind. Man kann übrigens in den letzten Gleichungen auch noch kM_2' und kL_2' durch M_2' und L_2' ersetzen und dann nehmen (220) und (221) die etwas einfachere Form an

$$(222) \ldots \quad \begin{array}{l} M_1 - \lambda M_2 = o, \\ M_1' - \lambda M_2' = o \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} L_1 - \lambda L_2 = o, \\ L_1' - \lambda L_2' = o \end{array} \quad \ldots (223)$$

und diesmal sind

$M_1 = o$, $M_1' = o$; $M_2 = o$, $M_2' = o$ und	$L_1 = o$, $L_1' = o$; $L_2 = o$, $L_2' = o$ und
$M_1 - M_2 = o$, $M_1' - M_2' = o$	$L_1 - L_2 = o$, $L_1' - L_2' = o$

die Gleichungen von drei Paaren entsprechender Elemente. Ferner gehen in dem hier vorliegenden besonderen Fall die Gleichungen (216) und (217) zur Bestimmung der Coordinaten eines Paares entsprechender Elemente über in:

$$(224) \ldots \quad \begin{aligned} x_i &= y_i' - \lambda z_i, \\ x_i' &= y_i' - \lambda k z_i', \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} u_i &= v_i - \lambda w_i, \\ u_i' &= v_i' - \lambda k w_i', \end{aligned} \quad \ldots (225)$$

welche, sobald man nach dem Begriffe homogener Coordinaten $k z_i'$ durch z_i' und $k w_i'$ durch w_i' ersetzt, übergehen in die einfacheren:

$$(226) \ldots . \quad \begin{aligned} x_i &= y_i - \lambda z_i', \\ x_i' &= y_i' - \lambda z_i' \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} u_i &= v_i - \lambda w_i, \\ u_i' &= v_i' - \lambda w_i' \end{aligned} \quad \ldots . (227)$$

und diesmal sind wieder

y_i, y_i'; z_i, z_i' und $y_i - z_i$, $y_i' - z_i'$	v_i, v_i'; w_i, w_i' und $v_i - w_i$, $v_i' - w_i'$

die Coordinaten von drei Paaren entsprechender Elemente.

Wir haben bis jetzt immer von zwei gleichartigen Grundgebilden erster Stufe, d. h. von zwei projectivischen Punktreihen oder zwei projectivischen Strahlenbüscheln gesprochen, und erübrigt uns nunmehr die Behandlung desjenigen Falls, wo die beiden Gebilde ungleichartig sind, also das eine Gebilde eine Punktreihe, das andere ein Strahlenbüschel ist.

Man sagt nun, eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel sind projectivisch, wenn wieder einem jeden Elemente der Punktreihe ein Element des Strahlenbüschels entspricht.

Sind folglich $M_1 \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = o$ und $M_2 \equiv b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = o$ die Gleichungen zweier Elemente der Punktreihe, sowie $L_1 \equiv a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = o$ und $L_2' \equiv b_1' x_1 + b_2' x_2 + b_3' x_3 = o$ jene zweier Elemente des Strahlenbüschels, wobei jedoch im allgemeinen nicht angenommen wird, dass der Punkt M_1 dem Strahl (L_1) und der Punkt M_2 dem Strahl (L_2) entspricht; ferner λ und μ zwei veränderliche Parameter, welche der Relation (213) genügen müssen, so repräsentieren die Gleichungen

$$(228) \ldots \quad M_1 - \lambda M_2 = o, \qquad L_1 - \mu L_2 = o$$

für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ ein Paar entsprechender Elemente M und (L) dieser beiden ungleichartigen projectivischen Gebilde. Sind aber auch M_1 und (L_1), sowie M_2 und (L_2), je ein Paar entsprechender Elemente, so nimmt die Gleichung der Projectivität wieder die in (219) gegebene einfachere Gestalt an, weshalb die Gleichungen (228) übergehen in

$$(229) \ldots \qquad M_1 - \lambda M_2 = o, \qquad L_1 - \lambda k L_2 = o$$

und ist hierin k eine Constante, dagegen λ ein veränderlicher Parameter, welcher für jedes Paar entsprechender Elemente einen anderen Wert annimmt. Ebenso einfach gestaltet sich nun die Sache, sobald die einzelnen Elemente beider projectivischen Gebilde durch ihre Coordinaten bestimmt werden. Sind nämlich y_i und z_i, $i = 1, 2, 3$, die homogenen Coordinaten zweier Punkte M_1 und M_2 der Punktreihe, v_i und w_i, $i = 1, 2, 3$, jene zweier Strahlen (L_1) und (L_2) des Strahlenbüschels und entspricht vorläufig weder M_1 dem Strahl (L_1), noch M_2 dem Strahl (L_2), so bestimmen

$$(230) \ldots \qquad x_i = y_i - \lambda z_i, \qquad u_i = v_i - \mu w_i$$

für jedes Wertesystem von λ und μ, welches der Relation (213) genügt, die Coordinaten eines Paares entsprechender Elemente M und (L). In dem besonderen Fall, in welchem M_1 und (L_1), sowie M_2 und (L_2), einander entsprechen, nehmen (230) wieder die Form an

$$(231) \ldots \qquad x_i = y_i - \lambda z_i, \qquad u_i = v_i - \lambda k w_i.$$

§ 34. Sätze über projectivische Grundgebilde erster Stufe.

Satz. Zwei projectivische Grundgebilde erster Stufe erscheinen bestimmt durch drei Paare entsprechender Elemente.

Beweis. Sind $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2$ und λ_3, μ_3 diejenigen Werte der Parameter λ und μ, welche den gegebenen drei Paaren entsprechender Elemente angehören, so bestehen zufolge der früher vorgeführten Gleichung (213), d. i. nämlich

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o,$$

die drei folgenden Relationen, u. zw.:

$$a\lambda_1\mu_1 + b\lambda_1 + c\mu_1 + d = o,$$
$$a\lambda_2\mu_2 + b\lambda_2 + c\mu_2 + d = o,$$
$$a\lambda_3\mu_3 + b\lambda_3 + c\mu_3 + d = o,$$

und aus diesen und der Gl. (213) ergibt sich durch die Elimination der vier unbekannten Coefficienten a, b, c und d

$$(232) \ldots\ldots \begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = o$$

als Gleichung der Projectivität, daher etc. etc.

Aus diesem Satze folgt aber noch weiter, dass zwei conlocale projectivische Punktreihen oder Strahlenbüschel, d. h. zwei solche projectivische Punktreihen oder Strahlenbüschel, welche einen und denselben Träger besitzen, höchstens zwei Paare sich deckender entsprechender Elemente (Doppelelemente, tautologe Elemente) besitzen können; ferner zwei derartige Punktreihen oder Strahlenbüschel identisch sind, sobald dieselben drei Paare sich deckender entsprechender Elemente haben.

Satz. Sind zwei Grundgebilde erster Stufe projectivisch, so ist das Doppelverhältnis von vier Elementen des einen Gebildes immer gleich dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Elemente im anderen Gebilde.

Beweis. Es seien λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 die Parametervente von vier Elementen 1, 2, 3 und 4 des einen und μ_1, μ_2, μ_3 und μ_4 jene der vier entsprechenden Elemente 1′, 2′, 3′ und 4′ des anderen Gebildes. Dann sind, zufolge der früher gegebenen Bedeutung von λ_i und μ_i nach den Gleichungen (185) und (186), die Doppelverhältnisse

$$(a). (1234) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}, \quad (1'2'3'4') = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}$$

und, weil man durch Auflösung der Verwandtschaftsgleichung (213) nach dem Parameten μ die Relation erhält $\mu = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c}$ und aus dieser nach einigen einfachen algebraischen Operationen folgt

$$(b) \ldots\ldots \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4},$$

so ist in der That

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots (1'\,2'\,3'\,4') = (1\,2\,3\,4),$$

was zu beweisen war.

Folgerungen. Sind A, B, M, N vier Punkte der einen und A', B', M', N' die diesen entsprechenden Punkte der anderen Reihe, so ist nach dem soeben bewiesenen Satze $(ABMN) = (A'B'M'N')$ oder auch $\frac{(ABM)}{(ABN)} = \frac{(A'B'M')}{(A'B'N')}$, woraus sich ergibt $\frac{(ABM)}{(A'B'M')} = \frac{(ABN)}{(A'B'N')} = k$, sobald k eine Constante bezeichnet, die für jedes Paar entsprechender Punkte M, M' denselben Wert besitzt. Es ist somit auch $(ABM) - k.(A'B'M') = o$, welche Gleichung, zufolge der Bedeutung der in ihr vorkommenden Symbole (ABM) und $(A'B'M')$, auch so geschrieben werden kann

$$AM.B'M' - k.A'M'.BM = o.$$

Anderseits ist aber, wenn noch O ein fester Punkt der ersten und O' ein solcher der zweiten Reihe wäre, wobei aber O keineswegs dem Punkte O' entspricht,

$$AM = OM - OA,\quad BM = OM - OB,\quad A'M' = O'M' - O'A'$$
$$B'M' = O'M' - O'B'$$

und nimmt dadurch obige Gleichung die Gestalt an

$$(1-k).OM.O'M' + (k.O'A' - O'B').OM$$
$$+ (k.OB - OA).O'M' + OA.O'B' - kO'A'.OB = o,$$

woraus sich ergibt, wenn noch $OM = x$ und $O'M' = x'$ gesetzt wird,

$$(233) \quad \ldots \quad \alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = o$$

als Verwandtschaftsgleichung zweier projectivischer Punktreihen in anderer Form, sobald x und x' die Entfernungen zweier entsprechender Punkte M und M' von den festen Punkten O und O' angeben und α, β, γ, δ vier Constanten sind.

Eine ähnliche Relation lässt sich nun auch für zwei projectivische Strahlenbüschel auffinden, und seien zu diesem Ende wieder (A), (B), (L), (M) vier Strahlen des einen und (A'), (B'), (L'), (M') die denselben entsprechenden Strahlen des anderen Büschels, so dass nach dem letzten Satze die Gleichheit besteht $(ABLM) = (A'B'L'M')$ oder $(ABL) - k(A'B'L') = o$. Aus der letzten Gleichung fließt aber

nach der Bedeutung der beiden hierin vorkommenden Symbole (ABL) und $(A'B'L')$ die folgende

$$\sin(A,L) \,.\, \sin(B',L') - k \sin(A',L') \,.\, \sin(B,L) = o,$$

aus welcher man nun leicht eine Gleichung ableiten kann, welche dieselbe Form besitzt, wie (233). Ist nämlich (O) ein fester Strahl des ersten und (O') ein solcher des zweiten Büschels, wobei jedoch (O) keineswegs (O') entspricht, so ist zunächst

$$(A,L) = (O,L) - (O,A), \quad (B,L) = (O,L) - (O,B),$$
$$(A',L') = (O',L') - (O',A'), \quad (B',L') = (O'L') - (O',B'),$$

weshalb obige Gleichung auch so gegeben werden kann

$$\begin{aligned}[\cos(O,A) \,.\, \cos(O',B') - k\cos(O',A')\cos(O,B)] \,.\, \mathrm{tg}(O,L) \,.\, \mathrm{tg}(O',L') \\ + [k\sin(O',A')\cos(O,B) - \cos(O,A)\sin(O'B')]\,\mathrm{tg}(O,L) \\ + [k \,.\, \cos(O',A')\sin(O,B) - \sin(O,A)\cos(O',B')]\,\mathrm{tg}(O',L') \\ + [\sin(O,A)\sin(O',B') - k\sin(O',A')\sin(O,B)] = o\end{aligned}$$

und hieraus folgt, sobald man noch $u = \mathrm{tg}(O,L)$ und $u' = \mathrm{tg}(O',L')$ setzt,

$$(234) \quad \ldots \quad \alpha u u' + \beta u + \gamma u' + \delta = o$$

als Verwandtschaftsgleichung von zwei projectivischen Strahlenbüscheln in anderer Form, wenn, wie bereits erwähnt wurde, u und u' die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel angeben, welche die beiden festen Strahlen (O) und (O'), von welchen ersterer dem einen, letzterer dem anderen Büschel angehört, mit den einander entsprechenden Strahlen (L) und (L') bilden, während wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Constanten bezeichnen.

In dem besonderen Fall, in welchem die festen Punkte O, O' oder Strahlen $(O), (O')$ selbst ein Paar entsprechender Elemente der beiden projectivischen Gebilde darstellen, ist aus nahe liegenden Gründen in den Gleichungen (233) und (234) die Constante $\delta = o$ zu setzen.

Satz. Sind I und III, sowie II und III, je zwei projectivische Punktreihen, so sind auch I und II projectivisch.

Satz. Sind I und III, sowie II und III, je zwei projectivische Strahlenbüschel, so sind auch I und II projectivisch.

Beweis. Es seien $M_1 - \lambda M_2 = o$ und $M_1'' - \nu M_2'' = o$ die Gleichungen zweier entsprechender Punkte M und und M'' der Reihen I und III, sowie $M_1' - \mu M_2' = o$ und $M_1'' - \nu M_2'' = o$ jene zweier entsprechender Punkte M' und M'' der Reihen II und III,

Beweis. Es seien $L_1 - \lambda L_2 = o$ und $L_1'' - \nu L_2'' = o$ die Gleichungen zweier entsprechender Strahlen (L) und (L'') der Büschel I und III, sowie $L_1' - \mu L_2' = o$ und $L_1'' = \nu L_2'' = o$ jene zweier entsprechender Strahlen (L') und (L'') der Strahlenbüschel II und III,

ferner

$$a\lambda\nu + b\lambda + c\nu + d = o$$
$$a'\mu\nu + b'\mu + c'\nu + d' = o$$

die Verwandtschaftsgleichungen für I und III, beziehungsweise II und III. Dann folgt durch die Elimination von ν aus den beiden letzten Gleichungen

$$\begin{vmatrix} (a\lambda + c) & (b\lambda + d) \\ (a'\mu + c') & (b'\mu + d') \end{vmatrix} = o,$$

oder

$$(ab).\lambda\mu + (ad' - c'b).\lambda + (cb' - a'd).\mu + (cd) = o,$$

welche Relation den obigen Satz beweiset.

Von selbst ergeben sich nach dem in § 18 bereits bewiesenen Satze von Pappus die beiden Sätze:

Legt man durch zwei oder mehrere projectivische Punktreihen Strahlenbüschel, so sind dieselben ebenfalls projectivisch.

Satz. Durch einen jeden Punkt lassen sich zwei Strahlen legen, von welchen ein jeder ein Paar entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen enthält.

Bringt man zwei oder mehrere projectivische Strahlenbüschel zum Schnitte mit einer Transversalen, so sind die dadurch erzeugten Punktreihen ebenfalls projectivisch.

Satz. Auf einer jeden Geraden befinden sich zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel.

Beweis. Bekanntlich stellen die beiden Gleichungen (§ 33) $(A_1 u + B_1 v + C_1) - \lambda.(A_2 u + B_2 v + C_2) = o$ $(A_1' u + B_1' v + C_1') - \lambda.k(A_2' u + B_2' v + C_2') = o$	**Beweis.** Bekanntlich stellen die beiden Gleichungen (§ 33) $(A_1 x + B_1 y + C_1) - \lambda.(A_2 x + B_2 y + C_2) = o$ $(A_1' x + B_1' y + C_1') - \lambda.k(A_2' x + B_2' y + C_2') = o$

für jeden Wert von λ

ein Paar entsprechender Punkte von zwei projectivischen Punktreihen dar. Soll nun die Verbindungsgerade der Elemente eines solchen Paars durch den Punkt $Au + Bv + C = o$ gehen, so muss ein Wertesystem von u und v existieren,	ein Paar entsprechender Strahlen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln dar. Soll nun der Schnittpunkt der Elemente eines solchen Paars in der Geraden $Ax + By + C = o$ liegen, so muss ein Wertesystem von x und y existieren,

welches den drei letzten Gleichungen gleichzeitig genügt, was aber

$$\begin{vmatrix} (A_1 - \lambda A_2) & (B_1 - \lambda B_2) & (C_1 - \lambda C_2) \\ (A_1' - \lambda k A_2') & (B_1' - \lambda k B_2') & (C_1' - \lambda k C_2') \\ A & B & C \end{vmatrix} = o$$

bedingt, und diese Gleichung ist in λ vom zweiten Grade, womit der Satz bewiesen erscheint.

§ 35. Ausgezeichnete Elemente.

Bei zwei projectivischen Punktreihen oder Strahlenbüscheln 1. Ord., d. h. also, bei zwei gleichartigen projectivischen Gebilden erster Stufe, existieren immer gewisse ausgezeichnete Elemente, welche zu den übrigen Elementen dieser Gebilde in einer einfachen Beziehung stehen.

Liegen zwei projectivische Punktreihen vor, so sind diese ausgezeichneten Elemente die unendlich fernen Punkte M_∞ und M'_∞ der Träger (T) und (T') beider Reihen, sowie die diesen Punkten entsprechenden Punkte G' und G, welche auch die Gegenpunkte heißen. Übergehend auf die Bestimmung der letzteren und deren Eigenschaften, mache

man die Annahme, dass $M_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o$ und $M_1' \equiv A_1' u + B_1' v + C_1' = o$, sowie $M_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 = o$ und $M_2' \equiv A_2' u + B_2' v + C_2' = o$, die Gleichungen von zwei Paaren entsprechender Punkte seien, mithin, sobald noch k eine Constante bedeutet, nach Rel. (220) die Gleichungen $M \equiv M_1 - \lambda M_2 = o$ und $M' \equiv M_1' - \lambda k M_2' = o$ irgend ein drittes Paar entsprechender Elemente darstellen, u. zw. für jeden speciellen Wert von λ. Die Abstandsverhältnisse der Punkte M und M', bezüglich M_1, M_2 und M_1', M_2' als Grundpunkte, sind hierbei dem Parameter λ direct proportioniert, und es ist nach Gl. (95)

$$(a) \quad . \; . \; . \quad (M_1 M_2 M) = \lambda \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \quad (M_1' M_2' M') = \lambda k \frac{\varrho_1'}{\varrho_2'}$$

und hierin $\varrho_1 = \frac{1}{C_1}$, $\varrho_2 = \frac{1}{C_2}$ ..... Ist nun M identisch mit dem unendlich fernen Punkte M_∞ des Trägers (T) der ersten Reihe, so fällt M' mit dem Gegenpunkte G' zusammen, und weil nach § 15 bekanntlich $(M_1 M_2 M_\infty) = 1$ ist, so wird für den Punkt M_∞ nach der ersten obiger Gleichungen $\lambda \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1$, oder $\lambda = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, mithin zufolge der zweiten der Gleichungen (a)

$$(b) \quad . \; . \; . \quad (M_1' M_2' G') = k \frac{\varrho_2}{\varrho_1} . \frac{\varrho_1'}{\varrho_2'};$$

wäre dagegen M' identisch mit dem unendlich fernen Punkte M_∞' des Trägers (T') der zweiten Reihe, so fiele sodann M mit dem Gegenpunkte G zusammen und würde, wegen $(M_1' M_2' M_\infty') = 1$, zufolge der zweiten der Gleichungen (a) offenbar $\lambda k \frac{\varrho_1'}{\varrho_2'} = 1$, oder $\lambda = \frac{\varrho_2'}{\varrho_1'} . \frac{1}{k}$ und daher

$$(c) \quad . \; . \; . \quad (M_1 M_2 G) = \frac{1}{k} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} . \frac{\varrho_2'}{\varrho_1'}.$$

Nun multipliciere man die beiden eben gewonnenen Gleichungen (b) und (c) mit einander und erhält dann

$$(M_1 M_2 G)(M_1' M_2' G') = \frac{M_1 G}{M_2 G} \cdot \frac{M_1' G'}{M_2' G'} = \frac{G M_1}{G M_2} \cdot \frac{G' M_1'}{G' M_2'} = 1,$$

oder

$$G M_1 \, . \, G' M_1' = G M_2 \, . \, G' M_2'$$

und hieraus fließt der Satz:

Das Product aus den Abständen zweier entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen von ihren zugehörigen Gegenpunkten ist für alle Paare entsprechender Punkte constant.

Wenn somit M, M' irgend ein Paar entsprechender Punkte zweier solcher Punktreihen darstellen, so ist immer das Product

$$(235) \quad . \; . \; . \quad GM \,.\, G'M' = f$$

und bedeutet hierin die Constante f selbstverständlich eine Fläche, welche auch die Potenz der projectivischen Beziehung heißt.

Zu demselben Satze führt übrigens auch die Verwandtschaftsgleichung (233), d. i.

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = o,$$

in welcher bekanntlich $x = OM$ und $x' = O'M'$ die Entfernungen zweier entsprechender Punkte M, M' von den beiden festen Punkten O und O' angeben. Setzt man nun in (233) $x = \infty$, wie dies dem Punkte M_∞ entspricht, so nimmt die Gl. (233), wenn man sie noch vorerst durch x dividiert, die einfache Gestalt an $\alpha x' + \beta = o$ und hieraus folgt dann $x' = O'G' = -\frac{\beta}{\alpha}$; dividiert man aber Gl. (233) durch x', setzt alsdann $x' = \infty$, so folgt $\alpha x + \gamma = o$ und hieraus $x = OG = -\frac{\gamma}{\alpha}$, wodurch die Abstände der beiden Gegenpunkte von den Fixpunkten O und O' gefunden sind. Nun lassen sich aber auch leicht die Strecken GM und $G'M'$ berechnen. Denn es ist ja zunächst die Strecke $GM = OM - OG$, jene $G'M' = O'M' - O'G'$ und aus diesen Relationen folgt nach Substitution der eben berechneten Werte von OG und $O'G'$, wenn man noch, wie oben, $OM = x$ und $O'M' = x'$ setzt, $GM = x + \frac{\gamma}{\alpha}$ und $G'M' = x' + \frac{\beta}{\alpha}$, weshalb das Product

$$GM \,.\, G'M' = xx' + \frac{\beta x + \gamma x'}{\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$$

oder, wie ein Blick auf Gl. (233) lehrt,

$$GM \,.\, G'M' = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha^2} = \text{Const.}$$

wird, in Übereinstimmung mit dem Früheren.

Derartige ausgezeichnete Elemente lassen sich auch bei zwei projectivischen Strahlenbüscheln finden. Es seien zu diesem Zwecke wieder

$$(d) \ldots \begin{array}{l} (A_1 - \lambda_1 A_2)x + (B_1 - \lambda_1 B_2)y + (C_1 - \lambda_1 C_2) = o, \\ (A_1 - \lambda_2 A_2)x + (B_1 - \lambda_2 B)y + (C_1 - \lambda_2 C_2) = o \end{array}$$

die Gleichungen zweier Elemente des einen und

$$(e) \ldots \begin{array}{l} (A_1' - \mu_1 A_2')x + (B'_1 - \mu_1 B_2')y + (C_1' - \mu_1 C_2') = o, \\ (A_1' - \mu_2 A_2')x + (B_1' - \mu_2 B_2')y + (C_1' - \mu_2 C_2') = o \end{array}$$

jene der entsprechenden Elemente im anderen Büschel, wobei die Parameter λ_i und μ_i den Relationen unterworfen sind

$$(f) \ldots \begin{array}{l} a\lambda_1\mu_1 + b\lambda_1 + c\mu_1 + d = o, \\ a\lambda_2\mu_2 + b\lambda_2 + c\mu_2 + d = o. \end{array}$$

Nachdem nun über die beiden Parameter λ_1 und λ_2 ganz frei verfügt werden kann, ist wohl eine solche Wahl denkbar, bei welcher die durch die Gleichungen (d) gegebenen Strahlen auf einander senkrecht stehen, und müssen dann λ_1 und λ_2 nach Gl. (60) der Bedingung (g) genügen, d. i.:

$$(A_2^2 + B_2^2)\lambda_1\lambda_2 - (A_1A_2 + B_1B_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + (A_1^2 + B_1^2) = o.$$

Man kann jetzt λ_1 annehmen und dann aus den drei letzten Gleichungen λ_2, μ_1 und μ_2 berechnen, wodurch man nach Einführung dieser Werte in (d) und (e) die Gleichungen zweier auf einander senkrechten Strahlen des ersten Büschels und die denselben entsprechenden Strahlen im zweiten Büschel erhält. Es lässt sich nun sehr leicht der Nachweis erbringen, dass unter den Strahlenpaaren des zweiten Büschels, welche den auf einander senkrechten Strahlen des ersten Büschels entsprechen, ein Strahlenpaar existiert, dessen Elemente ebenfalls auf einander senkrecht stehen. In diesem Fall kommt nämlich zu den drei letzten Relationen, welchen die vier Parameter λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 unterliegen, noch eine vierte, u. zw.

$$(h) \quad . \quad . \quad . \quad (A'^2_2 + B'^2_2)\mu_1\mu_2 - (A_1'A_2' + B_1'B_2')(\mu_1 + \mu_2) + (A'^2_1 + B'^2_1) = o$$

hinzu, und aus den beiden Gleichungen (f) und der letzten Gleichung folgt durch die Elimination von μ_1 und μ_2

$$(i) \quad . \quad . \quad . \quad [b^2(A'^2_2 + B'^2_2) + 2ab(A'_1A'_2 + B'_1B'_2) + a^2(A'^2_1 + B'^2_1)]\lambda_1\lambda_2 + [bd(A'^2_2 + B'^2_2) + (bc + ad) . (A'_1A'_2 + B'_1B'_2) + ac(A'^2_1 + B'^2_1)](\lambda_1 + \lambda_2) + [d^2(A'^2_2 + B'^2_2) + 2dc(A_1'A_2' + B_1'B_2') + c^2(A'^2_1 + B'^2_1)] = o.$$

Man hat sonach zur eindeutigen Bestimmung von λ_1 und λ_2 die beiden Gleichungen (g) und (i), aus welchen sich zunächst ergibt, wenn man dieselben nach $\lambda_1\lambda_2$ und $(\lambda_1 + \lambda_2)$ auflöst,

$$\lambda_1 . \lambda_2 = A, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = B$$

und hieraus

$$(k) \quad . \quad . \quad . \quad \lambda_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A},}{2}.$$

Sind nun λ_1 und λ_2 auf diese Weise ausfindig gemacht, so lassen sich auch μ_1 und μ_2 mittelst der Gleichungen (f) eindeutig berechnen und ist dadurch in der That der Beweis geliefert, dass unter jenen Strahlenpaaren des zweiten Büschels, welche zwei auf einander senkrechten Strahlen des ersten entsprechen, ein solches ausfindig gemacht werden kann, dessen Elemente ebenfalls auf einander senkrecht stehen. Es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass die bewussten Parameter λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 nicht nur eindeutig bestimmte Größen sind, sondern, dass dieselben auch immer reell sein müssen, und zu diesem Zwecke mache man die Annahme, dass die Gleichungen der Strahlen (L_1), (L_2) und (L_1') (L_2') in der Hesse'schen Normalform gegeben wären und $(L_1, L_2) = (L_1', L_2') = \frac{\pi}{2}$ ist, was statthaft erscheint, indem hier weder (L_1), (L_1'), noch (L_2), (L_2'), ein Paar entsprechender Strahlen darstellen. (Siehe § 33.) Dann wird $A_1^2 + B_1^2 = A_1'^2 + B_1'^2 = A_2^2 + B_2^2 = A_2'^2 + B_2'^2 = 1$ und $A_1A_2 + B_1B_2 = A_1'A_2' + B_1'B_2' = o$, weshalb die früher gewonnenen Gleichungen (g) und (i) übergehen in die bedeutend einfacheren:

$$\lambda_1\lambda_2 + 1 = o, \qquad (a^2 + b^2)\lambda_1\lambda_2 + (ac + bd)(\lambda_1 + \lambda_2) + (c^2 + d^2) = o$$

und aus diesen folgt:

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ac + bd},$$

woraus man sofort erkennt, dass λ_1 und λ_2, mithin auch μ_1 und μ_2 reell sein müssen. Man gelangt demnach zu dem wichtigen Satze:

Sind zwei Strahlenbüschel projectivisch, so existieren in einem jeden Büschel zwei auf einander senkrecht stehende Strahlen, deren entsprechende Strahlen im anderen Büschel ebenfalls auf einander senkrecht stehen, und die hier betrachteten Strahlen sind reell.

Man nennt diese entsprechenden Normalstrahlen die Gegenstrahlen beider Büschel, und sie sollen in Hinkunft mit (G_1) und (G_2) in dem einen, mit (G_1') und (G_2') in dem anderen Büschel bezeichnet werden. Es ist daher $(G_1, G_2) = (G_1', G_2') = \frac{\pi}{2}$, ferner (G_1) und (G_1'), sowie (G_2) und (G_2'), je ein Paar entsprechender Strahlen, und gehören (G_1), (G_2) dem einen; (G_1'), (G_2') dem anderen Büschel an.

Die eben definierten Gegenstrahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel zeichnen sich durch eine bemerkenswerte Eigenschaft aus, die ausgesprochen erscheint in dem Satze:

Das Product aus den trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen (L) und (L') mit den zwei nicht entsprechenden Gegenstrahlen (G_1) und (G_2') oder (G_2) und (G_1') bilden, ist constant.

Um diesen Satz einfach analytisch zu beweisen, wähle man die Gegenstrahlen beider projectivischer Büschel zu Grundstrahlen der letzteren und erhält dann nach § 34, Gl. (221), für ein Paar entsprechender Strahlen die Gleichungen

$$L \equiv G_1 - \lambda G_2 = o, \qquad L' \equiv G_1' - \lambda k G_2' = o,$$

in welchen k eine Constante bedeutet, während λ ein veränderlicher Parameter ist, der für jedes Paar entsprechender Strahlen einen anderen speciellen Wert besitzt. Aus diesen Gleichungen folgt nun nach Gl. (99)

$$(G_1 G_2 L) = \lambda \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \qquad (G_1' G_2' L') = \lambda k \frac{\varrho_1'}{\varrho_2'},$$

und weil in dem vorliegenden Fall

$$(G_1 G_2 L) = \frac{\sin(G_1 L)}{\sin(G_2, L)} = -\frac{\sin(G_1 L)}{\sin(L, G_2)} = -\operatorname{tg}(G_1, L),$$

$$(G_1' G_2' L') = \frac{\sin(G_1' L')}{\sin(G_2' L')} = -\frac{\sin(L' G_1')}{\sin(G_2' L')} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(G_2' L')}$$

ist, so erhält man, zufolge der unmittelbar vorangegangenen Relationen, die Gleichungen

$$\operatorname{tg}(G_1, L) = -\lambda \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \qquad \operatorname{tg}(G_2', L') = -\frac{\varrho_2'}{\varrho_1'} \cdot \frac{1}{\lambda k}$$

und hieraus, wenn man dieselben mit einander multipliciert,

$$\operatorname{tg}(G_1, L) \cdot \operatorname{tg}(G_2', L') = +\frac{\varrho_1 \varrho_2'}{\varrho_2 \varrho_1'} \cdot \frac{1}{k}.$$

Es ist somit das Product aus den trigonometrischen Tangenten der beiden Winkel (G_1, L) und (G_2', L') unabhängig von dem jeweiligen, die Strahlen (L) und (L') bestimmenden Werte von λ, und demnach in der That:

$$(236) \ldots\ldots \operatorname{tg}(G_1, L) \cdot \operatorname{tg}(G_2', L') = f,$$

wenn f eine Constante bedeutet.

§ 36. Perspectivische Grundgebilde erster Stufe.

Zwei projectivische Punktreihen sind perspectivisch, wenn zwei entsprechende Elemente zusammenfallen.

Zwei projectivische Strahlenbüschel sind perspectivisch, wenn zwei entsprechende Elemente zusammenfallen.

Gestützt auf diese Definition kann man daher sagen, dass die beiden Gleichungen

$$(237) \ldots \begin{array}{l} M_1 - \lambda M_2 = o, \\ M_1 - \mu M_2' = o \end{array}$$

zwei perspectivische Punktreihen darstellen,

$$\begin{array}{l} L_1 - \lambda L_2 = o, \\ L_1 - \mu L_2' = o \end{array} \ldots (238)$$

zwei perspectivische Strahlenbüschel darstellen,

sobald λ und μ veränderliche Parameter repräsentieren, unterworfen der Bedingung:

$$(239) \ldots\ldots\ldots\ldots b\lambda + c\mu = o.$$

Satz. Die Verbindungsgeraden entsprechender

Satz. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von

Punkte von zwei perspectivischen Punktreihen gehen durch einen und denselben Punkt, genannt das perspectivische Centrum.

Beweis. Die Coordinaten u, v einer Geraden, welche ein Paar entsprechender Punkte M, M' mit einander verbindet, werden gefunden, sobald man die Gleichungen (237) nach u und v auflöst und nach vollzogener Auflösung für λ und μ dasjenige Wertesystem einführt, welches diesem Punktpaar angehört. Eliminiert man daher λ und μ aus den drei Gleichungen (237) und (239), so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes aller Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, und diese Gleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} M_1, & -M_2, & o \\ M_1, & o, & -M_2' \\ o, & b, & c \end{vmatrix} = o,$$

zwei perspectivischen Strahlenbüscheln liegen in einer und derselben Geraden, genannt die perspectivische Achse oder der perspectivische Durchschnitt.

Beweis. Die Coordinaten x, y des Schnittpunktes eines Paars entsprechender Strahlen (L), (L') werden gefunden, sobald man die Gleichungen (238) nach x und y auflöst und nach vollzogener Auflösung für λ und μ dasjenige Wertesystem einführt, welches diesem Geradenpaar angehört. Eliminiert man daher λ und μ aus den drei Gleichungen (238) und (239), so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes aller Schnittpunkte entsprechender Strahlen, und diese Gleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} L_1, & -L_2, & o \\ L_1, & o, & -L_2' \\ o, & b, & c \end{vmatrix} = o,$$

oder

$$M_1 \,.\, (bM_2' + cM_2) = o, \qquad\qquad L_1\,(b\,L_2' + c\,L_2) = o,$$

welche Gleichung in die beiden linearen Gleichungen zerfällt

$$(240) \ldots \begin{array}{r} M_1 = o, \\ O \equiv b\,M_2' + c\,M_2 = o, \end{array} \qquad \begin{array}{r} L_1 = o, \\ T \equiv b\,L_2' + c\,L_2 = o, \end{array} \ldots (241)$$

von welchen

die erste dem Punkte M_1 angehört, die zweite aber einen in der Geraden $M_2\,M_2'$ liegenden Punkt O (Fig. 38) be-

die erste der Geraden (L_1) angehört, die zweite aber einen durch den Schnittpunkt der Strahlen (L_2) und (L_2') gehen-

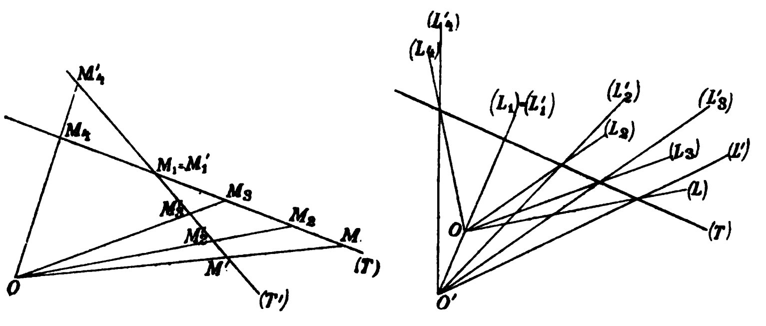
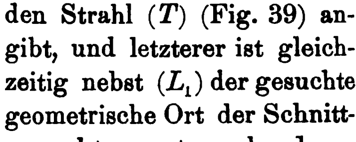


Fig. 38. Fig. 39.

stimmt, und dieser ist gleichzeitig nebst M_1 der gesuchte geometrische Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte. Die zweite der obigen Gleichungen ist somit die Gleichung des perspectivischen Centrums der beiden perspectivischen Reihen.



den Strahl (T) (Fig. 39) angibt, und letzterer ist gleichzeitig nebst (L_1) der gesuchte geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen. Die zweite der obigen Gleichungen ist somit die Gleichung der perspectivischen Achse der beiden perspectivischen Strahlenbüschel.

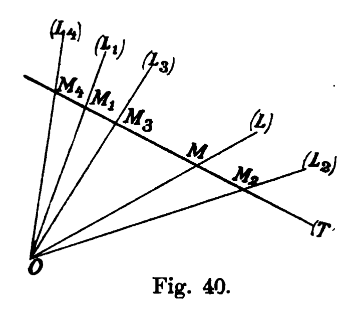


Fig. 40.

Eine Punktreihe und ein zu derselben projectivischer Strahlenbüschel sind perspectivisch, wenn ein jeder Punkt der Reihe in dem entsprechenden Strahl des Büschels zu liegen kommt (Fig. 40). Es ist nun die Frage, wann sind die durch die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &(A_1 x + B_1 y + C_1) - \lambda . (A_2 x + B_2 y + C_2) = o, \\ (242)\ldots &(a_1 u + b_1 v + 1) - \mu (a_2 u + b_2 v + 1) = o, \\ &a \lambda \mu + b \lambda + c \mu + d = o \end{aligned}$$

gegebenen projectivischen Gebilde (Strahlenbüschel und Punktreihe) perspectivisch? Offenbar wird dies dann stattfinden, wenn für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ die Identität besteht:

$$(A_1 - \lambda A_2)\frac{a_1 - \mu a_2}{1-\mu} + (B_1 - \lambda B_2)\frac{b_1 - \mu b_2}{1-\mu} + (C_1 - \lambda C_2) = o,$$

und aus dieser und der letzten der drei vorangegangenen Gleichungen folgt durch die Elimination von μ die Relation:

$$\begin{aligned}&[a(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2) + b(A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2)]\lambda^2 + \\ &+ [c(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2) - a(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1) - \\ &- b(A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1) + d(A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2)]\lambda - \\ &- [c(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1) + d(A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1)] = o,\end{aligned}$$

welche befriedigt werden soll für jeden reellen Wert des Parameters λ. Letzteres ist aber, wie ein Blick auf die letzte Gleichung sofort zeigt, nur dann möglich, wenn

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C = o, \quad A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2 = o,$$
$$b(A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1) = c(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2), \quad a = d = o$$

ist, d. h. also die durch die beiden ersten der Gleichungen (242) gegebenen Gebilde sind dann perspectivisch, wenn der Punkt $a_1 u + b_1 v + 1 = o$ in der Geraden $A_1 x + B_1 y + C_1 = o$ und jener $a_2 u + b_2 v + 1 = o$ in der Geraden $A_2 x + B_2 y + C_2 = o$ liegt, ferner die Gleichung der Projectivität lautet:

$$(243)\,..\,(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2)\,.\,\lambda + (A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1)\,\mu = o.$$

Von selbst folgen noch die nachfolgenden einfachen Sätze über perspectivische Grundgebilde erster Stufe.

Bringt man einen Strahlenbüschel zum Schnitte mit n Transversalen (T_i), d. h. solchen Geraden, welche nicht durch das Centrum O des Büschels gehen, so erhält man n Punktreihen, welche untereinander perspectivisch sind und von welchen eine jede noch überdies perspectivisch ist mit dem Strahlenbüschel. Verschiebt man dann die Transversalen (T_i) mit den auf diese Weise gefundenen Punktreihen, so

Verbindet man die einzelnen Elemente einer Punktreihe durch Strahlen mit n Punkten $O_1, O_2 \ldots O_n$, welche außerhalb des Trägers (T) der Reihe liegen, so erhält man n Strahlenbüschel, welche unter einander perspectivisch sind und von welchen ein jeder noch überdies perspectivisch ist mit der Punktreihe. Verschiebt man dann diese n-Strahlenbüschel beliebig in ihrer Ebene, so verlieren dieselben ihre perspectivische

verlieren die letzteren ihre perspectivische Lage, verbleiben aber noch immer projectivisch, d. h. je zwei dieser Reihen sind projectivisch, ebenso eine jede Reihe und der Strahlenbüschel.

Bringt man zwei perspectivische Strahlenbüschel zum Schnitte mit einer nicht durch die Mittelpunkte der beiden Büschel gehenden Geraden (T), so erhält man zwei projectivische Punktreihen.

Lage, verbleiben aber noch immer projectivisch, d. h. je zwei dieser Büschel sind projectivisch, ebenso ein jeder Büschel mit der Reihe.

Verbindet man die Elemente von zwei perspectivischen Punktreihen durch Strahlen mit einem außerhalb der Träger der beiden Reihen liegenden Punkte O, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel.

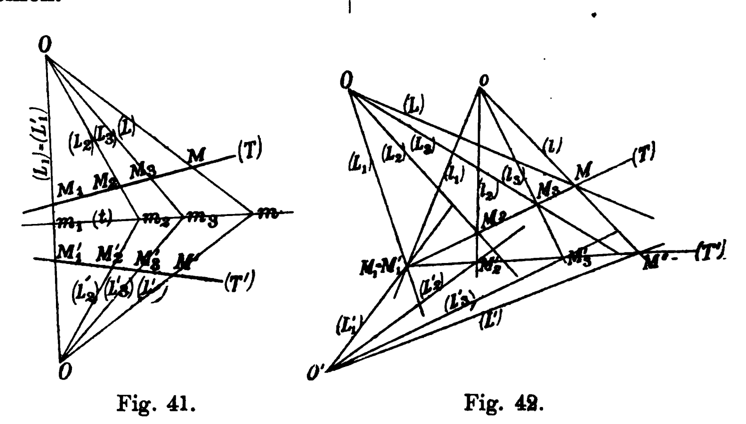


Fig. 41. Fig. 42.

§ 37. Construction der projectivischen Punktreihen und Strahlenbüschel.

Sind zwei projectivische Punktreihen I und II durch drei Paare M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' entsprechender Punkte gegeben, so kann man nachfolgendes Verfahren einschlagen, um zu einem Punkte M der Reihe I den entspre-

Sind zwei projectivische Strahlenbüschel I und II durch drei Paare (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3), (L_3') entsprechender Strahlen gegeben, so kann man nachfolgendes Verfahren einschlagen, um zu einem Strahl (L) des Büschels

chenden Punkt M' von II constructiv zu ermitteln. Man lege nämlich durch die Punkte M_1 und M_1' (Fig. 41) den Strahl $(L_1) = (L_1')$ und wähle in demselben die Punkte O und O', welche man durch die Strahlen (L_2), (L_3) und (L_2'), (L_3') mit den Punkten M_2, M_3 und M_2', M_3' verbindet. Die Strahlen (L_2) und (L_2') durchschneiden sich in m_2, jene (L_3) und (L_3') in m_3, und die so erhaltenen Punkte m_2 und m_3 bestimmen die Gerade (t), welche die (L_1) in m_1 durchschneidet und als Träger einer dritten Punktreihe III functioniert. Nun verbinde man den Punkt M, dessen entsprechender Punkt M' constructiv zu finden ist, mit O durch den Strahl (L) und bringe letzteren mit dem Träger (t) zum Durchschnitte, wodurch sich der Punkt m ergibt, der mit O' durch den Strahl (L') zu verbinden ist und den Träger (T') der Reihe II in dem gesuchten Punkte M' trifft.

I den entsprechenden Strahl (L') von II constructiv zu bestimmen. Man lege nämlich durch den Schnittpunkt $M_1 = M_1'$ (Fig. 42) der beiden Strahlen (L_1) und (L_1') die beiden Transversalen (T) und (T'), von welchen erstere die Strahlen (L_1), (L_2) und (L_3) in den Punkten M_1, M_2 und M_3; letztere dagegen die Strahlen (L_1'), (L_2') und (L_3') in M_1', M_2' und M_3' trifft. Nun verbinde man M_2' und M_2 durch (l_2), M_3 und M_3' durch (l_3) und erhält als Schnittpunkt dieser beiden eben gefundenen Strahlen den Punkt o, welcher als Mittelpunkt eines dritten Strahlenbüschels functioniert. Schließlich bringe man den Strahl (L) des Büschel I, dessen entsprechender Strahl (L') im Büschel II durch Construction bestimmt werden soll, mit dem Träger (T) zum Durchschnitte, wodurch sich der Punkt M ergibt, lege durch letzteren und den früher ermittelten Punkt o den Strahl (l), welcher die Transversale (T') im Punkte M' trifft, und verbinde letzteren mit dem Centrum O' des zweiten Büschels durch einen Strahl, welcher gleichzeitig der gesuchte (L') ist.

Um die Richtigkeit der eben gezeigten Construction zu constatieren, wird bemerkt, dass die Punktreihen I und III, sowie jene II und III, perspectivisch sind, weshalb nach einem bekannten Satze über projectivische Punktreihen, weil M_1, m_1; M_2, m_2; M_3, m_3 und M, m; sowie M_1', m_1; M_2' m_2; M_3', m_3 und M', m Paare entsprechender Punkte darstellen und perspectivische Punktreihen auch gleichzeitig projectivisch sind,

$$(M_1 M_2 M_3 M) = (m_1 m_2 m_3 m),$$
$$(M_1' M_2' M_3' M') = (m_1 m_2 m_3 m)$$

Um auch hier die Richtigkeit der Construction zu beweisen, sei zunächst wieder bemerkt, dass die Strahlenbüschel I und III, sowie jene II und III, perspectivisch sind, mithin nach einem bekannten Satze über projectivische Strahlenbüschel, weil (L_1), (l_1); (L_2), (l_2); (L_3), (l_3) und (L), (l); sowie (L_1'), (l_1); (L_2') (l_2); (L_3'), (l_3) und (L'), (l) Paare entsprechender Strahlen darstellen und perspectivische Strahlenbüschel auch gleichzeitig projectivisch sind,

$$(L_1 L_2 L_3 L) = (l_1 l_2 l_3 l),$$
$$(L_1' L_2' L_3' L') = (l_1 l_2 l_3 l)$$

ist, woraus sich ergibt

$$(M_1 M_2 M_3 M) = (M_1' M_2' M_3' M'),$$

zum Beweise, dass der so gefundene Punkt M' in der That dem Punkte M entspricht.

$$(L_1 L_2 L_3 L) = (L_1' L_2' L_3' L'),$$

zum Beweise, dass der so gefundene Strahl (L') in der That dem Strahl (L) entspricht.

Es gibt jedoch eine noch viel einfachere und bessere Methode, um zwei projectivische Punktreihen oder Strahlenbüschel zu vervollständigen, und diese gründet sich auf die beiden nachfolgenden Sätze, nämlich:

Sind M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' drei Paare entsprechender Punkte von zwei projectivischen Punktreihen (Fig. 43), so durchschneiden sich die Verbindungsgeraden $M_1 M_2'$ und $M_1' M_2$, $M_1 M_3'$ und $M_1' M_3$, $M_2 M_3'$ und $M_2' M_3$ in

Sind (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3), (L_3') drei Paare entsprechender Strahlen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln (Fig. 44), so liegen die Schnittpunkte $\overline{(L_1)(L_2')}$ und $\overline{(L_1')(L_2)}$; $\overline{(L_1)(L_3')}$ und $\overline{(L_1')(L_3)}$;

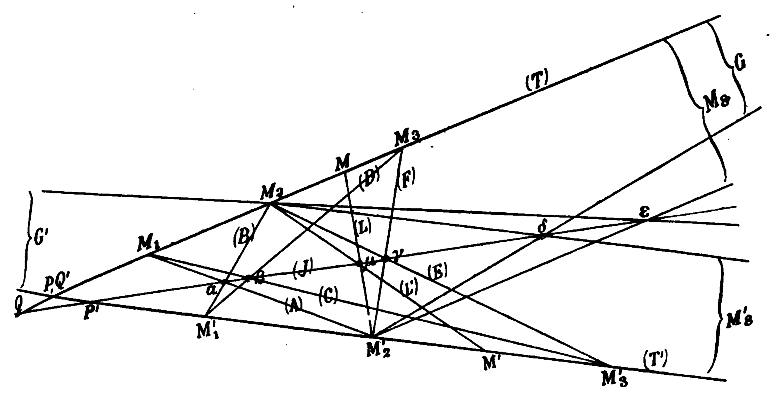


Fig. 43.

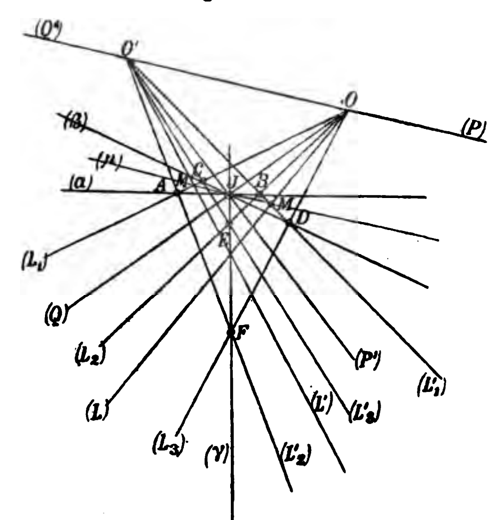


Fig. 44.

drei Punkten α, β und γ einer und derselben Geraden (J), der Directionsachse beider Punktreihen.

Um diesen Satz zu beweisen, seien y_i, z_i und $y_i - z_i$

$(\overline{L_2})(\overline{L_3'})$ und $(\overline{L_2'})(\overline{L_3})$ in drei Geraden (α), (β) und (γ), welche durch einen und denselben Punkt J gehen, genannt das Directionscentrum beider Strahlenbüschel.

Um auch diesen Satz zu beweisen, seien v_i, w_i und

($i = 1, 2, 3$) die trilinearen Coordinaten der Punkte M_1, M_2 und M_3; y_i', z_i' und $y_i' - z_i'$ ($i = 1, 2, 3$) jene der entsprechenden Punkte M_1', M_2' und M_3'; ferner (A), (B), (C), (D), (E), (F) die durch die Punkte M_1 und M_2', M_1' und M_2, M_1 und M_3', M_1' und M_3, M_2 und M_3', M_2' und M_3 gelegten sechs Strahlen.

$v_i - w_i$ ($i = 1, 2, 3$) die trigonalen Coordinaten der Strahlen (L_1), (L_2) und (L_3); v_i', w_i' und $v_i - w_i$ ($i = 1,2, 3$) jene der entsprechenden Strahlen (L_1'), (L_2') und (L_3'); ferner A, B, C, D, E, F die Punkte, in welchen die Strahlen (L_1) und (L_2'), (L_1') und (L_2), (L_1) und (L_3'), (L_1') und (L_3), (L_2) und (L_3'), (L_2') und (L_3) sich durchschneiden.

Dann bestehen nach Gl. (163), beziehungsweise (164), die Gleichungen, u. zw.:

$$A \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{vmatrix} = o, \qquad A \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix} = o,$$

$$B \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = o, \qquad B \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = o,$$

$$C \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (y_1'-z_1') & (y_2'-z_2') & (y_3'-z_3') \end{vmatrix} = o, \qquad C \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (v_1'-w_1') & (v_2'-w_2') & (v_3'-w_3') \end{vmatrix} = o,$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ (y_1-z_1) & (y_2-z_2) & (y_3-z_3) \end{vmatrix} = o, \qquad D \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ (v_1-w_1) & (v_2-w_2) & (v_3-w_3) \end{vmatrix} = o,$$

$$E \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ (y_1'-z_1') & (y_2'-z_2') & (y_3'-z_3') \end{vmatrix} = o, \qquad E \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ (v_1'-w_1') & (v_2'-w_2') & (v_3'-w_3') \end{vmatrix} = o,$$

$$F \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \\ (y_1-z_1) & (y_2-z_2) & (y_3-z_3) \end{vmatrix} = o \qquad F \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \\ (v_1-w_1) & (v_2-w_2) & (v_3-w_3) \end{vmatrix} = o$$

und hieraus erhält man die Identitäten:

$$(a) \quad -(C+D) = -(E+F) = = (A+B) = = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$-(C+D) = -(E+F) = = (A+B) = = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \quad (b)$$

zufolge welcher die drei Gleichungen:

$$A+B=o,\quad C+D=o,\quad E+F=o\ldots.(c)$$

eine und dieselbe Gerade darstellen von der Gleichung

$$(d)\ldots J\equiv\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1' & z_2' & z_3'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=o.$$

Nun bestimmen aber die früheren Gleichungen (c) drei Strahlen, welche beziehungsweise durch die Schnittpunkte α, β, γ der Geraden

(A) und (B), (C) und (D), (E) und (F)

gehen, und daher liegen auch, wegen der Identitäten (a), diese drei Schnittpunkte insgesammt in der Geraden (J), womit der oben ausgesprochene Satz erwiesen und gleichzeitig die Gleichung der Directionsachse bestimmt erscheint.

Wenn nun M, M' irgend ein Paar entsprechender Punkte derjenigen projectivischen Punktreihen darstellen, welche durch die Paare M_1, M_1'; M_2, M_2'; M_3, M_3' gegeben sind, so lässt sich sofort zeigen, dass auch die Verbindungsgeraden MM_k' und $M'M_k$ ($k=1, 2, 3$) in der Directionsachse (J) sich

einen und denselben Punkt darstellen von der Gleichung

$$J\equiv\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1' & w_2' & w_3'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1' & v_2' & v_3'\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=o\ldots(e)$$

Punkte, welche beziehungsweise in den Verbindungsgeraden (α), (β) und (γ) der Punkte

A und B, C und D, E und F

liegen, und daher gehen auch, wegen der Identitäten (b), diese drei Verbindungsgeraden insgesammt durch den Punkt J, womit der oben ausgesprochene Satz erwiesen und gleichzeitig die Gleichung des Directionscentrums bestimmt erscheint.

Wenn nun (L), (L') irgend ein Paar entsprechender Strahlen derjenigen projectivischen Strahlenbüschel darstellen, welche durch die Paare (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2'); (L_3), (L_3') gegeben sind, so lässt sich sofort zeigen, dass die Verbindungsgeraden der Punkte M und M', in welchen (L) und (L_k'), sowie (L') und (L_k),

durchschneiden müssen. Es seien zu diesem Zwecke wieder im Sinne des in § 33 bereits Vorgeführten $y_i - \lambda z_i$ und $y_i' - \lambda z_i'$, $i = 1, 2, 3$, die trilinearen Coordinaten der Punkte M und M', ferner (L) und (L') die durch die Punkte M, M_1' und M', M_1 gelegten Strahlen (in der Figur wurde M_2 gewählt). Dann repräsentieren:

$$L \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ (y_1 - \lambda z_1) & (y_2 - \lambda z_2) & (y_3 - \lambda z_3) \end{vmatrix} = o,$$

$$L' \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (y_1' - \lambda z_1') & (y_2' - \lambda z_2') & (y_3' - \lambda z_3') \end{vmatrix} = o$$

die Gleichungen von (L) und (L') und diese, sowie Gl. (d), führen zur Identität

$$L + L' = -\lambda . J,$$

welche aussagt, dass die Gerade

$$L + L' = o$$

ebenfalls mit der durch Gl. (d) bestimmten Geraden (J) identisch ist. In Anbetracht, dass aber obige Gleichung gleichzeitig eine Gerade darstellt, welche durch den Schnittpunkt μ der Strahlen (L) und (L') geht, befindet sich der Schnittpunkt der letzteren ebenfalls in (J). Damit ist aber auch der Weg

$k = 1, 2, 3$, sich durchschneiden, durch J hindurchgehen muss. Es seien zu diesem Zwecke wieder im Sinne des in § 33 bereits Vorgeführten $v_i - \lambda w_i$ und $v_i' - \lambda w_i'$, $i = 1, 2, 3$, die trigonalen Coordinaten der Strahlen (L) und (L'), ferner M und M' die Punkte, in welchen die Strahlen (L) und (L_1'), (L') und (L_1) sich durchschneiden. Dann repräsentieren:

$$M \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ (v_1 - \lambda w_1) & (v_2 - \lambda w_2) & (v_3 - \lambda w_3) \end{vmatrix} = o,$$

$$M' \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (v_1' - \lambda w_1') & (v_2' - \lambda w_2') & (v_3' - \lambda w_3') \end{vmatrix} = o$$

die Gleichungen von M und M' und diese, sowie Gl. (e), führen zur Identität

$$M + M' = -\lambda . J,$$

aus welcher folgt, dass der Punkt

$$M + M' = o$$

ebenfalls mit dem durch Gl. (e) bestimmten Punkte J identisch ist. In Anbetracht, dass aber obige Gleichung gleichzeitig einen Punkt darstellt, der in der Verbindungsgeraden (μ) der Punkte M und M' liegt, geht die Gerade (μ) ebenfalls durch J. Damit ist aber auch der Weg gefunden, welcher ein-

gefunden, welcher einzuschlagen ist, um zwei projectivische Punktreihen, die gegeben sind durch drei Paare entsprechender Punkte M_1, M_1'; M_2, M_2'; M_3, M_3', zu vervollständigen. Man bestimme nämlich mittelst der letzteren die Directionsachse (J) beider Reihen, was dadurch geschieht, dass man z. B. $M_1 M_2'$, und $M_1' M_2$, sowie $M_1 M_3'$ und $M_1' M_3$ zum Schnitte bringt und durch diese Schnittpunkte die Gerade (J) legt, verbinde hierauf irgend einen Punkt M der ersten Reihe mit M_1' (oder M_2', M_3') durch den Strahl (L) und lege durch den Schnittpunkt μ der Strahlen (L) und (J) den Strahl (L'), welcher den Träger (T') der zweiten Reihe in dem entsprechenden Punkte M' von M trifft. So fortfahrend kann man zu beliebig vielen Punkten der ersten Reihe die entsprechenden der zweiten constructiv ermitteln.

Nicht ohne Interesse für die später folgenden Constructionen sind diejenigen Punkte, welche dem Schnittpunkte der Träger (T) und (T') beider Reihen entsprechen. Es ist klar, dass man

zuschlagen ist, um zwei projectivische Strahlenbüschel, die gegeben sind durch drei Paare entsprechender Strahlen (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2'); (L_3), (L_3'), zu vervollständigen. Man bestimme nämlich mittelst der letzteren den Directionsmittelpunkt J beider Büschel, was dadurch geschieht, dass man z. B. durch die Schnittpunkte $\overline{(L_1)(L_2')}$ und $\overline{(L_1')(L_2)}$, sowie $\overline{(L_1)(L_3')}$ und $\overline{(L_1')(L_3)}$ je einen Strahl legt und diese zum Schnitte bringt, bringe hierauf einen Strahl (L) des ersten Büschels zum Schnitte mit (L_1'), wodurch der Punkt M sich ergibt, lege durch M und J einen Strahl, welcher (L_1) im Punkte M' trifft, und lege durch letzteren und den Punkt O' einen Strahl, welcher zugleich (L') ist. So fortfahrend kann man zu beliebig vielen Strahlen des ersten Büschels die entsprechenden im zweiten constructiv ermitteln.

Von Wichtigkeit für die später folgenden Constructionen erscheinen auch hier diejenigen Strahlen, welche der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte O und O' beider Büschel entsprechen. Es ist

diesen ansehen kann als einen Punkt der ersten oder als einen solchen der zweiten Reihe. In dem ersten Fall sei er mit P, in dem zweiten mit Q' bezeichnet, und die entsprechenden Punkte P' und Q ergeben sich dann offenbar als die Schnitte von (J) mit (T') und (T), was ohneweiters einleuchtet, sobald man annimmt, dass der früher in Fig. 43 angegebene Punkt M dem Schnittpunkte beider Träger immer näher rückt.

klar, dass man denselben ansehen kann als einen Strahl des ersten oder als einen solchen des zweiten Büschels. Im ersten Fall sei er mit (P), im zweiten aber mit (Q') bezeichnet, und die entsprechenden Strahlen (P') und (Q) ergeben sich dann offenbar als die Verbindungsgeraden von J mit O' und O, was ohneweiters einleuchtet, sobald man annimmt, dass der in Fig. 44 angegebene Strahl (L) der Geraden OO' immer näher rückt.

§ 38. Conlocale projectivische Gebilde. Doppelelemente.

Bei den früheren Untersuchungen wurde im allgemeinen angenommen, dass die beiden projectivischen Punktreihen oder Strahlenbüschel nicht einen und denselben Träger besitzen. Nachdem nun die projectivische Verwandtschaft zweier Grundgebilde erster Stufe offenbar keine Einbuße erleiden kann, sobald man mit den Gebilden irgend eine beliebige Ortsveränderung vornimmt, so kann man bei zwei gleichartigen Grundgebilden erster Stufe eine solche Ortsveränderung voraussetzen, durch welche die Träger dieser Grundgebilde zusammenfallen. Man nennt zwei projectivische Punktreihen, deren Träger zusammenfallen, conlocale projectivische Punktreihen oder auch conjective Punktreihen; zwei projectivische Strahlenbüschel, welche denselben Mittelpunkt besitzen, conlocale projectivische Strahlenbüschel oder auch concentrische projectivische Strahlenbüschel. Es ist an sich klar, dass man ein Paar solcher Reihen erhält, wenn man zwei projectivische Strahlenbüschel mit einer nicht durch die Mittelpunkte der Büschel gehenden Geraden durchschneidet; dagegen ergeben sich zwei conlocale projectivische Strahlenbüschel, wenn man durch zwei projectivische Punktreihen und einen außerhalb der Träger dieser Reihen liegenden Punkt O Strahlen legt.

Ist nun (T) der gemeinsame Träger von zwei conlocalen projectivischen Punktreihen I und II und M_α irgend ein Punkt von (T), so kann man diesen Punkt ansehen als zu I oder zu II gehörig. In dem ersten Fall entspricht ihm der Punkt M_α'; in dem zweiten, wo er mit M_β' bezeichnet werden soll, der Punkt M_β, und es ist hierbei selbstverständlich M_α' von M_β verschieden. Somit hat irgend ein Punkt von (T) eine doppelte Bedeutung und folglich auch eine doppelte Bezeichnung.

Ist nun O das gemeinsame Centrum von zwei conlocalen projectivischen Strahlenbüscheln I und II und (L_α) irgend ein durch O gelegter Strahl, so kann man diesen wieder ansehen als zu I oder zu II gehörig. In dem ersten Fall entspricht ihm der Strahl (L_α'), in dem zweiten aber, wo er mit (L_β') bezeichnet werden soll, der Strahl (L_β), und es ist selbstverständlich, dass (L_α') von (L_β) verschieden ercheint. Somit hat irgend ein Strahl durch O eine doppelte Bedeutung und folglich auch eine doppelte Bezeichnung.

Um auch hier zu irgend einem Elemente von I das entsprechende Element in II zu finden, hat man II (oder I) gegen I (oder II) in eine schiefe Lage zu bringen, d. h. also in der Ebene beider Gebilde derart zu verschieben, dass diese aufhören conlocal zu sein, und dann mit Zuhilfenahme der Directionsachse, beziehungsweise des Directionsmittelpunktes, das entsprechende Element ausfindig zu machen. Selbstverständlich müssen wieder drei Paar entsprechender Elemente gegeben sein, indem nur dann beide Gebilde eindeutig bestimmt erscheinen. Wir werden übrigens später noch eine zweckdienlichere Methode vorführen zur Vervollständigung von zwei conlocalen projectivischen Gebilden erster Stufe, und schreiten nun zunächst zur Auffindung der Gleichungen dieser Gebilde.

Sind $M_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o, M_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 = o$ und $M_1' \equiv A_1' u + B_1' v + C_1' = o, M_2' \equiv A_2' u + B'_2 v + C_2' = o$ die Gleichungen von vier Punk-

Sind $L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$, $L_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$ und $L_1' \equiv A_1' x + B_1' y + C_1' = o$, $L_2' \equiv A_2' x + B_2' y + C_2' = o$ die Gleichungen von vier Strah-

ten einer Geraden, wobei jedoch keineswegs angenommen wird, dass M_1 und M_1', sowie M_2 und M_2' je ein Paar entsprechender Punkte darstellen;	len aus einem Punkte, wobei jedoch keineswegs angenommen wird, dass (L_1) und (L_1'), sowie (L_2) und (L_2') je ein Paar entsprechender Strahlen darstellen;

ferner λ und μ zwei veränderliche Parameter, unterworfen der Bedingung

$$(213) \;.\;.\;.\quad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o,$$

in welcher a, b, c, d vier Constanten bedeuten, so repräsentieren die Gleichungen

$$(244)\;.\;.\quad \begin{array}{r} M_1 - \lambda M_2 = o \\ M_1' - \mu M_2' = o \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{l} L_1 - \lambda L_2 = o, \\ L_1' - \mu L_2' = o \end{array} \quad .\;.\;(245)$$

für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ ein Paar entsprechender

Punkte M, M' von zwei conlocalen projectivischen Punktreihen,	Strahlen (L), (L') von zwei conlocalen projectivischen Strahlenbüscheln,

wobei jedoch noch bemerkt wird, dass zu den obigen Gleichungen noch jene

$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_1' & A_2' \\ B_1 & B_2 & B_1' & B_2' \\ C_1 & C_2 & C_1' & C_2' \end{array} \right\| = o$$

hinzukommt, welche die Bedingungen ausdrückt, unter welchen die vier Punkte M_1, M_2, M_1', M_2' in einer Geraden liegen, oder die vier Strahlen (L_1), (L_2), (L_1'), (L_2'), in demselben Punkte sich durchschneiden. Die durch letzte Gleichung angegebenen Bedingungen sind jedoch nur dann erfüllt, wenn vier reelle Coefficienten k_1, k_2, k_3 und k_4 existieren, für welche die Identitäten bestehen:

$$\begin{array}{l} M_1' = k_1 M_1 + k_2 M_2, \\ M_2' = k_3 M_1 + k_4 M_2, \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{l} L_1' = k_1 L_1 + k_2 L_2, \\ L_2' = k_3 L_1 + k_4 L_2, \end{array}$$

wodurch dann die früher gegebenen Gleichungen (244) und (245) übergehen in

$$(246)\;.\;.\quad \begin{array}{r} M_1 - \lambda M_2 = o, \\ M_1 - \dfrac{\mu k_4 - k_2}{k_1 - \mu k_3}\,.\,M_2 = o, \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{r} L_1 - \lambda L_2 = o, \\ L_1 - \dfrac{\mu k_4 - k_2}{k_1 - \mu k_3}\,.\,L_2 = o, \end{array} \quad (247)$$

und diese Gleichungen bestimmen für jedes Wertesystem von λ und μ, welches der Rel. (213) genügt, ein Paar entsprechender Elemente von zwei conlocalen projectivischen Grundgebilden erster Stufe, wenn noch k_1, k_2, k_3 und k_4 vier Constanten bedeuten. In dem besonderen Fall, wo $a = d = o$ wird, sind auch M_1, M_1' und M_2, M_2', sowie (L_1), (L_1') und (L_2), (L_2'), je ein Paar entsprechender Elemente.

Repräsentieren nun wieder M und M' ein Paar entsprechender Punkte der beiden Punktreihen I und II und bewegt sich M stetig fort, so dass dieser Punkt allmälig mit allen Punkten von I zusammenfällt, so wird auch M' nach und nach mit allen Punkten von II zusammenfallen. Hierbei können natürlich M und M' in demselben Sinne sich bewegen, oder nicht, und es heißen dann in dem ersten Fall die beiden projectivischen conlocalen Punktreihen gleichstimmig (gleichliegend), in dem zweiten aber ungleichstimmig (ungleichliegend).

Repräsentieren nun wieder (L) und (L') ein Paar entsprechender Strahlen der beiden Strahlenbüschel I und II und dreht sich der Strahl (L) stetig um den gemeinsamen Mittelpunkt O beider Büschel, so dass er allmälig mit sämmtlichen Strahlen von I zusammenfällt, so wird auch (L') nach und nach mit allen Strahlen von II zusammenfallen. Hierbei können natürlich (L) und (L') in demselben Sinne sich drehen, oder nicht, und es heißen dann in dem ersten Fall die beiden projectivischen conlocalen Strahlenbüschel gleichstimmig (gleichliegend), in dem zweiten aber ungleichstimmig (ungleichliegend).

Von selbst drängt sich jetzt die Frage auf, ob und wie oft ein Element von I mit dem ihm entsprechenden Elemente in II zusammenfällt, wodurch ein sich selbst entsprechendes Element (Doppelelement, tautologes Element) entsteht. Die Beantwortung dieser Frage kann nun sofort mittelst der vorher gegebenen Gleichungen (213), (246) und (247) geschehen. Für ein Doppelelement müssen nämlich die beiden Gleichungen (246), beziehungsweise (247), ein

und dasselbe geometrische Äquivalent besitzen und dies bedingt

$$\lambda = \frac{\mu k_4 - k_2}{k_1 - \mu k_3}$$

und, weil aber λ und μ gleichzeitig der Bedingung

$$a \lambda \mu + b \lambda + c \mu + d = o$$

unterworfen sind, hat man zwei Gleichungen, woraus diejenigen Wertesysteme von λ und μ hervorgehen, welche den tautologen Elementen angehören. Die Aufgabe besteht demnach schließlich in der Auflösung der zwei letzten Gleichungen, und man findet, wenn man aus diesen μ eliminiert:

$$(k_1 a + k_3 b) \lambda^2 + (k_1 c + k_2 a + k_3 d + k_4 b) \lambda + (k_2 c + k_4 d) = o,$$

welche Gleichung in λ vom 2. Grade ist, folglich zwei Wurzeln λ' und λ'' besitzt, die gleichzeitig reell oder imaginär erscheinen, wobei in dem ersten Fall noch $\lambda' = \lambda''$ sein kann. Daraus folgt daher:

Zwei conlocale projectivische Punktreihen haben zwei reelle gesonderte oder zwei reelle coincidierende oder zwei imaginäre Doppelpunkte.

Die Gleichungen dieser beiden Dopelpunkte sind:

$$(248) \ldots \quad M_1 - \lambda' M_2 = o, \quad M_1 - \lambda'' M_2 = o$$

Zwei conlocale projectivische Strahlenbüschel haben zwei reelle gesonderte oder zwei reelle coincidierende oder zwei imaginäre Doppelstrahlen.

Die Gleichungen dieser beiden Doppelstrahlen sind:

$$L_1 - \lambda' L_2 = o, \quad L_1 - \lambda' L_2 = o. \quad \ldots (249)$$

Zu denselben Sätzen gelangt man auch noch schneller und einfacher mittelst der früher vorgeführten Verwandtschaftsgleichungen (233) und (234). Bedeuten nämlich diesmal in Gl. (233) $x = OM$ und $x' = OM'$ die Entfernungen eines Paars entsprechender Punkte M, M' von einem in dem gemeinsamen Träger der beiden conlocalen projectivischen Punktreihen angenommenen festen Punkte O, dagegen $u = \operatorname{tg}(O, L)$ und $u' = \operatorname{tg}(O, L')$ die trigonometrischen Tangenten jener Winkel, welche ein durch das gemeinsame Centrum der beiden conlocalen projectivischen Strahlen-

büschel gelegter fester Strahl (O) mit einem Paar entsprechender Strahlen (L), (L') bildet, so muss für den Fall, dass

M mit M' zusammenfällt, selbstverständlich $x = x'$ werden, wodurch die Gl. (233) übergeht in

(250). $\alpha x^2 + (\beta+\gamma)x + \delta = o$,

und diese Gleichung ist in x quadratisch, zum Beweise, dass zwei Doppelpunkte existieren. Nennt man E und F die beiden tautologen Punkte, so ist:

(L) mit (L') zusammenfällt, auch $u = u'$ werden, wodurch die Gl. (234) übergeht in

$\alpha u^2 + (\beta+\gamma)u + \delta = o$, . (251)

und diese Gleichung ist in u quadratisch, zum Beweise, dass zwei Doppelstrahlen existieren. Nennt man (E) und (F) die beiden tautologen Strahlen, so ist:

$$\frac{OE}{OF} = \left\{ \frac{-(\beta+\gamma) \pm \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha} \right.,$$

$$\frac{\operatorname{tg}(O,E)}{\operatorname{tg}(O,F)} = \left\{ \frac{-(\beta+\gamma) \pm \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha} \right..$$

Man kann bei der Aufstellung der Gleichungen von zwei conlocalen projectivischen Grundgebilden erster Stufe auch von den Gleichungen der beiden tautologen Elemente ausgehen, und es sind dann, wenn

$E \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o$ und $F \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 = o$ die Gleichungen der beiden Doppelpunkte von zwei conlocalen projectivischen Punktreihen repräsentieren,

$E \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$ und $F \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$ die Gleichungen der beiden Doppelstrahlen von zwei conlocalen projectivischen Strahlenbüscheln repräsentieren,

ferner λ und μ zwei veränderliche Parameter darstellen, unterworfen der Rel.:

$$b\lambda + \varrho\mu = o,$$

$E - \lambda F = o$ und $E - \mu F = o$ die Gleichungen dieser zwei Punktreihen.

$E - \lambda F = o$ und $E - \mu F = o$ die Gleichungen dieser zwei Strahlenbüschel.

Satz. Sind E und F die Doppelpunkte von zwei conlocalen projectivischen Punkt-

Satz. Sind (E) und (F) die Doppelstrahlen von zwei conlocalen projectivischen

reihen und ist M, M' ein Paar entsprechender Elemente, so ist das Doppelverhältnis

$$(EFMM') = \text{Cont.}$$

Denn bezeichnet N, N' noch ein Paar entsprechender Punkte, so besteht nach § 33 die Gleichung:

$$(EFMN) = (EFM'N'),$$

Strahlenbüscheln und ist (L), (L') ein Paar entsprechender Elemente, so ist das Doppelverhältnis

$$(EFLL') = \text{Cont.}$$

Denn bezeichnet (N), (N') noch ein Paar entsprechender Strahlen, so besteht nach § 33 die Gleichung:

$$(EFLN) = (EFL'N'),$$

oder

$$\frac{(EFM)}{(EFN)} = \frac{(EFM')}{(EFN')}, \quad \Bigg| \quad \frac{(EFL)}{(EFN)} = \frac{(EFL')}{(EFN')},$$

woraus man erhält

$$(EFMM') = (EFNN'), \quad | \quad (EFLL') = (EFNN'),$$

welche Gleichung obigen Satz beweiset.

Die eben angestellten Betrachtungen haben gezeigt, dass zwei conlocale projectivische Grundgebilde erster Stufe zwei tautologe Elemente besitzen, welche reell und gesondert, reell und zusammenfallend oder auch imaginär sein können. Es ist nun zu untersuchen, wann der eine oder der andere von diesen drei Fällen eintritt, und aus diesem Grunde ist es unbedingt nothwendig, die gleichstimmig und ungleichstimmig conlocalen, projectivischen Punktreihen und Strahlenbüschel gesondert zu betrachten.

Es seien wieder M und M' zwei einander entsprechende Punkte von zwei ungleichstimmig projectivischen, conlocalen Punktreihen (Fig. 45) und G, G' die beiden Gegenpunkte dieser Reihen, ferner repräsentiere M_∞ den unendlich fernen Punkt ihres gemeinsamen Trägers (T). Nimmt man nun an, dass M in G sich befindet, so ist M'

Es seien wieder (L) und (L') zwei einander entsprechende Strahlen von zwei ungleichstimmig projectivischen, conlocalen Strahlenbüscheln (Fig. 47) und (G_1), (G_1'), sowie (G_2), (G_2'), die einander entsprechenden Gegenstrahlen beider Büschel. Nimmt man nun an, dass (L) mit (G_1) zusammenfällt, so ist (L') gleichzeitig in (G_1'), und

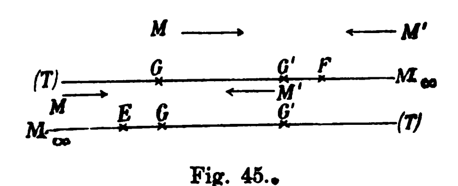


Fig. 45.

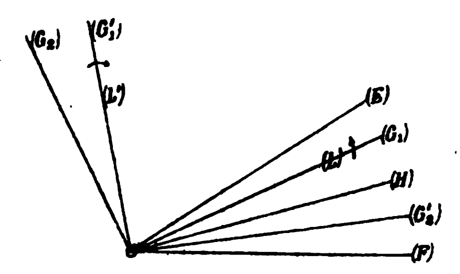


Fig. 47.

in M_∞, und wenn M nach rechts, folglich M' nach links sich bewegt, so müssen M und M' in einem Punkte F sich vereinigen, welcher offenbar rechts von G' liegt; denn sobald M' in G' ankommt, liegt bereits M in M_∞, weshalb die Vereinigung beider Punkte unbedingt noch vor G' erfolgen muss. In derselben Weise lässt sich noch nachweisen, dass der zweite Doppelpunkt E reell und links von G zu liegen kommt, und ersieht man daher, dass hier beide Doppelpunkte reell und gesondert sind. Nach einem früher in Gl. (235) gegebenen Satze ist aber das Product

$$GM \, . \, G'M' = f,$$

wenn f eine Constante be-

wenn jetzt (L) von rechts nach links um den Punkt O sich dreht, so dreht sich (L') im entgegengesetzten Sinn um diesen Punkt, und es werden hierbei (L) und (L') in einem Strahl (E) sich vereinigen, welcher offenbar zwischen (G_1) und (G_1') sich befindet, also außerhalb des spitzen Winkels (G_2', G_1) liegt. In derselben Weise kann auch gezeigt werden, dass der zweite Doppelstrahl (F) reell ist und außerhalb (G_2', G_1) sich befindet, und erkennt man sonach, dass hier beide Doppelstrahlen reell und gesondert sind. Nach einem früher in Gl. (236) gegebenen Satze ist aber das Product

$$\operatorname{tg}\,(G_1 L) \, . \, \operatorname{tg}\,(G_2' L') = f,$$

wenn f eine Constante be-

zeichnet, und demnach auch

$$GF \,.\, G'F = f.$$

Setzt man jetzt noch $G'F = y$ und $GG' = e$, so wird nach der letzten Gleichung

$$y\,(y + e) = f$$

und ergeben sich somit $G'E$ und $G'F$ als die Wurzeln der in y quadratischen Gleichung

$$y^2 + ey - f = o,$$

aus welchen man nun erhält

$$G'F = \frac{-e + \sqrt{e^2 + 4f}}{2},$$

$$G'E = \frac{-e - \sqrt{e^2 + 4f}}{2};$$

es ist daher auch

$$GE = GG' + G'E = \frac{e - \sqrt{e^2 + 4f}}{2} = - G'F$$

und haben somit die beiden Strecken GG' und EF einen und denselben Mittelpunkt.

Nun müssen wir aber noch den Fall betrachten, wo die beiden Punktreihen gleichstimmig sind, und nehmen hierbei wieder an, dass M und M' ein Paar entsprechender Punkte beider Reihen darstellen. Befindet

zeichnet, und demnach auch

$$\operatorname{tg}(G_1 E)\operatorname{tg}(G_2' E) = \operatorname{tg}(G_1 F) \,.\, \operatorname{tg}(G_2' F).$$

Setzt man in dem vorliegenden Fall $(G_1, E) = \varepsilon$, $(G_2', G_1) = \alpha$ und $(G_1, F) = \varphi$, so nimmt obige Gleichung die Form an:

$$\operatorname{tg}\varepsilon \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

oder, wie man nach einigen einfachen algebraischen Operationen leicht findet,

$$(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varphi)\,[\operatorname{tg}\varphi\,(1 - \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\varepsilon) + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon)] = o,$$

und hieraus folgt $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varepsilon$, oder

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon),$$

d. h., es ist der Winkel $(G_1, F) = -(G_2', E)$ und jener

$$(G_2', F) = (G_1, F) + (G_2', G_1) = -[(G_2', E) - (G_2', G_1)] = -(G_1, E),$$

weshalb der von den beiden Doppelstrahlen (F) und (E) gebildete Winkel halbiert wird von der inneren Winkelhalbierungslinie (H) des Winkels (G_2', G_1).

Nun schreiten wir zur Betrachtung desjenigen Falls, wo die beiden Strahlenbüschel gleichstimmig sind, und bezeichnen wieder mit (L), (L') ein Paar entsprechender Strahlen beider Büschel. Fällt (L) mit (G_1), folglich (L') mit

sich wieder zunächst M in G (Fig. 46), folglich M' in M_∞ und bewegen sich dann M und M' nach rechts, so kann es geschehen, dass diese beiden Punkte in E sich vereinigen. Diese Vereinigung erfolgt aber, wenn sie überhaupt stattfindet, zwischen G und G'; denn in dem Momente, wo M' in G' ankommt, befindet sich bereits M in M_∞. Selbstverständlich gilt dies auch von dem zweiten Doppelpunkte F, und man erkennt deshalb, dass bei den hier vorliegenden projectivischen Punktreihen die etwa vorhandenen tautologen Punkte E und F zwischen den beiden Gegenpunkten liegen und daher auch ganz gut zusammenfallen können. Was

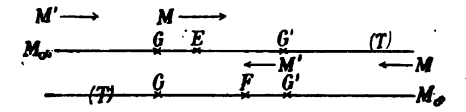


Fig. 46.

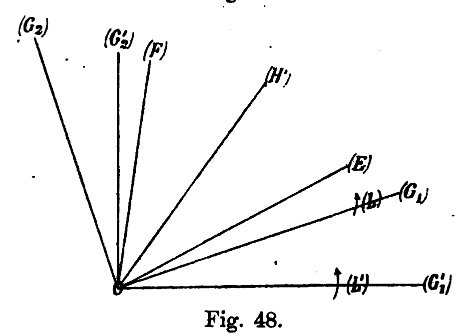


Fig. 48.

(G_1') zusammen und drehen sich hierauf beide Strahlen (L) und (L') um den Punkt O von rechts nach links (Fig. 48), so kann es geschehen, dass diese Strahlen zusammenfallen. Dieses Coincidiren von (L) und (L') erfolgt aber, wenn es überhaupt stattfindet, in (E), zwischen (G_1) und (G_2'); denn in dem Momente, wo (L') nach (G_2') gelangt, ist (L) bereits in (G_2) angekommen. Selbstverständlich gilt dies auch von dem zweiten Doppelstrahl (F), und man erkennt somit, dass bei den hier vorliegenden projectivischen Strahlenbüscheln die etwa vorhandenen tautologen Strahlen (E) und (F) zwischen den beiden sich nicht ent-

endlich die Strecken GE und $G'F$ anbelangt, so sind dieselben wieder entgegengesetzt gleich. Denn setzt man $GE = y$ und $GG' = e$, so folgt aus Gl. (235)

$$y\,(y - e) = f$$

und ist somit

$$GE = \frac{e - \sqrt{e^2 + 4f}}{2},$$

$$GF = \frac{e + \sqrt{e^2 + 4f}}{2},$$

demnach

$$G'F = GF - GG' = \frac{-e + \sqrt{e^2 + 4f}}{2} = -GE,$$

d. h. die beiden Strecken GG' und EF haben wieder einen und denselben Mittelpunkt.

sprechenden Gegenstrahlen (G_1) und (G_2') liegen und daher auch ganz gut zusammenfallen können. Es lässt sich auch hier wieder nachweisen, dass die Winkel (G_1, E) und (G_2', F) einander entgegengesetzt gleich sind. Denn nach Gl. (236) ist ja $\operatorname{tg}(G_1, E) \,.\, \operatorname{tg}(G_2', E) =$

$$\operatorname{tg}(G_1, F)\operatorname{tg}(G_2', F)$$

und hieraus folgt, sobald man $(G_1, G_2') = \alpha$, $(G_1, E) = \varepsilon$ und $(G_1, F) = \varphi$ setzt, $\operatorname{tg}\varepsilon \,.\, \operatorname{tg}(\varepsilon - \alpha) = \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)$, woraus nach einigen algebraischen Operationen sich ergibt $(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon)\,[\operatorname{tg}\varphi\,(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varepsilon) - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon)] = o$. Man hat demnach $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varepsilon$, oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon),$$

d. h., es ist der Winkel $(G_1, F) = (G_1 G_2') - (G_1 E)$ und

$$(G_2' F) = (G_2' G_1) + (G_1 F) = -(G_1, E),$$

weshalb der von den beiden Doppelstrahlen (E) und (F) gebildete Winkel halbiert wird von der inneren Winkelhalbierungslinie (H') des Winkels $(G_1 G_2')$.

Die hier vorgeführten analytischen Betrachtungen liefern sonach die nachfolgenden zwei interessanten Sätze, u. zw.:

Zwei ungleichstimmig projectivische, conlocale Punktreihen haben zwei reelle und

Zwei ungleichstimmig projectivische, conlocale Strahlenbüschel haben zwei reelle und

gesonderte Doppelpunkte, welche außerhalb der von den beiden Gegenpunkten begrenzten Strecke liegen; zwei gleichstimmig projectivische, conlocale Punktreihen haben zwei Doppelpunkte, welche reell und gesondert, reell und zusammenfallend oder endlich auch imaginär sein können und innerhalb der von den beiden Gegenpunkten begrenzten Strecke sich befinden. Ferner besitzen letztere und die von den beiden Doppelpunkten begrenzte Strecke einen und denselben Mittelpunkt.

gesonderte Doppelstrahlen, und diese liegen außerhalb des von den beiden sich nicht entsprechenden Gegenstrahlen (G_1) und (G_2') gebildeten spitzen Winkels und bilden mit der inneren Winkelhalbierungslinie des Winkels $(G_1\, G_2')$ gleiche Winkel; zwei gleichstimmig projectivische, conlocale Strahlenbüschel haben zwei Doppelstrahlen, welche reell und gesondert, reell und zusammenfallend oder endlich auch imaginär sein können, und diese liegen innerhalb des von (G_1) und (G_2') gebildeten spitzen Winkels und bilden mit der inneren Winkelhalbierungslinie des Winkels $(G_1\, G_2')$ gleiche Winkel.

Zum Schlusse dieses Paragraphen mag noch Steiner's Methode zur constructiven Bestimmung der tautologen Elemente von zwei conlocalen projectivischen Grundgebilden erster Stufe vorgeführt und hierbei gleichzeitig gezeigt werden, in welcher Weise diese beiden durch drei Paare entsprechender Elemente gegebenen Gebilde vervollständigt werden können.

Wir beginnen hier zunächst mit der Ermittlung der beiden tautologen Strahlen (E) und (F) von zwei conlocalen projectivischen Strahlenbüscheln I und II, welche wieder gegeben erscheinen durch drei Paare (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2'); (L_3), (L_3') entsprechender Strahlen, und legen zu diesem Zwecke durch den gemeinsamen Mittelpunkt O beider Büchel einen Kreis (K) vom beliebigen Radius, welcher die gegebenen Strahlenpaare in den Punkten m_1, m_1'; m_2, m_2' und m_3, m_3' trifft. Alsdann wähle man die Punkte m_3' und m_3 (Fig. 49) zu Mittelpunkten S und S' von zwei neuen Strahlenbüscheln und lege durch S

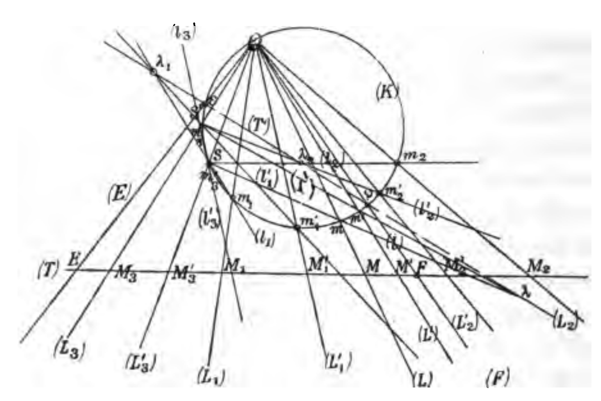


Fig. 49.

und die Punkte m_1, m_2, m_3 die Strahlen (l_1), (l_2), (l_3); durch S' und die Punkte m_1', m_2', m_3' die Strahlen (l_1'), (l_2'), (l_3'). Die durch die drei Paare (l_1), (l_1'); (l_2), (l_2') und (l_3), (l_3') bestimmten zwei projectivischen Strahlenbüschel *III* und *IV* von den Mittelpunkten S und S' unterscheiden sich nun von den früheren Büscheln *I* und *II* nur in der Lage, indem nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises Winkel $(L_\alpha\, L_\beta) = (l_\alpha\, l_\beta)$ und Winkel $(L_\alpha'\, L_\beta') = (l_\alpha'\, l_\beta')$ ist, wenn α und β irgend zwei Zahlen bedeuten, entnommen der Zahlenreihe 1, 2, 3, und sind perspectivisch, weil die einander entsprechenden Strahlen (l_3) und (l_3') zusammenfallen und beide Büschel verschiedene Mittelpunkte besitzen. Die perspectivische Achse (T') dieser beiden Strahlenbüschel ist die Verbindungsgerade der Punkte λ_1 und λ_2, in welchen (l_1) und (l_1'), sowie (l_2) und (l_2'), sich durchschneiden, und trifft den Kreis (K) in den Punkten ε und φ. Soll jetzt zu irgend einem Strahl (L) in *I* der entsprechende (L') in *II* gefunden werden, so hat man den nachfolgenden Weg einzuschlagen. Man bringe nämlich (L) mit (K) zum Schnitte, wodurch der Punkt m sich ergibt, lege durch S und m den Strahl (l), der die perspectivische Achse (T') im Punkte λ trifft, verbinde hierauf S' mit dem Punkte λ durch den Strahl (l'), und lege durch den Schnittpunkt m' von (l') mit (K) und den Mittelpunkt O einen Strahl, welcher zugleich der gesuchte Strahl (L') ist. Es ist daher an sich klar,

dass die beiden Strahlen (L) und (L') zusammenfallen, wenn m mit m' identisch ist, was jedoch nur dann geschieht, sobald λ ein Punkt des Kreises (K) ist, d. h. also in ε oder φ zu liegen kommt. Aus diesem Grunde erhält man daher auch die beiden Doppelstrahlen (E) und (F), sobald man den Mittelpunkt O mit den Punkten ε und φ durch Strahlen verbindet, und erkennt gleichzeitig, dass (E) und (F) reell und gesondert, reell und zusammenfallend oder endlich imaginär erscheinen, je nachdem die perspectivische Achse (F) den Kreis (K) in zwei Punkten ε und φ durchschneidet, ihn berührt, oder endlich diesen Kreis nicht trifft.

In Anbetracht dessen, dass die Strahlen, welche zwei conlocale projectivische Punktreihen mit einem außerhalb des gemeinsamen Trägers dieser Reihen liegenden Punkte verbinden, ebenfalls zwei conlocale projectivische Strahlenbüschel bilden, ist es jetzt auch sehr leicht, zwei solche Reihen, welche durch drei Paare entsprechender Punkte M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' gegeben sind, zu vervollständigen und die tautologen Punkte derselben zu finden. Man verbinde nämlich die eben genannten Punkte durch Strahlen mit einem außerhalb des gemeinsamen Trägers (T) liegenden Punkte O, und erhält so drei Paare entsprechender Strahlen (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3), (L_3') von zwei projectivischen Strahlenbüscheln mit dem gemeinsamen Centrum O. Nun suche man die tautologen Strahlen (E) und (F) der letztgenannten Strahlenbüschel nach der eben gezeigten Methode und bringe sie zum Schnitte mit (T); die Schnittpunkte E und F sind dann die tautologen Punkte beider Punktreihen. Um endlich zu einem Punkte M der einen Reihe den entsprechenden M' der anderen zu finden, lege man durch M und O den Strahl (L), suche seinen entsprechenden (L') und bringe letzteren zum Schnitte mit (T), wodurch sich M' als Schnittpunkt ergibt.

§ 39. Ähnliche und congruente Punktreihen.

Setzt man in der Verwandtschaftsgleichung (233) den Coefficienten $\alpha = o$, so nimmt selbe die einfachere Form an:

$$(252) \quad . \; . \; . \qquad \beta x + \gamma x' + \delta = o,$$

und in der letzten Gleichung bedeuten wieder $x = M_0 M$ und $x' = M_0' M'$ die Entfernungen der einander entsprechenden Punkte M und M' von den beiden Fixpunkten M_0 und M_0' der Träger (T) und (T') beider Reihen, und sei hier noch bemerkt, dass M_0 und M_0' nur dann ein Paar entsprechender Punkte darstellen, sobald auch $\delta = o$ ist.

Um nun die charakteristischen Eigenschaften dieser Art projectivischer Punktreihen zu studieren, mache man die Annahme, es seien M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' drei Paare entsprechender Punkte; ferner $M_0 M_1 = x_1$, $M_0' M_1' = x_1'$; $M_0 M_2 = x_2$, $M_0' M_2' = x_2'$ und $M_0 M_3 = x_3$, $M_0' M_3' = x_3'$ die Entfernungen dieser Punkte von den Fixpunkten M_0 und M_0'. Dann bestehen nach Gl. (252) die drei Relationen:

$$(a) \ldots \quad \beta x_1 + \gamma x_1' + \delta = o, \quad \beta x_2 + \gamma x_2' + \delta = o, \quad \beta x_3 + \gamma x_3' + \delta = o$$

und aus diesen ergibt sich durch Subtraction der ersten von der dritten und der zweiten von der dritten

$$\beta (x_3 - x_1) + \gamma (x_3' - x_1') = o, \quad \beta (x_3 - x_2) + \gamma (x_3' - x_2') = o$$

und hieraus durch die Elimination von β und γ: $\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'}$, oder

$$(253) \ldots \quad (M_1 M_2 M_3) = (M_1' M_2' M_3').$$

Repräsentiert übrigens noch M_4, M_4' ein weiteres Paar entsprechender Punkte und ist wieder $M_0 M_4 = x_4$, $M_0' M_4' = x_4'$, so kommt zu den Relationen (a) noch die vierte

$$(b) \ldots \quad \beta x_4 + \gamma x_4' + \delta = o$$

hinzu, und aus der ersten und zweiten, sowie aus der dritten und vierten, ergeben sich durch Subtraction die beiden Gleichungen

$$\beta (x_2 - x_1) + \gamma (x_2' - x_1') = o, \quad \beta (x_4 - x_3) + \gamma (x_4' - x_3') = o,$$

aus welchen durch die Elimination von β und γ folgt: $\frac{x_2 - x_1}{x_2' - x_1'} = \frac{x_4 - x_3}{x_4' - x_3'}$, oder

$$(254) \ldots \quad \frac{M_1 M_2}{M_1' M_2'} = \frac{M_3 M_4}{M_3' M_4'},$$

und nachdem $M_1 M_2$ und $M_1' M_2'$, sowie $M_3 M_4$ und $M_3' M_4'$, entsprechende Strecken darstellen, gelangt man zur Erkenntnis, dass bei den durch die Verwandtschaftsgleichung (252) definierten zwei projectivischen Punktreihen das Verhältnis von zwei einander entsprechenden Strecken constant erscheint, weshalb man vorliegende Punktreihen auch ähnliche oder projectionale Punktreihen nennt. Daraus folgt aber noch, dass man zwei ähnliche Punktreihen erhält, wenn man einen Strahlenbüschel zum Schnitte bringt mit zwei parallelen Transversalen oder auch einen Parallelstrahlenbüschel zum Schnitte bringt mit zwei Transversalen. Aus der Verwandtschaftsgleichung (252) resultieren aber auch andere bemerkenswerte Eigenschaften ähnlicher Punktreihen. Zunächst erkennt man nämlich aus dem Baue dieser Gleichung, dass x und x' gleichzeitig unendlich groß werden, somit die unendlich fernen Punkte M_∞ und M_∞' der Träger beider Punktreihen die beiden Gegenpunkte oder ein Paar entsprechender Punkte darstellen. Sind folglich die Reihen conlocal, so fallen die beiden Gegenpunkte zusammen und ist der unendlich ferne Punkt ihres gemeinsamen Trägers der eine Doppelpunkt. Ferner lässt sich sofort zeigen, dass zwei ähnliche Punktreihen eindeutig bestimmt erscheinen durch zwei Paare M_1, M_1' und M_2, M_2' entsprechender Punkte; denn aus der Gl. (252) und den beiden ersten der Gleichungen (a) ergibt sich durch die Elimination von α, β und γ

$$(255) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x, & x' & 1 \\ x_1 & x_1' & 1 \\ x_2 & x_2' & 1 \end{vmatrix} = o$$

als Gleichung der Projectivität.

Auf die conlocalen ähnlichen Punktreihen übergehend, bemerke ich, dass auch hier wieder die Gl. (252) die Verwandtschaftsgleichung ist, sobald $OM = x$ und $OM' = x'$ die Entfernungen der einander entsprechenden Punkte M und M' von dem in dem gemeinsamen Träger (T) beider Reihen angenommenen festen Punkte O darstellen. Fällt nun M mit M' zusammen, so ist $x = x'$ und demnach, zufolge Gl. (252), $(\beta + \gamma)\, x + \delta = o$, woraus sich ergibt

$$(256) \ldots\ldots \qquad x = -\frac{\delta}{\beta+\gamma}$$

zur Bestimmung der Entfernung des einen Doppelpunktes beider Reihen von dem festen Punkte O; während der andere Doppelpunkt identisch ist mit dem unendlich fernen Punkte M_∞ des gemeinsamen Trägers dieser Reihen.

Die eben angestellten einfachen und kurzen Betrachtungen über ähnliche Punktreihen führen sonach zu den nachfolgenden Sätzen:

Zwei ähnliche Punktreihen erscheinen bestimmt durch zwei Paare entsprechender Punkte.

Die unendlich fernen Punkte der Träger von zwei ähnlichen Punktreihen sind die Gegenpunkte dieser Reihen, mithin auch ein Paar entsprechender Punkte.

Entsprechende Strecken stehen in einem constanten Verhältnisse.

Ähnliche und conlocale Punktreihen besitzen eigentlich nur einen Doppelpunkt, indem der zweite Doppelpunkt der unendlich ferne Punkt des gemeinsamen Trägers beider Reihen ist.

Sehr leicht lassen sich nun auch die Gleichungen von zwei ähnlichen Punktreihen aufstellen. Sind nämlich $m_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = o$, $m_1' \equiv a_1' u + b_1' v + 1 = o$ und $m_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = o$, $m_2' \equiv a_2' u + b_2' v + 1 = o$ die Gleichungen von zwei Paaren M_1, M_1' und M_2, M_2' entsprechender Elemente, so repräsentieren, zufolge der durch Rel. (253) ausgedrückten Eigenschaft ähnlicher Punktreihen,

$$(257) \ldots\ldots \qquad m_1 - \lambda m_2 = o, \quad m_1' - \lambda m_2' = o$$

die Gleichungen der durch die Paare M_1, M_1' und M_2, M_2' bestimmten ähnlichen Punktreihen, sobald noch λ ein veränderlicher Parameter ist. Die Gleichungen der Träger beider Reihen sind:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1' & b_1' & 1 \\ a_2' & b_2' & 1 \end{vmatrix} = o.$$

In dem besonderen Fall, wo die Reihen conlocal sind, kommen zu den Gleichungen (257) noch die beiden Bedingungen hinzu

$$(258) \ldots\ldots \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1' \\ b_1 & b_2 & b_1' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_1 \\ b_1' & b_2' & b_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = o,$$

welche eben ausdrücken, dass die vier Punkte M_1, M_2, M_1' und M_2' einer und derselben Geraden angehören. Berechnet man nun die beiden obigen Determinanten und addiert dann die zwei Gleichungen (258), so folgt

$$(c) \ldots \; a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1' b_2' - a_2' b_1' + a_2' b_1 - a_1' b_2 + \\ + a_2 b_1' - a_1 b_2' = o.$$

Für den Doppelpunkt dieser Reihen muss selbstverständlich

$$\frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda} = \frac{a_1' - \lambda a_2'}{1 - \lambda}, \qquad \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda} = \frac{b_1' - \lambda b_2'}{1 - \lambda}$$

werden und hieraus erhält man für λ zwei Werte, u. zw.:

$$\lambda = \frac{a_1 - a_1'}{a_2 - a_2'}, \qquad \lambda = \frac{b_1 - b_1'}{b_2 - b_2'},$$

die jedoch einander gleich sein müssen, weshalb auch

$$\frac{a_1 - a_1'}{a_2 - a_2'} = \frac{b_1 - b_1'}{b_2 - b_2'}$$

sein muss. Diese Bedingung ist aber hier erfüllt; denn schafft man in der letzten Gleichung die Brüche weg und bringt sämmtliche Glieder auf die linke Seite vom Gleichheitszeichen, so gelangt man schließlich zu der früher gegebenen Gleichung (*c*). Die Gleichung des einen Doppelpunktes ist somit

$$(a_2 - a_2') m_1 - (a_1 - a_1') m_2 = o,$$

während der andere Doppelpunkt bekanntlich in unendlicher Ferne liegt.

Nachdem wir die ähnlichen Punktreihen besprochen haben, übergehen wir auf die congruenten Punktreihen welche eigentlich in den ersteren enthalten sind. Setzt man nämlich in der Verwandtschaftsgleichung (252) diesmal $\gamma = -\beta$, so lautet dieselbe

$$(259) \; \ldots\ldots \; \beta(x - x') + \delta = o$$

und hieraus folgt

$$x' = x + \frac{\delta}{\beta}.$$

Sind daher wieder M_1, M_1' und M_2, M_2' zwei Paare entsprechender Punkte, M_0 und M_0' feste Punkte der Träger (T) und (T') beider Reihen, so ist mit Benützung der früheren Beziehung $x_1' = x_1 + \frac{\delta}{\beta}$ und $x_2' = x_2 + \frac{\delta}{\beta}$, folglich $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$, d. h.

$$(260) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad M_1' M_2' = M_1 M_2,$$

woraus sich ergibt, dass entsprechende Strecken beider Reihen gleich lang erscheinen. Es ist daher auch eine solche Verschiebung der Träger dieser Reihen möglich, durch welche je zwei einander entsprechende Punkte zur Deckung gelangen, weshalb die durch Gleichung (259) definierten projectivischen Punktreihen auch congruente Punkreihen genannt werden. Ferner ist klar, dass zur Bestimmung von zwei congruenten Punktreihen ein Paar entsprechender Punkte genügt.

Nun wollen wir schließlich noch annehmen, dass die beiden congruenten Punktreihen conlocal erscheinen, wo dann in Gl. (259) $x = OM$ und $x' = OM'$ die Entfernungen der einander entsprechenden Punkte M und M' von einem festen Punkte O des gemeinsamen Trägers (T) repräsentieren. Natürlich fallen hier beide Doppelpunkte mit dem unendlich fernen Punkte von (T) zusammen, wie man sich überzeugt, sobald man in Gl. (256) $\gamma = -\beta$ setzt.

Die Gleichungen (257) gelten übrigens auch für congruente Punktreihen, nur muss aus nahe liegenden Gründen die Bedingung erfüllt sein:

$$(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = (a_2' - a_1')^2 + (b_2' - b_1')^2.$$

§ 40. Congruente Strahlenbüschel. Die unendlich fernen imaginären Kreispunkte.

Nennt man diejenigen Winkel, deren Schenkel entsprechende Strahlen sind, auch entsprechende Winkel, so sind bei zwei projectivischen Strahlenbüscheln entsprechende Winkel im allgemeinen ungleich. Es gibt aber eine gewisse Gattung projectivischer Büschel, bei welchen die entsprechenden Winkel einander gleich sind, und diese nennt man dann

congruente Strahlenbüschel; sie können natürlich gleichstimmig oder ungleichstimmig, ferner perspectivisch oder in schiefer Lage sein, und sind offenbar bestimmt durch die Angabe ihrer Mittelpunkte und eines Paars entsprechender Strahlen. In dem Fall, wo die beiden congruenten Strahlenbüschel ungleichstimmig und perspectivisch sind (Fig. 50), steht ihre perspectivische Achse senkrecht auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte O und O' und halbiert noch überdies die Strecke OO'; erscheinen dagegen diese Strahlenbüschel gleichstimmig (Fig. 51) und perspectivisch,

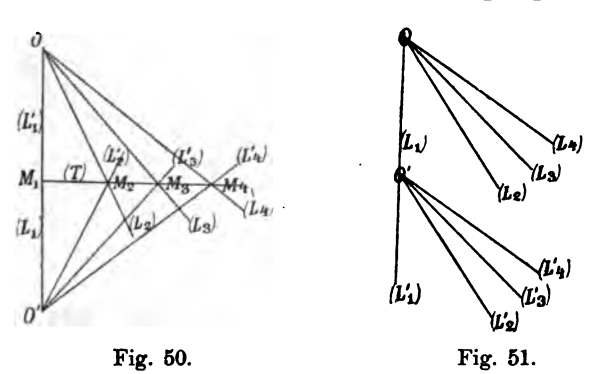


Fig. 50. Fig. 51.

so ist ihre perspectivische Achse die unendlich ferne Gerade (L_∞) ihrer Ebene. Dreht man in Fig. 50 den Büschel vom Centrum O' um (T) durch einen Winkel von 180^0, so decken sich beide Büschel, und ganz dasselbe geschieht, sobald man in Fig. 51 den Büschel vom Centrum O' um die Strecke $O'O$ parallel zu dem Strahl (L_1) nach aufwärts verschiebt.

Sind zwei congruente Strahlenbüschel gleichstimmig und in schiefer Lage, also nicht perspectivisch, so ist das Erzeugnis entsprechender Strahlen ein Kreis, welcher die Mittelpunkte O und O' beider Büschel enthält. Diese Eigenschaft kann zur Transportation eines Strahlenbüschels in seiner Ebene benützt werden. Ist nämlich O der Mittelpunkt eines gegebenen Strahlenbüschels von den Strahlen (L_1), (L_2), $(L_3)\ldots\ldots$, und soll der Büschel in der Weise transportiert werden, dass O nach O' und (L_1) nach (L'_1) kommt, so lege man durch die Punkte O, O' und den

Schnittpunkt m_1 der Strahlen (L_1), (L_1') einen Kreis (K), welcher die Strahlen (L_2), (L_3), (L_4)..... in den Punkten m_2, m_3, m_4..... durchschneidet, und ziehe hierauf durch O' und diese Punkte Strahlen.

Übergehend auf die conlocalen congruenten Strahlenbüschel, betrachte man zunächst die ungleichstimmigen Büschel dieser Art. Ist nun O der gemeinsame Mittelpunkt beider Büschel (Fig. 52) und repräsentiert (L_1), (L_1') ein

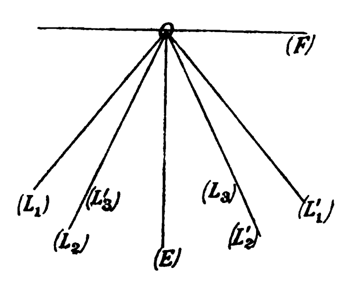


Fig. 52.

Paar entsprechender Strahlen, so erhält man zu dem Strahl (L_2) den entsprechenden (L_2'), indem man den Winkel $(L_1' L_2') = -(L_1 L_2)$ macht. Hieraus folgt aber zunächst, dass die beiden Winkelhalbierungslinien (E) und (F) des Winkels (L_1, L_1') die Doppelstrahlen der hier vorliegenden Strahlenbüschel repräsentieren. Die von zwei einander entsprechenden Strahlen gebildeten Winkel besitzen also hier gemeinsame Winkelhalbierungslinien, welche gleichzeitig die Doppelstrahlen der beiden Strahlenbüschel sind. Die Strahlen (L_2) und (L_2') sind übrigens auch vertauschungsfähig, d. h., betrachtet man (L_2') als zum ersten Büschel gehörig, wo er dann (L_3) heißen mag, so entspricht ihm im zweiten Büschel der mit (L_2) zusammenfallende Strahl (L_3'). Man erkennt dies sofort, sobald man darauf Bedacht nimmt, dass zufolge der Gleichheit $(L_2' L_1') = (L_1 L_2)$, auch $(L_1 L_3) = (L_3' L_1') = -(L_1' L_3')$ wird. Diese einfachen Betrachtungen führen sonach zu den Sätzen:

Zwei conlocale, ungleichstimmig congruente Strahlenbüschel haben zwei reelle Doppelstrahlen, und diese sind

die beiden Winkelhalbierungslinien des von zwei einander entsprechenden Strahlen gebildeten Winkels.

Je zwei einander entsprechende Strahlen dieser Büschel sind vertauschungsfähig.

Nun schreiten wir zu den conlocalen, gleichstimmig congruenten Strahlenbüscheln und nehmen wieder an, dass (L_1), (L_1') ein Paar entsprechender Strahlen repräsentieren (Fig. 53) und O der gemeinsame Mittelpunkt beider Büschel

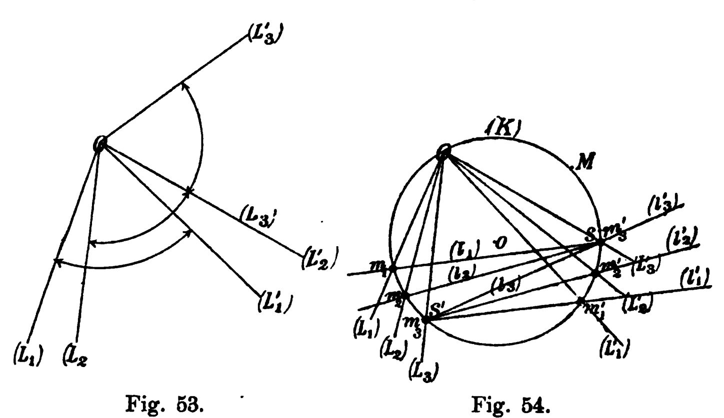


Fig. 53. Fig. 54.

ist. Zu irgend einem Strahl (L_2) des ersten Büchels wird diesmal der entsprechende (L_2') im zweiten Büschel gefunden, indem man Winkel $(L_1', L_2') = (L_1, L_2)$ macht, und hieraus folgt, dass zwei derartige Büschel hervorgehen durch die Drehung eines Winkels vom constanten Werte um seinen Scheitel. Zwei einander entsprechende Strahlen sind jedoch hier nicht mehr vertauschungsfähig; denn rechnet man den Strahl (L_2') als zum ersten Büschel gehörig und bezeichnet denselben dann mit (L_3), so entspricht diesem Strahl im zweiten Büschel der Strahl (L_3'), welcher wegen $(L_1 L_1') = (L_2 L_2') = (L_3 L_3')$ nur in dem speciellen Fall mit (L_2) zusammenfällt, wo nämlich (L_1, L_1') ein rechter Winkel ist. Noch von Interesse erscheinen die Doppelstrahlen der vorliegenden Strahlenbüschel. Behufs Bestimmung derselben benütze man die in § 38 angegebene Steiner'sche Methode und nehme wieder an, dass (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3), (L_3') drei Paare entsprechender Strahlen darstellen. Nach-

dem, zufolge der eben besprochenen Eigenschaft dieser Strahlenbüschel, $(L_1, L_2) = (L_1' L_2')$ und $(L_1, L_3) = (L_1' L_3')$, sein muss, sind auch (Fig. 54) die Bogen $m_1 m_2$ und $m_1' m_2'$, sowie $m_1' m_3'$ und $m_1 m_3$, einander gleich, woraus man erkennt, dass die in der Figur mit (l_1) und (l_1') bezeichneten Strahlen, sowie jene (l_2) und (l_2'), zu einander parallel erscheinen, weshalb die in Fig. 49 mit (T') bezeichnete perspectivische Achse der beiden Strahlenbüschel (l_1), (l_2), (l_3)... und (l_1'), (l_2'), (l_3').... mit der unendlich fernen Geraden (L_∞) der Ebene des Kreises (K) zusammenfällt. Die in Fig. 49 mit ε und φ benannten Punkte sind folglich in dem vorliegendem Fall die Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden (L_∞) mit dem Kreise (K), und erscheinen imaginär. Man erhält somit die beiden Doppelstrahlen (E) und (F) der beiden hier in Betracht kommenden conlocalen, gleichstimmig congruenten Strahlenbüschel, wenn man den Punkt O durch zwei Strahlen mit denjenigen Punkten ε und φ verbindet, in welchen der Kreis (K) von der unendlich fernen Geraden (L_∞) seiner Ebene geschnitten wird, und diese Doppelstrahlen sind natürlich imaginär, nachdem es auch die Punkte ε und φ sind.

Es steht zu erwarten, dass die Punkte ε und φ feste Punkte sind, d. h. Punkte, welche unabhängig erscheinen von den Coordinaten a, b des Centrums und dem Halbmesser r des Kreises (K), indem ja (K) nur durch den Punkt O gehen muss und sonst ganz willkürlich gewählt wurde; ferner die beiden Doppelstrahlen bei jeder erlaubten Wahl von (K) dieselben bleiben müssen. Um dies auch analytisch nachzuweisen, bestimme man die Coordinaten der Schnittpunkte ε, φ des Kreises (K) mit der unendlich fernen Geraden (L_∞) seiner Ebene. Nachdem nun die Entfernung irgend eines Punktes M des Kreises (K) vom Centrum o desselben immer gleich r ist, unterliegen die Coordinaten x, y des Punktes M, zufolge Gl. (3), der Relation $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, oder

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2 = o,$$

welche zugleich die Gleichung des Kreises (K) in der Normalform darstellt. Die letzte Gleichung kann ohneweiters homogen

gemacht werden, sobald man x und y (§ 25) durch die Quotienten $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ ersetzt und hierauf letzte Gleichung mit z^2 multipliciert, wodurch man erhält

$$x^2 + y^2 - 2axz - 2byz + (a^2 + b^2 - r^2) z^2 = o$$

als Gleichung des Kreises (K) in den einfachsten homogenen Punktcoordinaten. Ferner lautet, bei dieser Wahl der homogenen Punktcoordinaten, (siehe Gl. 169) die Gleichung der unendlich fernen Geraden (L_∞) der Ebene des Kreises (K)

$$z = o,$$

und müssen sonach die Coordinaten der beiden Punkte ε und φ den zwei letzten Gleichungen genügen, oder den hieraus fließenden

$$(261) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= o, \\ z &= o, \end{aligned}$$

woraus sich sofort ergibt:

$$(262) \quad \ldots \quad \begin{aligned} y - ix &= o \\ z &= o, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y + ix &= o \\ z &= o. \end{aligned}$$

Es ist somit der unendlich ferne Punkt der Geraden $y + ix = o$ der Punkt ε, jener der anderen $y - ix = o$ der Punkt φ, und weil in den obigen Gleichungen die den Kreis (K) bestimmenden Parameter a, b und r nicht mehr vorkommen, so sind die Punkte ε und φ für alle in derselben Ebene liegenden gleichstimmig congruenten, conlocalen Strahlenbüschel und Kreise auch dieselben, d. h., sie erscheinen als gemeinsame Punkte der letzteren. Daraus folgt nun, wenn man noch bedenkt, dass ε und φ gleichzeitig die unendlich fernen Punkte der vorhin erwähnten Doppelstrahlen (E) und (F) repräsentieren, der interessante

Satz:

Sämmtliche Kreise einer und derselben Ebene durchschneiden die unendlich ferne Gerade der letzteren in zwei festen, jedoch imaginären Punkten ε und φ, und diese repräsentieren zugleich die unendlich fernen Punkte der Doppelstrahlen aller in der Ebene liegenden gleichstimmig congruenten, conlocalen Strahlenbüschel.

Man nennt die Punkte ε und φ die unendlich fernen imaginären Kreispunkte, und mittelst der Gleichungen (262) ist man aber auch in der Lage, sofort die Gleichung dieser beiden Punkte aufzustellen. Nach Gl. (40) in § 10 ist bekanntlich $xu + yv + 1 = o$ die Gleichung eines Punktes von den rechtwinkeligen Coordinaten x, y, und dieselbe kann sofort homogen gemacht werden, wenn man in ihr x, y durch $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ und u, v durch $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ ersetzt und hierauf die ganze Gleichung mit zw multipliciert, wodurch man erhält

$$xu + yv + zw = o$$

als Gleichung eines Punktes, unter Zugrundelegung der einfachsten homogenen Punkt- und Liniencoordinaten. Für den Punkt ε ist aber, wie aus Gl. (262) sich ergibt, $y = -ix$ und $z = o$, für den Punkt φ aber $y = ix$ und $z = o$, demnach sind auch

$$u - iv = o, \qquad u + iv = o$$

die Gleichungen von ε, beziehungsweise φ, und erscheinen daher in der quadratischen Gleichung

$$(263) \quad . \; . \; . \qquad u^2 + v^2 = o$$

die beiden imaginären Kreispunkte gleichzeitig enthalten.

Capitel VII.
Involution.

§ 41. Verwandtschaftsgleichungen.

Zwei conlocale Punktreihen sind in Involution (oder involutorisch), wenn einem jeden Punkte *M* des gemeinsamen Trägers (*T*) beider Reihen ein und derselbe Punkt *M'* entspricht, gleichgiltig, ob hierbei *M* angesehen wird als ein Element der ersten oder zweiten Reihe (Desargues).

Zwei conlocale Strahlenbüschel sind in Involution (oder involutorisch), wenn einem jeden durch den gemeinsamen Träger *O* beider Strahlenbüschel gehenden Strahl (*L*) ein und derselbe Strahl (*L'*) entspricht, gleichgiltig, ob hierbei (*L*) angesehen wird als ein Element des ersten oder zweiten Büschels (Desargues).

Es ist sonach die Involution ein specieller Fall der Projectivität von zwei gleichartigen, conlocalen Grundgebilden erster Stufe, u. zw. unterscheidet sich die Involution von der Projectivität bloß dadurch, dass die einander entsprechenden Elemente vertauschungsfähig sind. Ist nämlich 1 ein Element der Punktreihe I (oder des Strahlenbüschels I), so entspricht demselben in der Punktreihe II (oder dem Strahlenbüschel II) nach dem Gesetze der Projectivität ein ganz bestimmtes Element 1', welches auf dem gemeinsamen Träger (*T*) beider Reihen liegt (oder durch den gemeinsamen Mittelpunkt beider Büschel geht). Sieht man nun 1 als ein Element von II an, wo es mit 2' bezeichnet werden möge, so entspricht demselben nach dem Gesetze der Projectivität ein ganz bestimmtes Element 2 in I, welches im allgemeinen von 1' verschieden ist und nur

in dem besonderen Fall mit 1′ identisch erscheint, wo beide Gebilde involutorisch sind.

Sind folglich	Sind folglich
$M_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 = o$	$L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$
und	und
$M_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 = o$	$L_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$
die Gleichungen zweier Punkte,	die Gleichungen zweier Strahlen,

λ und μ zwei veränderliche Parameter, unterworfen der Bedingung

$$(264) \quad \ldots \quad a\lambda\mu + b(\lambda + \mu) + d = o,$$

so repräsentieren die Gleichungen

$$(265) \ldots \begin{array}{l} M_1 - \lambda M_2 = o, \\ M_1 - \mu M_2 = o \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} L_1 - \lambda L_2 = o \\ L_1 - \mu L_2 = o, \end{array} \ldots (266)$$

für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ ein Paar entsprechender Elemente M und M', beziehungsweise (L) und (L'), welche Elemente noch überdies vertauschungsfähig erscheinen, d. h. es sind: (265) die Gleichungen von zwei involutorischen Punktreihen, (266) jene von zwei involutorischen Strahlenbüscheln und

$$M_1 = o, \quad M_2 = o \quad \Big| \quad L_1 = o, \quad L_2 = o$$

die Gleichungen des Trägers

der beiden Reihen.	der beiden Büschel.

Gleichzeitig sei noch bemerkt, dass (264) die Gleichung der Involution heißt.

Nun kann man aber auch die Coordinaten von zwei einander entsprechenden Punkten einer Punktinvolution, oder von zwei einander entsprechenden Strahlen einer Strahleninvolution ermitteln. Sind nämlich wieder

y_i und z_i, $i = 1, 2, 3$, die trimetrischen Coordinaten der Punkte M_1 und M_2, so nehmen nach Gl. (160) die obigen Gleichungen (265) die Form an:	v_i und w_i, $i = 1, 2, 3$, die trigonalen Coordinaten der Strahlen (L_1) und (L_2), so nehmen nach Gl. (159) die Gleichungen (266) die Form an:
$\Sigma(y_i - \lambda z_i) u_i = o,$	$\Sigma(v_i - \lambda w_i) x_i = o,$
$\Sigma(y_i - \mu z_i) u_i = o,$	$\Sigma(v_i - \mu w_i) x_i = o,$

und sind sonach für jedes zusammengehörige Wertesystem von λ und μ

$$(267)\ldots \begin{array}{l} x_i = y_i - \lambda z_i, \\ x_i' = y_i - \mu z_i \end{array} \quad\Big|\quad \begin{array}{l} u_i = v_i - \lambda w_i, \\ u_i' = v_i - \mu w_i \end{array} \ldots(268)$$

die Coordinaten eines Paars entsprechender Elemente M, M' oder $(L), (L')$ der beiden Punktreihen oder Strahlenbüschel in Involution.

Es braucht wohl nicht erwähnt zu werden, dass die früheren Gleichungen (233) und (234) für den Fall der Involution die Form annehmen müssen

$$(269)\ldots \alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = o, \quad\Big|\quad \alpha u u' + \beta(u + u') + \delta = o, \ldots(270)$$

und bedeuten hierin wieder

$x = OM$, $x' = OM'$ die Entfernungen der einander entsprechenden Punkte M, M' von einem festen Punkte des gemeinsamen Trägers (T) beider Reihen.

$u = \operatorname{tg}(O, L)$, $u' = \operatorname{tg}(O, L')$ die trigonometrischen Tangenten jener Winkel, den die einander entsprechenden Strahlen (L), (L') mit einer festen durch das gemeinsame Centrum beider Büschel gehenden Geraden einschließen.

§ 42. Sätze über involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Satz. Zwei involutorische Punktreihen erscheinen bestimmt durch zwei Paare entsprechender Punkte.

Satz. Zwei involutorische Strahlenbüschel erscheinen bestimmt durch zwei Paare entsprechender Strahlen.

Beweis. Sind λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2 diejenigen Werte der Parameter λ und μ, welche den zwei Paaren entsprechender Elemente angehören, so wird, zufolge der früheren Gleichung (264), d. i.

$$a\lambda\mu + b(\lambda + \mu) + d = o,$$
$$a\lambda_1\mu_1 + b(\lambda_1 + \mu_1) + d = o,$$
$$a\lambda_2\mu_2 + b(\lambda_2 + \mu_2) + d = o,$$

und hieraus folgt durch die Elimination von a, b und d

$$(271) \ldots \quad \begin{vmatrix} \lambda\mu & (\lambda+\mu) & 1 \\ \lambda_1\mu_1 & (\lambda_1+\mu_1) & 1 \\ \lambda_2\mu_2 & (\lambda_2+\mu_2) & 1 \end{vmatrix} = o$$

als Gleichung der Involution, daher etc. etc.

Satz. Sind in zwei conlocalen, gleichartigen, projectivischen Grundgebilden erster Stufe die Elemente eines Paars entsprechender Elemente vertauschungsfähig, so sind diese beiden Gebilde in Involution.

Beweis. Es seien diesmal 1, 1'; 2, 2' und 3, 3' drei Paare entsprechender Elemente, und werde hierbei angenommen, dass 1 und 1' vertauschungsfähig sind und überdies das Element 2 mit jenem 3' zusammenfällt, d. h. 2 als ein Element der Punktreihe I (des Strahlenbüschels I) entspricht in der Punktreihe II (dem Strahlenbüschel II) das Element 2' und 2 als ein Element von II, wo es dann mit 3' bezeichnet werden möge, entspricht in I das Element 3. Nach dem Gesetze der Projectivität (siehe § 34) ist nun (1 1' 2 3) = (1' 1 2' 3'), oder weil 2 mit 3' zusammenfällt, (1 1' 2 3) = (1' 1 2' 2). Nun ist aber, wie man sich leicht überzeugen kann, (1' 1 2' 2) = (1 1' 2 2'), und daher kann die letzte Gleichung auch so gegeben werden (1 1' 2 3) = = (1 1' 2 2') und hieraus folgt, dass auch 2' mit 3 zusammenfällt, d. h. die beiden einander entsprechenden Elemente 2, 2' sind ebenfalls vertauschungsfähig, wodurch der oben ausgesprochene Satz erwiesen erscheint.

Satz. Sind zwei conlocale Punktreihen in Involution, so fallen die Gegenpunkte G und G' beider Reihen zusammen.

Satz. Sind zwei conlocale Strahlenbüschel in Involution, so fallen die einander nicht entsprechenden Gegenstrahlen (G_1) und (G_2'), sowie (G_1') und (G_2) zusammen.

Beweis. Sind M, M' (Fig. 55) ein Paar entsprechender Punkte der beiden involutorischen Punktreihen, so ist in Anbetracht, dass die Involution nur ein specieller

Beweis. Sind (L), (L') (Fig. 56) ein Paar entsprechender Strahlen der beiden involutorischen Strahlenbüschel, so ist in Anbetracht, dass die Involution nur ein

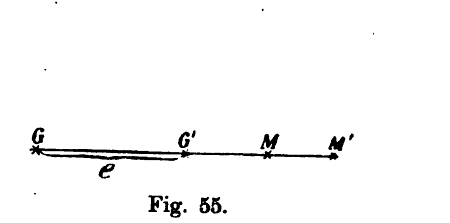


Fig. 55.

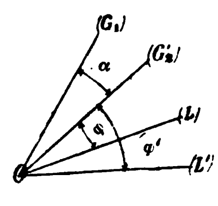


Fig. 56.

Fall der Projectivität ist, nach einem in § 35 bereits vorgeführten Satze das Product

$$GM \,.\, G'M' = \text{Const}$$

specieller Fall der Projectivität ist, nach einem in § 35 bereits bewiesenen Satze das Product

$$\text{tg}\,(G_1, L) \,.\, \text{tg}\,(G_2', L') = \text{Const}$$

und daher

$$GM \,.\, G'M' = GM' \,.\, G'M.$$

Setzt man noch $GG' = e$, $G'M = x$ und $G'M' = x'$, so nimmt die letzte Gleichung die Form an

$$(x + e) \,.\, x' = (x' + e)\,x,$$

welche Gleichung, nachdem x von x' im allgemeinen verschieden ist, nur dann bestehen kann, wenn $e = o$ wird, weshalb in der That G mit G' zusammenfällt. Der Punkt, in welchem G und G' sich vereinigen, heißt der Mittelpunkt (das Centrum) der Involution und wird in Hinkunft mit G_0 bezeichnet. Sind demnach wieder M, M' ein Paar entsprechender Punkte von zwei involutorischen Punktreihen, so ist das Product

$$(272) \ldots G_0 M \,.\, G_0 M' = \text{Const},$$

$$\text{tg}\,(G_1, L) \,.\, \text{tg}\,(G_2' L') = \text{tg}\,(G_1, L') \,.\, \text{tg}\,(G_2' L).$$

Setzt man noch $(G_1, G_2') = \alpha$, $(G_2' L) = \varphi$ und $(G_2' L') = \varphi'$, so nimmt die letzte Gleichung die Form an

$$\text{tg}\,(\alpha + \varphi)\, \text{tg}\,\varphi' = \text{tg}\,(\alpha + \varphi') \,.\, \text{tg}\,\varphi,$$

welche Gleichung, nachdem φ von φ' im allgemeinen verschieden ist, nur dann bestehen kann, wenn $\alpha = o$ wird, d. h. (G_1) mit (G_2') zusammenfällt. Fällt aber (G_1) mit (G_2') zusammen, so sind auch (G_1') und (G_2) zusammenfallende Strahlen und es ist, sobald (L), (L') wieder ein Paar entsprechender Strahlen von zwei involutorischen Strahlenbüscheln repräsentieren, das Product:

$$\text{tg}\,(G_1, L) \,.\, \text{tg}\,(G_1, L') = \text{Const} \ldots (273),$$

u. zw. für jedes Paar entsprechender Punkte dieser beiden Reihen. Von selbst folgt noch, dass das Centrum G_0 der Involution und der unendlich ferne Punkt M_∞ des gemeinsamen Trägers beider Reihen ebenfalls ein Paar entsprechender Punkte darstellen.

u. zw. für jedes Paar entsprechender Strahlen der beiden Büschel. Gleichzeitig ersieht man, dass eine Strahleninvolution nur ein einziges reelles Strahlenpaar besitzt, deren Elemente einen rechten Winkel bilden. Dieses Strahlenpaar heißt das rechtwinkelige Strahlenpaar der Involution.

Bezeichnet man die in den Gleichungen (272) und (273) vorkommenden Constanten mit k und nimmt gleichzeitig an, dass die einander entsprechenden Punkte M, M', beziehungsweise Strahlen (L), (L'), zusammenfallen, so gehen diese Gleichungen über in die folgenden

$$(G_0 M)^2 = k \qquad\qquad [\mathrm{tg}\,(G_1, L)]^2 = k$$

und hieraus folgt, sobald man die

Doppelpunkte der beiden involutorischen Punktreihen mit E und F bezeichnet,
$G_0 E = \sqrt{k}$, $\quad G_0 F = -\sqrt{k}$,

Doppelstrahlen der beiden involutorischen Strahlenbüschel mit (E) und (F) bezeichnet,
$\mathrm{tg}\,(G_1, E) = \sqrt{k}$, $\mathrm{tg}\,(G_1, F) = -\sqrt{k}$,

aus welchen Gleichungen die beiden Sätze hervorgehen:

Der Mittelpunkt G_0 der Involution einer Punktinvolution halbiert die zwischen den beiden Doppelpunkten E und F gelegene Strecke.

Die beiden Elemente des rechtwinkeligen Strahlenpaars einer Strahleninvolution sind identisch mit den beiden Winkelhalbierungslinien des von den Doppelstrahlen (E) und (F) gebildeten Winkels.

Es ist klar, dass die beiden Doppelelemente reell oder imaginär erscheinen, je nachdem die Größe k positiv oder negativ ausfällt, dass ferner, wenn $k = o$ ist, dieselben wohl reell sind, aber zusammenfallen.

Satz. Die beiden Doppelpunkte einer Strahleninvolu-

Satz. Die beiden Doppelstrahlen einer Strahleninvo-

tion und ein Paar entsprechender Punkte sind harmonisch.

lution und ein Paar entsprechender Strahlen sind harmonisch.

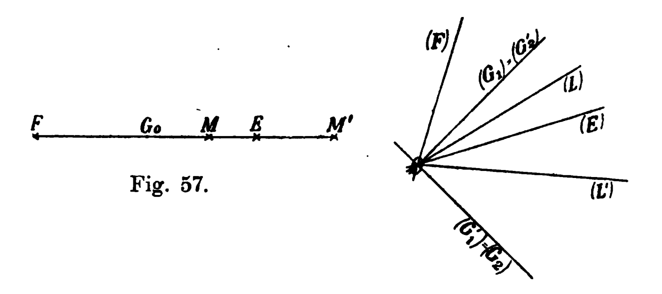


Fig. 57.

Fig. 58.

Beweis. Nachdem, wie bereits gesagt wurde, die Involution nur ein specieller Fall der Projectivität ist, die beiden einander entsprechenden Elemente M, M', beziehungsweise $(L), (L')$, vertauschungsfähig sind, ist (§ 34):

$$(EFMM') = (EFM'M), \quad | \quad (EFLL') = (EFL'L),$$

oder

$$\frac{(EFM)}{(EFM')} = \frac{(EFM')}{(EFM)}, \quad | \quad \frac{(EFL)}{(EFL')} = \frac{(EFL')}{(EFL)},$$

woraus sich ergibt

$$(EFM)^2 = (EFM')^2 \quad | \quad (EFL)^2 = (EFL')^2$$

und hieraus, weil der Fall $(EFM') = (EFM)$, beziehungsweise $(EFL') = (EFL)$, ausgeschlossen erscheint,

$$(EFM) = -(EFM'),$$

zum Beweise, dass die Punkte E, F und M, M' zwei harmonische Punktpaare darstellen.

$$(EFL) = -(EFL'),$$

zum Beweise, dass die Strahlen $(E), (F)$ und $(L), (L')$ zwei harmonische Strahlenpaare darstellen.

Sind demnach

$A_1 u + B_1 v + C_1 = o$ und $A_2 u + B_2 v + C_2 = o$ die Gleichungen der beiden Doppelpunkte von zwei involutorischen Punktreihen, und

$A_1 x + B_1 y + C_1 = o$ und $A_2 x + B_2 y + C_2 = o$ die Gleichungen der beiden Doppelstrahlen von zwei involutorischen Strahlenbüscheln,

ist λ ein veränderlicher Parameter, so sind nach § 19:

$$(274)\quad \begin{aligned}(A_1u+B_1v+C_1)-\lambda\,.\,(A_2u+B_2v+C_2&=o,\\ (A_1u+B_1v+C_1)+\lambda\,.\,(A_2u+B_2v+C_2)&=o\end{aligned}$$

die Gleichungen der beiden Punktreihen in Involution.

und ist λ ein veränderlicher Parameter, so sind nach § 19:

$$\begin{aligned}(A_1x+B_1y+C_1)-\lambda\,.\,(A_2x+B_2y+C_2)&=o,\\ (A_1x+B_1y+C_1)+\lambda\,.\,(A_2x+B_2y+C_2)&=o\end{aligned}\quad(275)$$

die Gleichungen der beiden Strahlenbüschel in Involution.

Satz. Sind:

$$(276)\quad \begin{matrix}U-\lambda_1V=o & U-\lambda_2V=o & U-\lambda_3V=o\\ U-\mu_1V=o, & U-\mu_2V=o, & U-\mu_3V=o\end{matrix}$$

die Gleichungen von drei Paaren entsprechender Elemente einer Punkt- oder Strahleninvolution, so bestehen zwischen den in den obigen Gleichungen vorkommenden sechs Parametern λ_i und μ_i die Beziehungen:

$$(277)\quad \begin{aligned}(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_2-\mu_3)(\lambda_3-\mu_1)&=(\lambda_1-\mu_3)(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_3-\mu_2):\\ (\mu_1-\mu_2)(\lambda_2-\mu_3)(\lambda_3-\lambda_1)&=(\mu_1-\mu_3)(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\mu_2),\\ (\lambda_1-\lambda_2)(\mu_2-\mu_3)(\lambda_3-\mu_1)&=(\lambda_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)(\lambda_3-\lambda_2),\\ (\lambda_1-\mu_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\mu_3-\mu_1)&=(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2),\end{aligned}$$

von welchen alle erfüllt sind, sobald die eine es ist.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass zwischen den sechs Coefficienten λ_i und μ_i, zufolge der früher angegebenen Verwandtschaftsgleichung (271), die Ret. besteht

$$(278)\;.\;.\quad A\equiv\begin{vmatrix}\lambda_1\mu_1, & (\lambda_1+\mu_1), & 1\\ \lambda_2\mu_2, & (\lambda_2+\mu_2), & 1\\ \lambda_3\mu_3, & (\lambda_3+\mu_3), & 1\end{vmatrix}=o,$$

woraus, sobald man noch setzt

$$(a)\;.\;.\;B=\begin{vmatrix}\lambda_1^2, & \lambda_1 & 1\\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1\\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1\end{vmatrix}$$

und bedenkt, dass die Determinante

$$A=\begin{vmatrix}1, & -(\lambda_1+\mu_1), & \lambda_1\mu_1\\ 1, & -(\lambda_2+\mu_2), & \lambda_2\mu_2\\ 1, & -(\lambda_3+\mu_3), & \lambda_3\mu_3\end{vmatrix}$$

ist, nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten sich ergibt

$$A \, . \, B = \begin{vmatrix} [\lambda_1^2 - \lambda_1 (\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1 \mu_1], [\lambda_1^2 - \lambda_1 (\lambda_2 + \mu_2) \\ + \lambda_2 \mu_2], [\lambda_1^2 - \lambda_1 (\lambda_3 + \mu_3) + \lambda_3 \mu_3]; \\ [\lambda_2^2 - \lambda_2 (\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1 \mu_1], [\lambda_2^2 - \lambda_2 (\lambda_2 + \mu_2) \\ + \lambda_2 \mu_2], [\lambda_2^2 - \lambda_2 (\lambda_3 + \mu_3) + \lambda_3 \mu_3]; \\ [\lambda_3^2 - \lambda_3 (\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1 \mu_1], [\lambda_3^2 - \lambda_3 (\lambda_2 + \mu_2) \\ + \lambda_2 \mu_2], [\lambda_3^2 - \lambda_3 (\lambda_3 + \mu_3) + \lambda_3 \mu_3] \end{vmatrix}$$

und hieraus nach erfolgter Berechnung der rechts vom Gleichheitszeichen erscheinenden Determinante:

$$(b) \ldots A \, . \, B = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)[(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) - (\lambda_1 - \mu_3)(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_3 - \mu_2)].$$

Anderseits ist aber nach den Grundlehren der Determinantentheorie

$$B = \begin{vmatrix} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & (\lambda_1 - \lambda_2) & o \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & (\lambda_1 - \lambda_2) & o \\ (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) & (\lambda_2 - \lambda_3) & o \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)$$

und daher nach Gl. (b)

$$A = - [(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) - (\lambda_1 - \mu_3)(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_3 - \mu_2)],$$

weshalb die Gl. (278) die Form annimmt

$$(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) = (\lambda_1 - \mu_3)(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_3 - \mu_2).$$

Die letzte Gleichung ist also nur eine Folge von jener (278), d. h. sie ist dieselbe Gleichung, nur in anderer Form und ist zugleich die erste der vier Gleichungen (277). Um noch die drei anderen in (277) ebenfalls angegebenen Formen von Gl. (278) zu erhalten, hat man bloß successive λ_1 mit μ_1, λ_2 mit μ_2 und λ_3 mit μ_3 zu vertauschen, was, wie ein Blick auf Gl. (278) sofort erkennen lässt, statthaft erscheint.

Aus den in (277) angegebenen vier Gleichungen kann man aber drei neue herleiten, sobald man nämlich die erste derselben durch die zweite, beziehungsweise dritte und vierte dividiert, wodurch man erhält:

$$(279) \ldots \begin{array}{l} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_3 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_3) = \\ \quad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \mu_3)(\lambda_2 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2), \\ (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_3 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3) = \\ \quad (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1), \\ (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_3)(\mu_3 - \mu_1) = \\ \quad (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_3)(\mu_3 - \mu_2). \end{array}$$

Satz. Sind M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' drei Paare entsprechender Punkte einer Punktinvolution, so ist das Product:

$$(280)\quad (M_2 M_3 M_1')(M_3 M_1 M_2')(M_1 M_2 M_3') = 1.$$

Beweis. Nimmt man an, dass $U = o$ und $V = o$ die Gleichungen der beiden Doppelpunkte einer Punktinvolution darstellen, so sind nach den Gleichungen (274)

$$(c)\quad \begin{aligned} &U - \lambda_1 V = o,\ U - \lambda_2 V = o,\\ &U + \lambda_1 V = o,\ U + \lambda_2 V = o,\\ &U - \lambda_3 V = o,\\ &U + \lambda_3 V = o, \end{aligned}$$

die Gleichungen von drei Paaren M_1, M_1'; M_2, M_2'; M_3, M_3' entsprechender Elemente.

Satz. Sind (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3), (L_3') drei Paare entsprechender Strahlen einer Strahleninvolution, so ist das Product:

$$(L_2 L_3 L_1')(L_3 L_1 L_2')(L_1 L_2 L_3') = 1 \quad \ldots\ldots (281)$$

Beweis. Nimmt man an, dass $U = o$ und $V = o$ die Gleichungen der beiden Doppelstrahlen einer Strahleninvolution darstellen, so sind nach den Gleichungen (275)

$$\begin{aligned} &U - \lambda_1 V = o,\ U - \lambda_2 V = o,\\ &U + \lambda_1 V = o,\ U + \lambda_2 V = o,\\ &U - \lambda_3 V = o,\\ &U + \lambda_3 V = o, \end{aligned} \quad (d)$$

die Gleichungen von drei Paaren (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2'); (L_3), (L_3') entsprechender Elemente.

Nun setze man

$$(e)\quad \begin{aligned} U - \lambda_1 V &= \frac{M_1}{\lambda_2 - \lambda_3},\\ U - \lambda_2 V &= \frac{M_2}{\lambda_3 - \lambda_1},\\ U - \lambda_3 V &= \frac{M_3}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U - \lambda_1 V &= \frac{L_1}{\lambda_2 - \lambda_3},\\ U - \lambda_2 V &= \frac{L_2}{\lambda_3 - \lambda_1},\\ U - \lambda_3 V &= \frac{L_3}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned} \quad (f)$$

woraus zunächst folgt

$$(g)\quad M_1 + M_2 + M_3 = o, \qquad L_1 + L_2 + L_3 = o, \quad (h)$$

und drücke mittelst der beiden letzten der Gleichungen

(e) die Polynome U und V durch M_2 und M_3 aus

(f) die Polynome U und V durch L_2 und L_3 aus

und erhält dadurch

$$U = \frac{\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)M_3-\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)M_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)},$$
$$V = \frac{(\lambda_3-\lambda_1)M_3-(\lambda_1-\lambda_2)M_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}.$$

$$U = \frac{\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)L_3-\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)L_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)},$$
$$V = \frac{(\lambda_3-\lambda_1)L_3-(\lambda_1-\lambda_2)L_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}.$$

Die eben gefundenen Ausdrücke für die beiden Gleichungspolynome U und V substituiere man nun in die erste der drei unteren Gleichungen (c), beziehungsweise (d), wodurch diese nach einigen einfachen algebraischen Operationen schließlich die Form annimmt:

$$\frac{M_2}{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}} - \frac{M_3}{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}} = o. \qquad \Bigg| \qquad \frac{L_2}{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}} - \frac{L_3}{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}} = o.$$

In analoger Weise kann man nun auch die beiden anderen Gleichungen $U + \lambda_2 V = o$ und $U + \lambda_3 V = o$ umformen und erhält dann schließlich als Ersatz der früheren Gleichungen (c), beziehungsweise (d), die nachfolgende Gruppe von Gleichungen, u. zw.:

$$(282) \quad \begin{aligned} M_1 &= o, \\ M_1' &\equiv \frac{M_2}{\mu_2} - \frac{M_3}{\mu_3} = o; \\ M_2 &= o, \\ M_2' &\equiv \frac{M_3}{\mu_3} - \frac{M_1}{\mu_1} = o; \\ M_3 &= o, \\ M_3' &\equiv \frac{M_1}{\mu_1} - \frac{M_2}{\mu_2} = o, \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} L_1 &= o, \\ L_1' &\equiv \frac{L_2}{\mu_2} - \frac{L_3}{\mu_3} = o; \\ L_2 &= o, \\ L_2' &\equiv \frac{L_3}{\mu_3} - \frac{L_1}{\mu_1} = o; \\ L_3 &= o, \\ L_3' &\equiv \frac{L_1}{\mu_1} - \frac{L_2}{\mu_2} = o, \end{aligned} \quad (283)$$

wenn die drei Coefficienten μ_1, μ_2 und μ_3 definiert erscheinen durch

$$(284) \ldots \mu_1 = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}, \quad \mu_3 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Aus den hier vorgeführten Betrachtungen erkennt man demnach zunächst, dass die sechs Gleichungen

(282) drei Punktpaare M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' eine Punktinvolution

(283) drei Strahlenpaare (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3)' (L_3') eine Strahleninvolution

darstellen, welche Werte man den darin vorkommenden Coefficienten μ_1, μ_2 und μ_3 beilegen mag, wenn nur die Bedingung erfüllt erscheint:

$$M_1 + M_2 + M_3 = o. \qquad | \qquad L_1 + L_2 + L_3 = o.$$

Gleichzeitig ist es aber jetzt auch leicht, den vorhin ausgesprochenen Satz zu beweisen. Zufolge der obigen Gleichungen

(282) ist nämlich nach Gl. (95) in § 16

$$(M_2\, M_3\, M_1') = \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{\varrho_2}{\varrho_3},$$

$$(M_3\, M_1\, M_2') = \frac{\mu_3}{\mu_1} \frac{\varrho_3}{\varrho_1},$$

$$(M_1\, M_2\, M_3') = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$

(283) ist nämlich nach Gl. (99) in § 17

$$(L_2\, L_3\, L_1') = \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{\varrho_2}{\varrho_3},$$

$$(L_3\, L_1\, L_2') = \frac{\mu_3}{\mu_1} \frac{\varrho_3}{\varrho_2},$$

$$(L_1\, L_2\, L_3') = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$

und daher in der That das Product

$$(M_2\, M_3\, M_1')\,(M_3\, M_1\, M_2')\,(M_1\, M_2\, M_3') = 1,$$

$$(L_2\, L_3\, L_1')\,(L_3\, L_1\, L_2')\,(L_1\, L_2\, L_3') = 1,$$

was zu beweisen war. Die obige Gleichung kann aber auch ersetzt werden durch:

$$\frac{M_2\, M_1'}{M_3\, M_1'} \cdot \frac{M_3\, M_2'}{M_1\, M_2'} \cdot \frac{M_1\, M_3'}{M_2\, M_3'} = 1,$$

$$\frac{\sin(L_2, L_1')}{\sin(L_3, L_1')} \cdot \frac{\sin(L_3, L_2')}{\sin(L_1, L_2')} \cdot \frac{\sin(L_1, L_3')}{\sin(L_2, L_3')} = 1,$$

und hieraus ergibt sich nach Wegschaffung der Brüche:

$$M_1\, M_2' \,.\, M_2\, M_3' \,.\, M_3\, M_1' = M_1\, M_3' \,.\, M_2\, M_1' \,.\, M_3\, M_2'$$

$$\sin(L_1, L_2') \,.\, \sin(L_2, L_3') \,.\, \sin(L_3, L_1') = \sin(L_1, L_3')\, \sin(L_2\, L_1')\, \sin(L_3\, L_2')$$

und aus diesen folgen, sobald man successive

M_1 mit M_1', M_2 mit M_2', M_3 mit M_3' | (L_1) mit (L_1'), (L_2) mit (L_2'), (L_3) mit (L_3')

vertauscht, drei weitere Relationen, so dass man also schließlich zu dem Satze gelangt:

Sind M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' drei Paare entsprechender Punkte einer Punktinvolution,

Sind (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3) (L_3') drei Paare entsprechender Strahlen einer Strahleninvolution,

so bestehen die nachfolgenden vier Gleichungen, u. zw.:

$$(285)\quad \begin{aligned} &M_1 M_2'.M_2 M_3'.M_3 M_1' = M_1 M_3'.M_2 M_1'.M_3 M_2',\\ &M_1' M_2'.M_2 M_3'.M_3 M_1 = M_1' M_3'.M_2 M_1.M_3 M_2',\\ &M_1 M_2.M_2' M_3'.M_3 M_1' = M_1 M_3'.M_2' M_1'.M_3 M_2,\\ &M_1 M_2'.M_2 M_3.M_3' M_1' = M_1 M_3.M_2 M_1'.M_3' M_2'. \end{aligned}$$

$$(286)\quad \begin{aligned} &\sin(L_1 L_2')\,.\,\sin(L_2 L_3')\,\sin(L_3 L_1') = \sin(L_1 L_3')\,\sin(L_2 L_1')\,\sin(L_3 L_2'),\\ &\sin(L_1' L_2')\,.\,\sin(L_2 L_3')\,.\,\sin(L_3 L_1) = \sin(L_1' L_3')\,\sin(L_2 L_1)\,\sin(L_3 L_2'),\\ &\sin(L_1 L_2)\,.\,\sin(L_2' L_3')\,\sin(L_3 L_1') = \sin(L_1 L_3')\,\sin(L_2' L_1')\,\sin(L_3 L_2),\\ &\sin(L_1, L_2')\,\sin(L_2 L_3)\,.\,\sin(L_3' L_1') = \sin(L_1 L_3)\,\sin(L_2 L_1')\,\sin(L_3' L_2'). \end{aligned}$$

Mittelst der früheren Gleichungen (276) und (278) kann man übrigens noch zwei weitere Sätze herleiten, welche so ausgesprochen werden:

Sind M_1, M_1'; M_2, M_2' und M_3, M_3' drei Paare entsprechender Punkte einer Punktinvolution, so ist:

$$(287)\quad (M_1 M_1' M_2)(M_1 M_1' M_2') - (M_1 M_1' M_3)(M_1 M_1' M_3') = o.$$

Sind (L_1), (L_1'); (L_2), (L_2') und (L_3), (L_3') drei Paar entsprechender Strahlen einer Strahleninvolution, so ist:

$$(L_1 L_1' L_2)(L_1 L_1' L_2') - (L_1 L_1' L_3)(L_1 L_1' L_3') = o. \quad (288)$$

Auf den Beweis dieses Satzes übergehend, mache ich die Annahme, dass die Gleichungen dieser drei Paare entsprechender Elemente gegeben erscheinen in der Form:

$$(e)\quad \begin{aligned} &m_1 = o,\ M_2 \equiv m_1 - \lambda_2 m_1' = o,\ M_3 \equiv m_1 - \lambda_3 m_1' = o\\ &m_1' = o,\ M_2' \equiv m_1 - \mu_2 m_1' = o,\ M_3' \equiv m_1 - \mu_3 m_1' = o, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &l_1 = o,\ L_2 \equiv l_1 - \lambda_2 l_1' = o,\ L_3 \equiv l_1 - \lambda_3 l_1' = o\\ &l_1' - o,\ L_2' \equiv l_1 - \mu_2 l_1' = o,\ L_3' \equiv l_1 - \mu_3 l_1' = o, \end{aligned}\quad (f)$$

worin die Symbole m_1, m_1' und l_1, l_1' definiert sind durch

$$m_1 = x_1 u + y_1 v + 1,\quad m_1' = x_1' u + y_1' v + 1,$$

$$l_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 + d_1,\quad l_1' = x\cos\alpha_1' + y\sin\alpha_1' + d_1',$$

mithin, zufolge § 16 und § 17,

$$(g)\quad \lambda_2 = (M_1 M_1' M_2),\ \mu_2 = (M_1 M_1' M_2'),\ \lambda_3 = (M_1 M_1' M_3),\ \mu_3 = (M_1 M_1' M_3')$$

$$\lambda_2 = (L_1 L_1' L_2),\ \mu_2 = (L_1 L_1' L_2'),\ \lambda_3 = (L_1 L_1' L_3),\ \mu_3 = (L_1 L_1' L_3')\quad (h)$$

ist. Nun gehen aber die Gleichungen (*e*) und (*f*) aus den vorhergehenden (276) dadurch hervor, dass man in den letzteren einfach U und V mit m_1 und m_1', beziehungsweise l_1 und l_1', vertauscht und hierauf $\lambda_1 = o$, $\mu_1 = \infty$ setzt. Dividiert man daher noch Gl. (278) durch den Parameter μ_1, wodurch selbe die Form annimmt

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & (1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}), & \frac{1}{\mu_1} \\ \lambda_2\mu_2, & (\lambda_2 + \mu_2), & 1 \\ \lambda_3\mu_3, & (\lambda_3 + \mu_3), & 1 \end{vmatrix} = o,$$

und setzt, im Sinne des eben Gesagten, $\lambda_1 = o$ und $\mu_1 = \infty$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} o, & 1, & o \\ \lambda_2\mu_2, & (\lambda_2 + \mu_2), & 1 \\ \lambda_3\mu_3, & (\lambda_3 + \mu_3), & 1 \end{vmatrix} = \lambda_3\mu_3 - \lambda_2\mu_2 = o,$$

welche Gleichung den obigen Satz bestätigt, wenn man noch für $\lambda_2 \ldots . \mu_3$ die in den Gleichungen (*g*) und (*h*) gegebenen Werte substituiert.

Zum Schlusse dieses Paragraphen mögen noch einige hiehergehörige Eigenschaften ebener Figuren vorgeführt werden, und beginnen wir zunächst mit der Begründung des Satzes:

Die aus einem Punkte O zu den drei Seiten eines Dreiseits gezogenen Parallelen und die aus demselben Punkte gezogenen Parallelen zu jenen Geraden, welche einen Punkt M_0 in der Ebene dieser Figur mit den drei Ecken der letzteren verbinden, bilden eine Strahleninvolution.

Dieser Satz kann mit Zuhilfenahme des früher in § 21 gegebenen Satzes von Ceva bewiesen werden. Denn sind (x_1), (x_2) und (x_3) die drei Seiten des Dreiseits (Fig. 59) und (x_1'), (x_2') und (x_3') die Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Ecken M_1, M_2 und M_3 mit dem Punkte M_0, so ist nach diesem Satze das Product:

$$(x_2\, x_3\, x_1')\, (x_3\, x_1\, x_2')\, (x_1\, x_2\, x_3') = +\, 1.$$

Anderseits ist aber, weil die durch O gelegten Strahlen (L_i) und (L_i') parallel erscheinen zu den Strahlen (x_i) und (x_i'), $(L_2\, L_3\, L_1') = (x_2\, x_3\, x_1')$, $(L_3\, L_1\, L_2') = (x_3\, x_1\, x_2')$

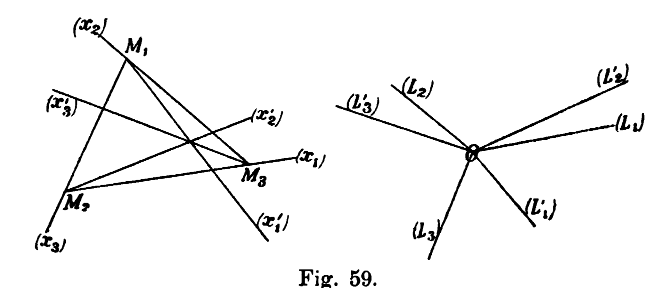


Fig. 59.

und $(L_1 L_2 L_3') = (x_1 x_2 x_3')$, mithin, zufolge der letzten Gleichungen, das Product

$$(L_2 L_3 L_1')\ (L_3 L_1 L_2')\ (L_1 L_2 L_3') = +\ 1,$$

womit wegen Gl. (281) die Richtigkeit des diesbezüglichen Satzes erwiesen erscheint.

Ebenso leicht lassen sich nun auch die auf das vollständige Viereck und Vierseit sich beziehenden Sätze über Involutionen herleiten. Diese Sätze lauten nämlich:

Bringt man die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks zum Schnitte mit einer Transversalen, so erhält man drei Paare entsprechender Punkte einer Punktinvolution.

Beweis. Die Gleichungen der vier Ecken P_i (Fig. 60) des vollständigen Vierecks seien $P_i \equiv A_i u + B_i v + C_i = o$, $i = 1, 2, 3, 4$, und u_0, v_0 die Coordinaten der Transversalen (L_0). Die Gleichungen der Punktpaare, in welchen die Seitenpaare dieses Vierecks von der Transversalen (L_0) geschnitten werden, sind dann nach § 14, Gl. (81):

Verbindet man die drei Eckenpaare eines vollständigen Vierseits durch Strahlen mit einem Punkte, so erhält man drei Paare entsprechender Strahlen einer Strahleninvolution.

Beweis. Die Gleichungen der vier Seiten (G_i) (Fig. 61) des vollständigen Vierseits seien $G_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = o$, $i = 1, 2, 3, 4$, und x_0, y_0 die Coordinaten des Punktes M_0. Die Gleichungen der Strahlenpaare, welche die Eckenpaare dieses Vierseits mit dem Punkte M_0 verbinden, lauten dann nach § 14, Gl. (82):

$$(i)\quad\begin{aligned}
M_1 &\equiv \frac{P_1}{P_1^{(o)}} - \frac{P_4}{P_4^{(o)}} = o,\\
M_2 &\equiv \frac{P_2}{P_2^{(o)}} - \frac{P_4}{P_4^{(o)}} = o,\\
M_3 &\equiv \frac{P_3}{P_3^{(o)}} - \frac{P_4}{P_4^{(o)}} = o,\\
M_1' &\equiv \frac{P_2}{P_2^{(o)}} - \frac{P_3}{P_3^{(o)}} = o,\\
M_2' &\equiv \frac{P_1}{P_1^{(o)}} - \frac{P_3}{P_3^{(o)}} = o,\\
M_3' &\equiv \frac{P_1}{P_1^{(o)}} - \frac{P_2}{P_2^{(o)}} = o,
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
L_1 &\equiv \frac{G_1}{G_1^{(o)}} - \frac{G_4}{G_4^{(o)}} = o,\\
L_2 &\equiv \frac{G_2}{G_2^{(o)}} - \frac{G_4}{G_4^{(o)}} = o,\\
L_3 &\equiv \frac{G_3}{G_3^{(o)}} - \frac{G_4}{G_4^{(o)}} = o,\\
L_1' &\equiv \frac{G_2}{G_2^{(o)}} - \frac{G_3}{G_3^{(o)}} = o,\\
L_2' &\equiv \frac{G_1}{G_1^{(o)}} - \frac{G_3}{G_3^{(o)}} = o,\\
L_3' &\equiv \frac{G_1}{G_1^{(o)}} - \frac{G_2}{G_2^{(o)}} = o,
\end{aligned}\quad(k)$$

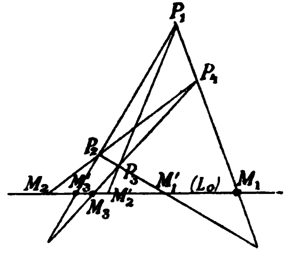


Fig. 60.

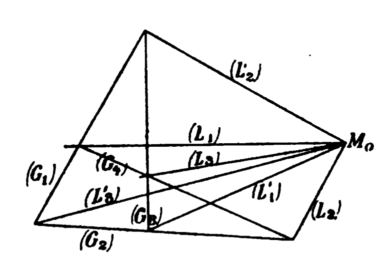


Fig. 61.

wenn man noch setzt

$$P_i^{(o)} = A_i u_o + B_i v_o + C_i, \quad | \quad G_i^{(o)} = A_i x_o + B_i y_o + C_i,$$

und hieraus folgt, wie man aus den obigen Gleichungen sofort erkennt,

$$M_1' = M_2 - M_3,\ M_2' = M_1 - M_3,\ M_3' = M_1 - M_2, \quad | \quad L_1' = L_2 - L_3,\ L_2' = L_1 - L_3,\ L_3' = L_1 - L_2,$$

weshalb man die Gleichungen (i) und (k) ersetzen kann durch:

$$\begin{aligned}
M_1 = o,\quad M_2 &= o,\quad M_3 = o,\\
M_1' \equiv M_2 - M_3 &= o,\\
M_2' \equiv M_3 - M_1 &= o,\\
M_3' \equiv M_1 - M_2 &= o.
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
L_1 = o,\quad L_2 &= o,\quad L_3 = o,\\
L_1' \equiv L_2 - L_3 &= o,\\
L_2' \equiv L_3 - L_1 &= o,\\
L_3' \equiv L_1 - L_2 &= o.
\end{aligned}$$

Aber auch diese Gleichungen können noch durch andere ersetzt werden, welche in dem vorliegenden Falle besser brauchbar erscheinen. Ist nämlich wieder $m_i = o$ die Gleichung des Punktes M_i in der Normalform und $l_i = o$

jene des Strahls (L_i) in der Hesse'schen Normalform, so bestehen zwischen den Gleichungspolynomen M_i und m_i, sowie L_i und l_i, nach den Paragraphen 9 und 10 die Beziehungen: $\varrho_i M_i = m_i$, $\varrho_i = \frac{1}{C_i}$ und $\varrho_i L_i = l_i$, $\varrho_i = \frac{1}{\pm\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}$, und daher ist es auch gestattet, für die Gleichungsgruppe (i) und (k) zu schreiben:

$m_1 = o, \quad m_2 = o, \quad m_3 = o$	$l_1 = o, \quad l_2 = o, \quad l_3 = o$
$M_1' \equiv \frac{m_2}{\varrho_2} - \frac{m_3}{\varrho_3} = o,$	$L_1' \equiv \frac{l_2}{\varrho_2} - \frac{l_3}{\varrho_3} = o,$
$M_2' \equiv \frac{m_3}{\varrho_3} - \frac{m_1}{\varrho_1} = o,$	$L_2' \equiv \frac{l_3}{\varrho_3} - \frac{l_1}{\varrho_1} = o,$
$M_3' \equiv \frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_2}{\varrho_2} = o,$	$L_3' \equiv \frac{l_1}{\varrho_1} - \frac{l_2}{\varrho_2} = o,$

aus welchen nach Gl. (95) in § 16 und Gl. (99) in § 17 sich ergibt

$(M_2 M_3 M_1') = \frac{\varrho_2}{\varrho_3},$	$(L_2 L_3 L_1') = \frac{\varrho_2}{\varrho_3},$
$(M_3 M_1 M_2') = \frac{\varrho_3}{\varrho_1},$	$(L_3 L_1 L_2') = \frac{\varrho_3}{\varrho_1},$
$(M_1 M_2 M_3') = \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$	$(L_1 L_2 L_3') = \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$

und hieraus

$(M_2 M_3 M_1')\,(M_3 M_1 M_2')\,(M_1 M_2 M_3') = +1,$	$(L_2 L_3 L_1')\,(L_3 L_1 L_2')\,(L_1 L_2 L_3') = +1,$

wodurch nach den Gleichungen (280) und (281) die Richtigkeit des Satzes constatiert erscheint.

Diese beiden eben gewonnenen Sätze können nun dazu benützt werden, um das sechste Element einer aus drei Paaren bestehenden Punkt- oder Strahleninvolution constructiv ausfindig zu machen, wenn die übrigen fünf Elemente gegeben sind. Der Weg, welcher hier einzuschlagen ist, erscheint für sich klar und soll daher nicht mehr besonders erörtert werden. Noch verdienen die beiden folgenden Sätze einer Erwähnung, die eine unmittelbare Folge der eben bewiesenen zwei Sätze sind.

Bringt man die drei Seiten $P_2 P_3$, $P_3 P_1$ und $P_1 P_2$ eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ zum Schnitte mit einer Transversalen, wodurch sich die Punkte M_1, M_2, M_3 ergeben, und bestimmt hierauf zu diesen die conjugierten Punkte M_1', M_2', M_3' einer Punktinvolution, so durchschneiden sich die Verbindungsgeraden $P_1 M_1'$, $P_2 M_2'$, $P_3 M_3'$ in einem und demselben Punkte.

Verbindet man die drei Ecken M_1, M_2, M_3 eines Dreiseits $(G_1)(G_2)(G_3)$ mit einem Punkte M_0 durch die Strahlen (L_1), (L_2), (L_3), und bestimmt hierauf zu diesen die conjugierten Strahlen (L_1'), (L_2'), (L_3') einer Strahleninvolution, so liegen die Schnittpunkte der Strahlenpaare (L_1') und (G_1), (L_2') und (G_2), (L_3') und (G_3) in einer und derselben Geraden (G_4).

§ 43. Construction der involutorischen Punktreihen und Strahlenbüschel.

1. Methode. Wir zeigen zunächst, in welcher Weise zwei involutorische Punktreihen vervollständigt werden, die gegeben erscheinen durch zwei Paare M_1, M_1' und M_2, M_2' entsprechender Punkte, d. h., wie zu einem beliebigen Punkte M des gemeinsamen Trägers der so bestimmten involutorischen Punktreihen der entsprechende Punkt M', sowie die beiden Doppelpunkte E, F und der Mittelpunkt G_0 der Involution, gefunden werden kann.

Behufs Lösung dieser Aufgabe lege man durch jedes Paar entsprechender Punkte M_1, M_1' und M_2, M_2' einen Kreis und verbinde die Schnittpunkte p_1 und p_2 dieser beiden Kreise, welche in der hierhergehörigen Figur 62 mit (K_1) und (K_2) bezeichnet wurden, durch eine Gerade (P), die den gemeinschaftlichen Träger (T) der Reihen in G_0 durchschneidet. Nach einer aus den Elementen der Geometrie bekannten Eigenschaft des Kreises ist nun: $G_0 p_1 \,.\, G_0 p_2 = G_0 M_1 \,.\, G_0 M_1'$ und $G_0 p_1 \,.\, G_0 p_2 = G_0 M_2 \,.\, G_0 M_2'$, mithin $G_0 M_1 \,.\, G_0 M_1' = G_0 M_2 \,.\, G_0 M_2'$, und hieraus folgt zufolge Gl. (272), dass G_0 der Mittelpunkt der Involution ist. Alsdann lege man aus M_0 Tangenten an die Kreise (K_1) und (K_2), welche diese in den Punkten $t_1 \ldots t_4$ berühren, die wieder insgesammt in einem und demselben

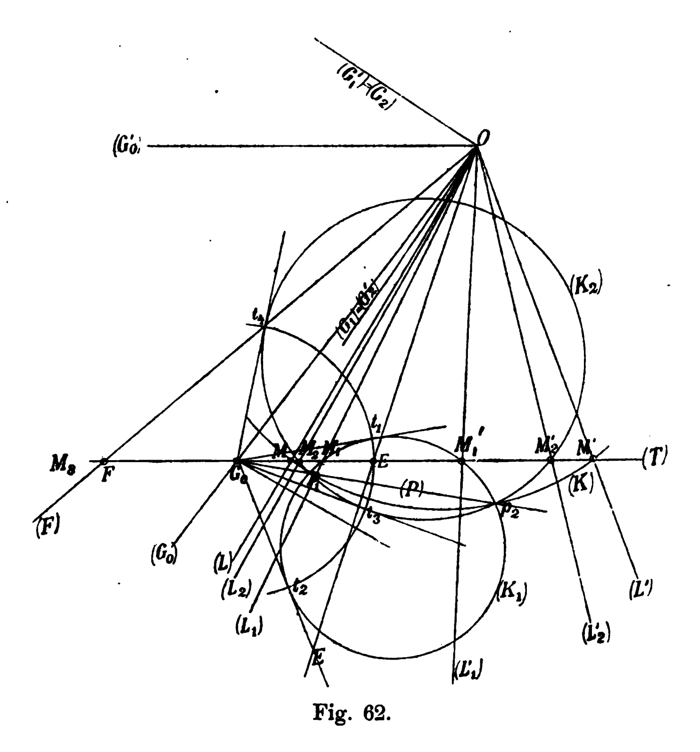


Fig. 62.

Kreise sich befinden vom Centrum G_0 und Radius $G_0 t_1$, und dieser Kreis durchschneidet (T) in den beiden Punkten E und F, welche gleichzeitig die zwei Doppelpunkte darstellen, indem $G_0 t_1{}^2 = G_0 E^2 = G_0 F^2 = G_0 p_1 . G_0 p_2$, demnach auch $G_0 E^2 = G_0 F^2 = G_0 M_1 . G_0 M_1{}' = G_0 M_2 . G_0 M_2{}'$ ist. Selbstverständlich erscheinen E und F nur dann reell, wenn die Punkte M_1 und $M_1{}'$ innerhalb — oder außerhalb — der Punkte M_2 und $M_2{}'$ zu liegen kommen. Ebenso einfach lässt sich jetzt zu einem beliebigen Punkte M von (T) der entsprechende Punkt M' ausfindig machen. Man lege zu diesem Zwecke bloß durch die Punkte M_1, $M_1{}'$ und M den in der Figur mit (K) bezeichneten Kreis, welcher den Träger (T) in dem gesuchten Punkte M' durchschneidet.

Es ist nun nicht schwer, zwei involutorische Strahlenbüschel zu vervollständigen, die gegeben erscheinen durch zwei Paare entsprechender Strahlen (L_1), $(L_1{}')$ und

(L_2), (L_2'). Man bringe nämlich diese zum Schnitte mit einer beliebigen Transversalen (T), wodurch man die Paare entsprechender Punkte M_1, M_1' und M_2, M_2' erhält, welche eine Punktinvolution bestimmen. Nun ermittle man in der eben angezeigten Weise den Mittelpunkt G_0 der Involution und die beiden Doppelpunkte E und F. Die durch den gemeinsamen Träger O beider Büschel und die Punkte E und F gelegten Strahlen (E) und (F) sind die beiden Doppelstrahlen der Strahleninvolution, während zugleich die beiden Winkelhalbierungslinien des Winkels (E, F) das rechtwinkelige Strahlenpaar der Involution repräsentieren. Nachdem übrigens G_0 und der unendlich ferne Punkt M_∞ von (T) ebenfalls ein Paar entsprechender Punkte sind, so stellen auch die Geraden (G_0) und (G_0'), von welchen erstere O mit G_0, letztere O mit M_∞ verbindet, ein Paar entsprechender Strahlen dar. Um endlich zu einem durch O gelegten Strahl (L) den entsprechenden (L') zu finden, suche man zu dem Schnittpunkte M von (L) mit (T) in der vorhin gezeigten Weise den entsprechenden Punkt M'; die Verbindungsgerade von O mit M' ist dann der gesuchte Strahl (L').

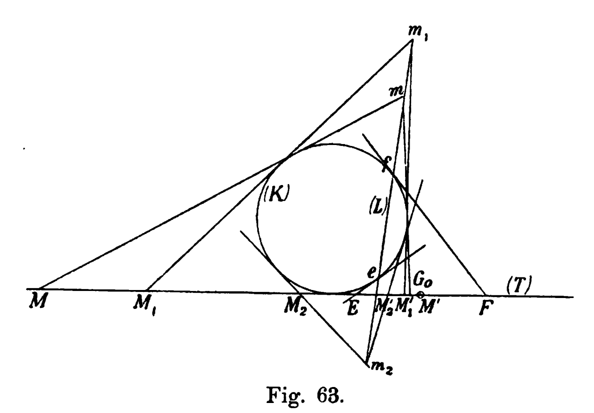


Fig. 63.

2. Methode. Um zwei involutorische Punktreihen zu vervollständigen, die gegeben erscheinen durch zwei Paare M_1, M_1' und M_2, M_2' entsprechender Punkte, verzeichne man einen Kreis (K) vom beliebig gewählten Centrum und

Radius (Fig. 63), welcher aber den gemeinsamen Träger (T) beider Reihen berührt, und lege hierauf durch die vier gegebenen Punkte Tangenten an diesen Kreis. Nachdem (T) eine durch die gegebenen Punkte gehende Tangente des Kreises ist, sind noch vier Tangenten möglich, und von diesen durchschneiden sich die durch M_1 und M_1' gehenden in m_1, die beiden anderen aber, welche den Punkten M_2 und M_2' angehören, in m_2, und die so gefundenen Schnittpunkte m_1 und m_2 bestimmen eine Gerade (L), welche den Kreis (K) in den Punkten e und f trifft. Der einem beliebigen Punkte M von (T) entsprechende Punkt M' ist jetzt sofort auffindbar. Man lege nämlich durch M die außer (T) noch mögliche Tangente an (K), welche die (L) in m trifft, und verzeichne durch den eben gefundenen Punkt ebenfalls die zweite noch mögliche Tangente an (K), die (T) in dem gesuchten Punkte M' durchschneidet, indem nach dieser Construction jedem Punkte M von (T) nur ein ganz bestimmter Punkt M' entspricht und diese beiden Punkte auch vertauschungsfähig sind. Selbstverständlich sind die Doppelpunkte E, F beider Reihen die Schnittpunkte der in e und f an den Kreis (K) gelegten Tangenten mit (T) und ist der Mittelpunkt G_0 der Strecke EF wieder das Centrum der Involution.

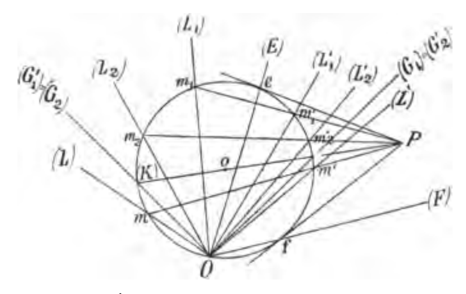


Fig. 64.

Ein ähnliches Verfahren ist nun bei der Strahleninvolution einzuschlagen. Man lege nämlich durch den gemeinsamen Mittelpunkt O beider Strahlenbüschel einen sonst ganz beliebig gewählten Kreis (K), welcher die beiden gegebenen Strahlen (L_1), (L_1') und (L_2), (L_2') in den Punkten

m_1, m_1' und m_2, m_2' trifft, und ziehe hierauf die Verbindungsgeraden $m_1\, m_1'$, $m_2\, m_2'$, die im Punkte P (Fig. 64) sich durchschneiden. Zu irgend einem durch O gehenden Strahl (L) wird jetzt der entsprechende (L') gefunden, indem man den Schnittpunkt m von (L) und (K) durch eine Gerade mit P verbindet und durch den anderen Schnittpunkt m' der letzteren und den Punkt O einen Strahl legt. Dieser Strahl ist identisch mit dem zu suchenden (L'), weil er den einzigen Strahl darstellt, der nach dieser Construction dem Strahl (L) entspricht und überdies beide Strahlen vertauschungsfähig erscheinen. Nachdem (L) und (L') nur dann zusammenfallen, wenn die Punkte m und m' identisch sind, hat man, behufs Auffindung der beiden Doppelstrahlen (E), (F), bloß durch den früher bestimmten Punkt P das Tangentenpaar an (K) zu legen und durch die beiden Berührungspunkte e, f dieser Tangenten mit (K) und den Punkt O zwei Strahlen zu legen. Es ist klar, dass die Doppelstrahlen nur dann reell erscheinen, wenn der Punkt P außerhalb des Kreises (K) sich befindet, was immer dann stattfindet, sobald (L_1) und (L_1') innerhalb — oder außerhalb — der Strahlen (L_2) und (L_2') sich befinden. Endlich lässt sich auch das rechtwinkelige Strahlenpaar $(G_1) = (G_2')$ und $(G_1') = (G_2)$ der Involution leicht ausfindig machen; man braucht zu diesem Zwecke bloß diejenigen Punkte mit O geradlinig zu verbinden, in welchen die durch den Mittelpunkt o von (K) und den Punkt P gelegte Gerade den Kreis (K) durchschneidet.

Capitel VIII.

Invarianten und Covarianten binärer Formen.

§ 44. Einleitung.

Die homogene Gleichung der algebraischen Curven von der Ordnung n lautet:

$$(a)\;.\quad a_0 x_3^n + (a_1 x_1 + b_1 x_2) x_3^{n-1} + (a_2 x_1^2 + 2 b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2) . x_3^{n-2} + \ldots + (a_n x_1^n + \binom{n}{1} b_n x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} c_n x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + l_n x_2^n) = o.$$

Um nun die Schnittpunkte dieser Curve mit der Seite (x_3) des Coordinatendreiecks zu bestimmen, hat man obige Gleichung mit jener $x_3 = o$ zu verbinden, weshalb die Coordinaten der fraglichen Schnittpunkte den beiden Gleichungen unterliegen:

$$x_3 = o,$$
$$a_n x_1 + \binom{n}{1} b_n x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} c_n x_1^{n-2} . x_2^2 + \ldots + l_n x_2^n = o,$$

Die homogene Gleichung der algebraischen Curven von der Classe n lautet:

$$\alpha_0 u_3^n + (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) u_3^{n-1} + (\alpha_2 u_1^2 + 2 \beta_2 u_1 u_2 + \gamma_2 u_2^2) u_3^{n-2} + \ldots + (\alpha_n u_1^n + \binom{n}{1} \beta_n u_1^{n-1} u_2 + \binom{n}{2} \gamma_n u_1^{n-2} u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_2^n) = o. \quad (b)$$

Um nun die Tangenten zu bestimmen, welche man durch die Ecke M_3 des Coordinatendreiecks an die Curve legen kann, hat man obige Gleichung mit jener $u_3 = o$ zu verbinden, weshalb die Coordinaten der fraglichen Tangenten den Gleichungen unterliegen:

$$u_3 = o$$
$$\alpha_n u_1^n + \binom{n}{1} \beta_n u_1^{n-} u_2 + \binom{n}{2} \gamma_n u_1^{n-2} u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_2^n = o,$$

welche auf die n linearen Gleichungspaare

$$(c)\;.\quad \begin{array}{l} x_1 - \lambda' x_2 = o,\; x_3 = o; \\ x_1 - \lambda'' x_2 = o,\; x_3 = o; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 - \lambda^{(n)} x_2 = o,\; x_3 = o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u_1 - \lambda' u_2 = o,\; u_3 = o; \\ u_1 - \lambda'' u_2 = o,\; u_3 = o; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 - \lambda^{(n)} u_2 = o,\; u_3 = o \end{array} \quad .(d)$$

zurückgeführt werden können, sobald $\lambda', \lambda'' \ldots \lambda^{(n)}$ die n Wurzeln der Gleichung

$$a_n\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \binom{n}{1} b_n \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} + \binom{n}{2} c_n \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + l_n = o \qquad (e)$$

$$\alpha_n\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^n + \binom{n}{1} \beta_n \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{n-1} + \binom{n}{2} \gamma_n \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_n = o \qquad (f)$$

bedeuten, und man ersieht hieraus gleichzeitig, dass

eine algebraische Curve $n$ter Ordnung von einer Geraden in n Punkten geschnitten wird, welche mit M', M'' .... $M^{(n)}$ bezeichnet werden sollen.

man durch einen Punkt an eine algebraische Curve $n$ter Classe n Tangenten legen kann, welche mit (T'), (T'') ..... $(T^{(n)})$ bezeichnet werden mögen.

Übergehend auf die geometrische Bedeutung der in der letzten Gleichung vorkommenden Coefficienten $\lambda^{(i)}$, denke man sich einen

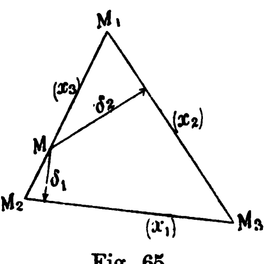


Fig. 65.

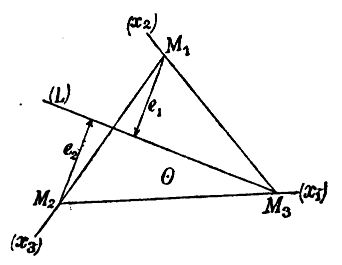


Fig. 66.

in der Geraden (x_3) liegenden Punkt M (Fig. 65) und nenne dessen Coordinaten x_1, x_2, x_3. Selbstverständlich ist $x_3 = o$, während nach den Gleichungen (144) und (145)

$$\varrho x_1 = \lambda_1 \delta_2 = \lambda_1 \, M M_2 \sin M_2,$$
$$\varrho x_2 = \lambda_2 \delta_2 = \lambda_2 \, M_1 M . \sin M_1$$

ist, wenn λ_1 und λ_2 die in § 25 gegebene Bedeutung haben, und hieraus folgt

$$\varrho x_1 = \varkappa_1 \, . \, M M_2,$$
$$\varrho x_2 = \varkappa_2 \, . \, M_1 M,$$

durch den Punkt M_3 (Fig. 66) gelegten Strahl (L) und nenne dessen Coordinaten u_1, u_2, u_3. Selbstverständlich ist $u_3 = o$, während nach den Gleichungen (148) und (149)

$$\sigma u_1 = \mu_1 e_1 = - \mu_1 . M_3 M_1 \sin (x_2, L), \quad \sigma u_2 = \mu_2 e_2 = \mu_2 . M_2 M_3 \sin (x_1 L),$$

wenn μ_1 und μ_2, die in § 26 gegebene Bedeutung haben, und hieraus folgt

$$\sigma u_1 = - \nu_1 \sin (x_2, L),$$
$$\sigma u_2 = \nu_2 \sin (x_1, L),$$

weshalb das Abstandsverhältnis des Punktes M, bezüglich der Punkte M_2 und M_1 als Grundpunkte, d. i.

$$(M_2 M_1 M) = - \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

wird. Nachdem nun für den Schnittpunkt $M^{(k)}$ der Curve $n$ter Ordnung mit der Geraden (x_3), zufolge Gl. (c), der Quotient $\frac{x_1}{x_2} = \lambda^{(k)}$ ist, wird auch für den Punkt $M^{(k)}$ das Abstandsverhältnis

$$(M_2 M_1 M^{(k)}) = - \frac{x_2}{x_1} \cdot \lambda^{(k)},$$

wodurch die geometrische Bedeutung des in Gl. (c) vorkommenden Coefficienten $\lambda^{(k)}$ definiert erscheint, und man erkennt, dass derselbe dem Abstandsverhältnisse des durch ihn bestimmten Punktes $M^{(k)}$, bezüglich M_2 und M_1 als Grundpunkte direct proportioniert ist. Das anharmonische Verhältnis der durch die Gleichungen

$$x_1 - \lambda' x_2 = o, \quad x_3 = o;$$
$$x_1 - \lambda'' x_2 = o, \quad x_3 = o;$$
$$x_1 - \lambda''' x_2 = o, \quad x_3 = o;$$
$$x_1 - \lambda^{IV} x_2 = o, \quad x_3 = o$$

bestimmten vier Schnittpunkte M', M'', M''', M^{IV} der Curve mit der Geraden (x_3) ist sonach, in Hinblick auf die in § 18 angestellten Betrachtungen:

weshalb das Abstandsverhältnis des Strahls (L), bezüglich der Strahlen (L_2) und (L_1) als Grundstrahlen, d. i.

$$(L_2 L_1 L) = - \frac{v_2}{v_1} \frac{u_1}{u_2}$$

wird. Nachdem nun für die Tangente $L^{(k)}$, gelegt durch den Punkt M_3 an die Curve $n$ter Classe, zufolge Gl. (d), der Quotient $\frac{u_1}{u_2} = \lambda^{(k)}$ ist, wird auch für den besagten Strahl das Abstandsverhältnis

$$(L_2 L_1 L^{(k)}) = - \frac{v_2}{v_1} \lambda^{(k)},$$

wodurch die geometrische Bedeutung des in Gl. (d) vorkommenden Coefficienten $\lambda^{(k)}$ definiert erscheint, und man erkennt, dass derselbe dem Abstandsverhältnisse des durch ihn bestimmten Strahls $(L^{(k)})$, bezüglich (L_2) und (L_1) als Grundstrahlen direct proportioniert ist. Das anharmonische Verhältnis der durch die Gleichungen

$$u_1 - \lambda' u_2 = o, \quad u_3 = o;$$
$$u_1 - \lambda'' u_2 = o, \quad u_3 = o;$$
$$u_1 - \lambda''' u_2 = o, \quad u_3 = o;$$
$$u_1 - \lambda^{IV} u_2 = o, \quad u_3 = o$$

bestimmten vier Tangenten (L'), (L''), (L'''), (L^{IV}), gelegt durch den Punkt M_3 an die Curve, ist sonach, in Hinblick auf die in § 18 angestellten Betrachtungen:

$(M' M'' M''' M^{IV}) = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda'' - \lambda'''} : \frac{\lambda' - \lambda^{IV}}{\lambda'' - \lambda^{IV}}.$ | $(L' L'' L''' L^{IV}) = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda'' - \lambda'''} : \frac{\lambda' - \lambda^{IV}}{\lambda'' - \lambda^{IV}}.$

Aus den bisherigen Untersuchungen ersieht man gleichzeitig, dass die Gleichung:

(289) $f(x_1, x_2) = o$, | $f(u_1\ u_2) = o$, (290)

in welcher der links vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck eine homogene Function $n$ten Grades von x_1 und x_2, beziehungsweise u_1 und u_2, oder eine binäre Form $n$ter Ordnung mit der Veränderlichen x_1 und x_2, beziehungsweise u_1 und u_2 ist, im Vereine mit der Gleichung

$x_3 = o$ eine Gruppe von n in der Geraden (x_3) liegenden Punkten darstellt. | $u_3 = o$ eine Gruppe von n durch den Punkt M_3 gehenden Strahlen darstellt.

Nachdem übrigens die Gleichung

$f(x_1, x_2) \equiv a x_1^n + \binom{n}{1} b x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} c x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + l x_2^n = o$ | $f(u_1, u_2) \equiv a u_1^n + \binom{n}{1} b u_1^{n-1} u_2 + \binom{n}{2} c u_1^{n-2} u_2^2 + \ldots + l u_2^n = o$

in die n linearen Gleichungen aufgelöst werden kann

(289_a) $x_1 - \lambda' x_2 = o,\ x_1 - \lambda'' x_2 = o \ldots x_1 - \lambda^{(n)} x_2 = o,$ | $u_1 - \lambda' u_2 = o,\ u_1 - \lambda'' u_2 = o \ldots u_1 - \lambda^{(n)} u_2 = o,$ (290_a)

worin $\lambda', \lambda'' \ldots \lambda^{(n)}$ die n Wurzeln der Gleichung

$$a\xi^n + \binom{n}{1} b \xi^{n-1} + \binom{n}{2} c \xi^{n-2} + \ldots + l = o$$

bezeichnen, so repräsentiert die Gleichung

(289) allein n durch den Punkt $(x_1 = o,\ x_2 = o)$ gehende Strahlen (L'), (L''), $(L''') \ldots (L^{(n)})$, und ist nach § 30 das Doppelverhältnis der durch die vier ersten Gleichungen (289_a) dargestellten Strahlen gleich

$(L' L'' L''' L^{IV}) = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda'' - \lambda'''} : \frac{\lambda' - \lambda^{IV}}{\lambda'' - \lambda^{IV}}.$

(290) allein n in der Geraden $(u_1 = o,\ u_2 = o)$ liegende Punkte $M', M'', M''' \ldots M^{(n)}$, und ist nach § 30 das Doppelverhältnis der durch die vier ersten Gleichungen (290_a) dargestellten Punkte gleich

$(M' M'' M''' M^{IV}) = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda' - \lambda'''} : \frac{\lambda' - \lambda^{IV}}{\lambda'' - \lambda^{IV}}.$

§ 45. Die binären quadratischen Formen.

Nach dem, was in § 44 soeben gezeigt wurde, ist das geometrische Äquivalent der Gleichung

(291) $f(u_1, u_2) \equiv a u_1^2 + 2 b u_1 u_2 + c u_2^2 = o$ ein Punktpaar, dessen Elemente in der Verbindungsgeraden der beiden Punkte $u_1 = o$ und $u_2 = o$ liegen.	$f(x_1, x_2) \equiv a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 = o$ .... (292) ein Strahlenpaar, dessen Elemente durch den Schnittpunkt der Geraden $x_1 = o$ und $x_2 = o$ gehen.

Um dieselbe Rechnung nicht zweimal durchführen zu müssen, ersetze man die beiden obigen Gleichungen durch jene

$$(a) \qquad f(\xi_1, \xi_2) \equiv a \xi_1^2 + 2 b \xi_1 \xi_2 + c \xi_2^2 = o,$$

in welcher ξ_1, ξ_2 für das Punktpaar Liniencoordinaten, für das Strahlenpaar aber Punktcoordinaten bedeuten. Selbstverständlich kann man obige Gleichung wieder zerlegen in die zwei linearen Gleichungen:

$$(b) \qquad \xi_1 - \lambda' . \xi_2 = o, \quad \xi_1 - \lambda'' . \xi_2 = o,$$

wenn λ' und λ'' die beiden Wurzeln der in ξ quadratischen Gleichung

$$(c) \qquad a \xi^2 + 2 b \xi + c = o$$

darstellen, und sind (*b*) gleichzeitig die Gleichungen der zwei in Gl. (*a*) enthaltenen Elemente (Punkte oder Strahlen) des Paars. Zwischen den Wurzeln λ', λ'' und den drei Coefficienten a, b und c bestehen noch die Beziehungen:

$$(d) \qquad \lambda' + \lambda'' = -\frac{2b}{a}, \qquad \lambda' \lambda'' = \frac{c}{a}.$$

Es drängt sich jetzt die Frage heran, wann fallen die durch Gl. (*a*) bestimmten zwei Elemente zusammen. Offenbar tritt dieser Fall dann ein, wenn $\lambda' = \lambda''$ ist, d. h. Gl. (c) eine Doppelwurzel besitzt, was jedoch bekanntlich bedingt,***) dass die Discriminante der binären Form $f(\xi_1, \xi_2)$ verschwindet. Nun erhält man aber die Discriminante der binären Form $f(\xi_1, \xi_2)$, sobald man ξ_1 und ξ_2 aus den beiden partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = o$ und $\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = o$ eliminiert, wo-

***) Siehe: Gordan, die Invariantentheorie; Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen; Baltzer, die Theorie und Anwendung der Determinanten.

durch sich eine Gleichung von der Form $\psi(a, b, c) = o$ ergibt, in welcher die links vom Gleichheitszeichen stehende Function diese Discriminante repräsentiert. Zufolge Gl. (a) ist aber $\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = 2\ (a\xi_1 + b\xi_2)$ und $\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = 2(b\xi_1 + c\xi_2)$, und hat man sonach ξ_1 und ξ_2 aus den beiden linearen Gleichungen

$$a\xi_1 + b\xi_2 = o$$
$$b\xi_1 + c\xi_2 = o$$

zu eliminieren, wodurch man nach der Theorie der Determinanten erhält:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = o.$$

Die Discriminante der binären Form $f(\xi_1, \xi_2)$ ist folglich $I = ac - b^2$, und muss daher, wenn die durch Gl. (a) dargestellten zwei Elemente zusammenfallen sollen, zwischen den in dieser Gleichung vorkommenden drei Coefficienten a, b und c die Bedingung obwalten:

$$(293) \quad . \quad . \quad . \qquad I \equiv ac - b^2 = o.$$

Es ist klar, dass dann auch Gl. (291) einen Doppelpunkt und Gl. (292) einen Doppelstrahl angibt. Nach einem bekannten Satze der Invariantentheorie ist aber die Discriminante einer binären Form auch gleichzeitig eine Invariante der letzteren und deshalb ist auch $I = ac - b^2$ eine Invariante der binären Form $f(\xi_1, \xi_2)$.

Für die folgenden Probleme erscheint es geboten, das Doppelverhältnis der durch die zwei quadratischen Gleichungen

(294) $f(u_1, u_2) \equiv a u_1^2 + 2b\, u_1 u_2 + c u_2^2 = o,$ $\varphi(u_1, u_2) \equiv a' u_1^2 + 2b'\, u_1 u_2 + c' u_2^2 = o$	$f(x_1, x_2) \equiv a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 = o,$ $\varphi(x_1, x_2) \equiv a' x_1^2 + 2b' x_1 x_2 + c' x_2^2 = o$
gegebenen zwei Punktpaare M', M'' und M''', M^{IV}	gegebenen zwei Strahlenpaare (L'), (L'') und (L'''), (L^{IV})

zu ermitteln.

Sind nun wieder λ', λ'' und λ''', λ^{IV} die Wurzeln der zwei quadratischen Gleichungen

$$a\xi^2 + 2b\xi + c = o,$$
$$a'\xi^2 + 2b'\xi + c' = o,$$

so lauten die Gleichungen dieser vier Punkte, beziehungsweise Strahlen:

$$u_1 - \lambda' u_2 = o,\; u_1 - \lambda'' u_2 = o, \quad\Big|\quad x_1 - \lambda' x_2 = o,\; x_1 - \lambda'' x_2 = o,$$
$$u_1 - \lambda''' u_2 = o,\; u_1 - \lambda^{IV} u_2 = o \quad\Big|\quad x_1 - \lambda''' x_2 = o,\; x_1 - \lambda^{IV} x_2 = o$$

und ist, wenn man das fragliche Doppelverhältnis

$$(M' M'' M''' M^{IV}) = K \quad\Big|\quad (L' L'' L''' L^{IV}) = K$$

setzt, offenbar (§ 44)

$$K = \frac{\lambda' - \lambda''}{\lambda'' - \lambda'''} : \frac{\lambda' - \lambda^{IV}}{\lambda'' - \lambda^{IV}},$$

mithin auch der Bruch

$$\frac{1+K}{1-K} = -\frac{2(\lambda'\lambda'' + \lambda'''\lambda^{IV}) - (\lambda' + \lambda'')(\lambda''' + \lambda^{IV})}{(\lambda' - \lambda'')(\lambda''' - \lambda^{IV})}.$$

Bedenkt man noch, dass nach den früher gegebenen Gleichungen (d) die Beziehungen bestehen: $\lambda' \lambda'' = \frac{c}{a}$, $\lambda''' . \lambda^{IV} = \frac{c'}{a'}$, $\lambda' + \lambda'' = -\frac{2b}{a}$, $\lambda''' + \lambda^{IV} = -\frac{2b'}{a'}$, und ferner $\lambda' - \lambda'' = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$, $\lambda''' - \lambda^{IV} = \frac{2\sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'}$ ist, so ergibt sich nach einigen einfachen algebraischen Operationen zur Berechnung von K die Gleichung:

$$(296)\;.\;.\quad \frac{1+K}{1-K} = \frac{-ac' + 2bb' - a'c}{2\sqrt{b^2 - ac}\,.\,\sqrt{b'^2 - a'.c'}}.$$

Jetzt ist man aber auch gleichzeitig in der Lage, die Bedingung anzugeben, welcher die Coefficienten a, b, c und a', b', c' unterworfen sind, damit die durch die Gleichungen (294) oder (295) angegebenen Punktpaare oder Strahlenpaare harmonisch sind. Nachdem nämlich dann das Doppelverhältnis $K = -1$ sein muss, so unterliegen, zufolge obiger Gleichung, die sechs Coefficienten a bis c' der Bedingung:

$$(297)\;.\;.\;.\quad ac' - 2bb' + a'c = o,$$

und diese muss demnach erfüllt erscheinen, wenn die Gleichungen (294) zwei harmonische Punktpaare und jene (295) zwei harmonische Geradenpaare bestimmen. Der links vom Gleichheitszeichen in Gl. (297) vorkommende Ausdruck ist übrigens eine simultane Invariante der beiden binären Formen $f(\xi_1, \xi_2)$ und $\varphi(\xi_1, \xi_2)$. Denn ist I eine Invariante der binären Form $f(\xi_1, \xi_2) = a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$, so

lehrt die Invariantentheorie***), dass der Ausdruck $\frac{\partial I}{\partial a} \cdot a' + \frac{\partial I}{\partial b} \cdot b' + \frac{\partial I}{\partial c} \cdot c'$ eine simultane Invariante der beiden binären Formen $f(\xi_1, \xi_2) = a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$ und $\varphi(\xi_1, \xi_2) = a'\xi_1^2 + 2b'\xi_1\xi_2 + c'\xi_2^2$ darstellt. Nun ist aber, wie soeben gezeigt wurde, $I = ac - b^2$ eine Invariante von $f(\xi_1, \xi_2)$, daher ist auch $ca' - 2bb' + ac'$ eine simultane Invariante der beiden binären Formen $f(\xi_1, \xi_2)$ und $\varphi(\xi_1, \xi_2)$, wie behauptet wurde.

Leicht lässt sich nunmehr die Gleichung eines dritten Punktpaars oder Strahlenpaars angeben, welches zu einem jeden der durch die beiden Gleichungen (294) oder (295) gegebenen Elementenpaaren harmonisch ist. Nennt man zu diesem Zwecke

$a''u_1^2 + 2b''u_1u_2 + c''u_2^2 = o$ ¦ $a''x_1^2 + 2b''x_1x_2 + c''x_2^2 = o$

die Gleichung eines dritten Paars, so hat man aus derselben und den beiden folgenden

$$a''c - 2b''b + c''a = o$$
$$a''c' - 2b''b' + c''a' = o$$

bloß die drei unbekannten Coefficienten a'', b'' und c'' zu eliminieren, wodurch man erhält

$$(298) \quad \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_2^2 \\ c & -b & a \\ c' & -b' & a' \end{vmatrix} = o$$

als Gleichung desjenigen Punktpaars, welches zu einem jeden der beiden Punktpaare, die durch die Gleichungen (294) gegeben sind, harmonisch ist. Gleichzeitig ist dies die Gleichung der beiden tautologen Punkte der durch die Gleichungen (294) bestimmten Punktinvolution.

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ c & -b & a \\ c' & -b' & a' \end{vmatrix} = o \quad (299)$$

als Gleichung desjenigen Strahlenpaars, welches zu einem jeden der beiden Strahlenpaare, welche durch die Gleichungen (295) gegeben sind, harmonisch ist. Gleichzeitig ist dies die Gleichung der beiden tautologen Strahlen der durch die Gleichungen (295) bestimmten Strahleninvolution.

***) Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen.

Aufgabe. Ein Geradenpaar erscheint gegeben durch die Gleichung

$$(300) \;.\;.\quad f(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 = o,$$

es ist nun zu bestimmen derjenige Winkel, den die durch diese Gleichung angegebenen zwei Strahlen mit einander einschließen, sowie die Gleichung der beiden Winkelhalbierungslinien der hier betrachteten Strahlen.

Lösung. Die Gleichung (300) bestimmt zwei Strahlen (L') und (L''), welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $x = o$ und $y = o$, d. h. durch den Ursprung O des hier vorausgesetzten rechtwinkeligen Coordinatensystems gehen. Setzt man nun $m' = \operatorname{tg}(x, L')$ und $m'' = \operatorname{tg}(x, L'')$, so ergeben sich m' und m'' als die Wurzeln der in m quadratischen Gleichung:

$$cm^2 + 2bm + a = o,$$

und ist daher

$$m' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}, \qquad m'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{c},$$

mithin nach Gl. (64)

$$(301) \;.\;.\;.\quad \operatorname{tg}(L'', L') = 2\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a + c},$$

wodurch der erste Theil vorliegender Aufgabe gelöst erscheint. Die letzte Gleichung lässt erkennen, dass die durch Gl. (300) gegebenen zwei Strahlen auf einander senkrecht stehen, sobald $a + c = o$ ist.

Nun kann man aber auch die Gleichungen der beiden Winkelhalbierungslinien (H') und (H'') ohneweiters aufstellen. Nachdem nämlich die Gleichungen der durch Gl. (300) gegebenen Geraden in der Hesse'schen Normalform lauten: $\frac{y - m'x}{\sqrt{1 + m'^2}} = o$ und $\frac{y - m''x}{\sqrt{1 + m''^2}} = o$, so sind, zufolge Gl. (100) in § 17

$$H' \equiv \frac{y - m'x}{\sqrt{1 + m'^2}} + \frac{y - m''x}{\sqrt{1 + m''^2}} = o \text{ und } H'' \equiv \frac{y - m'x}{\sqrt{1 + m'^2}} - \frac{y - m''x}{\sqrt{1 + m''^2}} = o$$

die Gleichungen von (H') und (H''), und dieselben sind gleichzeitig enthalten in der quadratischen Gleichung:

$$(m' + m'')(x^2 - y^2) + 2(m' . m'' - 1)\, xy = o,$$

wie man sich sofort überzeugt, wenn man die beiden obigen Gleichungen mit einander multipliciert. Weil aber $m' + m'' = -\frac{2b}{c}$ und $m' . m'' = \frac{a}{c}$ ist, so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

(302) . . $$b x^2 + (c - a)\, xy - b y^2 = o,$$

wodurch die Winkelhalbierungslinien der durch Gl. (300) gegebenen Geraden analytisch bestimmt erscheinen.

Satz. Das Doppelverhältnis von zwei Strahlen, welche den Winkel ψ einschließen, und die aus ihrem Schnittpunkte nach den beiden imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen ist constant und gleich $e^{-2i\psi}$

Beweis. Wie in § 40 bereits gezeigt wurde, lauten die Gleichungen der beiden durch den Ursprung O gehenden Strahlen (E), (F), deren unendlich fernen Punkte mit den beiden imaginären Kreispunkten ε und φ identisch sind, $y - ix = o$ und $y + ix = o$, dagegen sind die Gleichungen zweier Strahlen (L) und (L'), welche ebenfalls durch den Ursprung gehen und den Winkel $(L, L') = \psi$ einschließen, $y - x \operatorname{tg} \alpha = o$ und $y - x \operatorname{tg}(\alpha + \psi) = o$; es ist daher auch

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 = o$$

die Gleichung der beiden Strahlen (E) und (F) und

$$\varphi(x, y) \equiv \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{tg}(\alpha + \psi) . x^2 - [\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + \psi)]\, xy + y^2 = o$$

jene der beiden anderen (L) und (L'). Das Doppelverhältnis $K = (EFLL')$ ist demnach, zufolge der Gl. (296), weil in dem vorliegenden Fall $a = 1$, $b = o$, $c = 1$ und $a' = \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{tg}(\alpha + \psi)$, $b' = -\frac{1}{2}[\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + \psi)]$, $c' = 1$ ist, zu berechnen aus:

$$\frac{1 + K}{1 - K} = \frac{1}{i . \operatorname{tg} \psi},$$

und hieraus folgt in der That:

(303) $$(EFLL') = \frac{1 - i \operatorname{tg} \psi}{1 + i \operatorname{tg} \psi} = \frac{\cos \psi - i \sin \psi}{\cos \psi + i \sin \psi} = e^{-2i\psi}.$$

In dem speciellen Fall, wo der Winkel $(L, L') = \frac{\pi}{2}$ ist,

wird daher auch das Doppelverhältnis

$$(EFLL') = -1,$$

und hieraus ersieht man, dass zwei auf einander senkrechte Strahlen (L), (L') und die beiden durch ihren Schnittpunkt gelegten, nach den beiden imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen (E), (F) harmonisch sind. Es sind deshalb auch die unendlich fernen Punkte der beiden Scheitel eines rechten Winkels und die beiden imaginären Kreispunkte harmonisch.

§ 46. Quadratische Punkt- und Strahleninvolution.

Eine Punktinvolution erscheint nach dem in § 41 bereits Vorgeführten bestimmt durch zwei Paare entsprechender Punkte. Sind nun

$$(304)\quad f(u_1, u_2) \equiv a u_1^2 + 2 b u_1 u_2 + c u_2^2 = o,\ \varphi(u_1 u_2) \equiv a' u_1^2 + 2 b' u_1 u_2 + c' u_2^2 = o$$

Eine Strahleninvolution erscheint nach dem in § 41 bereits Vorgeführten bestimmt durch zwei Paare entsprechender Strahlen. Sind nun

$$f(x_1, x_2) \equiv a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 = o,\ \varphi(x_1, x_2) \equiv a' x_1^2 + 2 b' x_1 x_2 + c' x_2^2 = o \quad (305)$$

die Gleichungen dieser beiden Punktpaare, beziehungsweise Strahlenpaare, während λ einen veränderlichen Parameter darstellt, so ist:

$$(306)\quad f(u_1, u_2) + \lambda \varphi(u_1, u_2) \equiv (a + \lambda a') u_1^2 + 2 (b + \lambda b') u_1 u_2 + (c + \lambda c') u_2^2 = o$$

die Gleichung einer Punktinvolution, bestimmt durch die beiden obigen Punktpaare, und es liegen sämmtliche Punkte der Involution auf der Geraden $(u_1 = o, u_2 = o)$. Um nun zu einem Punkte $u_1 - \mu' u_2 = o$ den entsprechenden zu finden, hat man zunächst in der Gleichung

$$f(x_1, x_2) + \lambda \varphi(x_1, x_2) \equiv (a + \lambda a') x_1^2 + 2 (b + \lambda b') x_1 x_2 + (c + \lambda c') x_2^2 = o \quad (307)$$

die Gleichung einer Strahleninvolution, bestimmt durch die beiden obigen Strahlenpaare, und es gehen sämmtliche Strahlen der Involution durch den Punkt $(x_1 = o, x_2 = o)$. Um nun zu einem Strahl $x_1 - \mu' x_2 = o$ den entsprechenden zu finden, hat man zunächst in der Gleichung

$$(a + \lambda a') \xi^2 + 2 (b + \lambda b') \xi + (c + \lambda c') = o$$

$\xi = \mu'$ zu setzen und hierauf dieselbe nach λ aufzulösen. Man erhält dadurch einen speciellen Wert des Parameters λ, welcher in Gleichung

(304) substituiert, zwei einander entsprechende Punkte bestimmt, von welchen der eine der gegebene Punkt $u_1 - \mu' u_2 = o$ ist. Es entspricht somit jedem Punkte auf der Geraden ($u_1 = o$, $u_2 = o$) ein ganz bestimmter Punkt, und sind diese zwei Punkte vertauschungsfähig, wie die Punktinvolution es erfordert. Daher ist (306) in der That die Gleichung einer Punktinvolution, bestimmt durch die in den Gleichungen (304) angegebenen zwei Paare entsprechender Punkte, und weil die Gleichung (306) in Bezug auf die Veränderlichen u_1 und u_2 vom zweiten Grade ist, nennt man insbesondere diese Punktinvolution eine quadratische, um sie von der später folgenden Punktinvolution höherer Ordnung zu unterscheiden.

(305) substituiert, zwei einander entsprechende Strahlen bestimmt, von welchen der eine der gegebene Strahl $x_1 - \mu' x_2 = o$ ist. Es entspricht somit jedem durch den Punkt ($x_1 = o$, $x_2 = o$) gelegten Strahl ein ganz bestimmter Strahl, und sind dieselben vertauschungsfähig, wie die Strahleninvolution es erfordert. Daher ist (307) in der That die Gleichung einer Strahleninvolution, bestimmt durch die in den Gleichungen (305) angegebenen zwei Paare entsprechender Strahlen, und weil die Gleichung (307) in Bezug auf die Veränderlichen x_1 und x_2 vom zweiten Grade ist, nennt man insbesondere diese Strahleninvolution eine quadratische, um sie von der später folgenden Strahleninvolution höherer Ordnung zu unterscheiden.

Nachdem übrigens die 3^2elementige Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ (a + \lambda a') & (b + \lambda b') & (c + \lambda c') \end{vmatrix} = o$$

ist, repräsentiert die quadratische Gleichung

$$\psi(u_1, u_2) \equiv a'' u_1^2 + 2b'' u_1 u_2 + c'' u_2^2 = o$$

dann ein Paar entsprechender Punkte der durch die

$$\psi(x_1, x_2) \equiv a'' x_1^2 + 2b'' x_1 x_2 + c'' x_2^2 = o$$

dann ein Paar entsprechender Strahlen der durch die

beiden Punktpaare in Gl. (304) bestimmten Punktinvolution,

beiden Strahlenpaare in Gl. (305) bestimmten Strahleninvolution,

wenn die drei Coefficienten a'', b'', c'' der Bedingung genügen

$$(308) \quad \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = o.$$

Doppelpunkte. Behufs Bestimmung der Doppelpunkte der durch die Gleichung (306) gegebenen Punktinvolution, hat man die Discriminante der binären Form

Doppelstrahlen. Behufs Bestimmung der Doppelstrahlen der durch die Gleichung (307) gegebenen Strahleninvolution, hat man die Discriminante der binären Form

$$f(\xi_1, \xi_2) + \lambda\varphi(\xi_1, \xi_2) = (a + \lambda a')\xi_1^2 + 2(b + \lambda b')\xi_1\xi_2 + (c + \lambda c')\xi_2^2$$

zu berechnen und hierauf diese gleich null zu setzen, wodurch man die in λ quadratische Gleichung erhält

$$\begin{vmatrix} (a + \lambda a') & (b + \lambda b') \\ (b + \lambda b') & (c + \lambda c') \end{vmatrix} = o.$$

Durch die Substitution der Wurzeln λ' und λ'' der letzten Gleichung in jene (306), beziehungsweise (307), erhält man sodann die Gleichungen der beiden tautologen Elemente selbst, und ist damit gleichzeitig wieder der Beweis erbracht, dass eine quadratische Punkt- oder Strahleninvolution im allgemeinen zwei tautologe Elemente besitzt. Man kann jedoch die Gleichungen dieser Doppelelemente auch direct angeben, wenn man bedenkt, dass die letzte Gleichung erhalten wird durch die Elimination von ξ_1 und ξ_2 aus den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} = o,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} = o,$$

und erkennt sonach ohne Schwierigkeit, dass die Gleichung der beiden Doppelelemente

der durch (306) gegebenen Punktinvolution ist:

der durch (307) gegebenen Strahleninvolution ist:

$$(309)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \end{vmatrix} = o. \qquad\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = o. \quad (310)$$

Die links vom Gleichheitszeichen erscheinende Determinante ist die Jacobi'sche Determinante der beiden binären Formen f und φ und gleichzeitig eine simultane Covariante der letzteren. Die beiden obigen Gleichungen **können auch** ersetzt werden durch

$$\begin{vmatrix} u_1^2, & u_1 u_2, & u_2^2 \\ c, & -b, & a \\ c', & -b', & a' \end{vmatrix} = o, \qquad\qquad \begin{vmatrix} x_1^2, & x_1 x_2, & x_2^2 \\ c, & -b, & a \\ c', & -b', & a' \end{vmatrix} = o,$$

und hieraus folgt, wie ein Blick auf die Gleichungen (298) und (299) zeigt, dass ein jedes der beiden gegebenen Paare $f = o$ und $\varphi = o$ mit den beiden tautologen Elementen harmonisch ist. Es lässt sich aber auch leicht nachweisen, dass dies von jedem Paar entsprechender Elemente und den beiden tautologen Elementen der Involution gilt. Denn nach dem Vorhergehenden ist ja $(ab' - a'b)\, \xi_1^2 + (ac' - a'c)\xi_1\xi_2 + (bc' - b'c)\xi_2^2 = o$ die Gleichung der beiden tautologen Elemente der durch

$$(a + \lambda a')\xi_1^2 + 2(b + \lambda b')\xi_1\xi_2 + (c + \lambda c')\xi_2^2 = o$$

dargestellten Punkt- oder Strahleninvolution und aus den hierin vorkommenden Coefficienten ersieht man leicht, dass die durch Gl. (297) gegebene Bedingung erfüllt erscheint, u. zw. für jeden Wert des Parameters λ.

Aufgabe. Es ist die Gleichung eines Elementenpaars ausfindig zu machen, welches mit den beiden Elementenpaaren $a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 = o$, $a'\xi_1^2 + 2b'\xi_1\xi_2 + c'\xi_2^2 = o$, sowie mit jenen $a''\xi_1^2 + 2b''\xi_1\xi_2 + c''\xi_2^2 = o$, $a'''\xi_1^2 + 2b'''\xi_1\xi_2 + c'''\xi_2^2 = o$ in Involution ist.

Lösung. Die Gleichung des fraglichen Elementenpaars wird jedenfalls von der Form sein

$$\alpha\xi_1^2 + 2\beta\xi_1\xi_2 + \gamma\xi_2^2 = o,$$

und müssen die hier vorkommenden Coefficienten nach Gl. (308) den Bedingungen genügen:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = o,$$

und aus den drei letzten eben aufgestellten Gleichungen folgt schließlich durch die Elimination von α, β und γ

$$(311) \quad \begin{vmatrix} (b c' - b' c) & (a' c - a c') & (a b' - a' b) \\ (b'' c''' - b''' c'') & (a''' c'' - a'' c''') & (a'' b''' - a''' b'') \\ \xi_1^2 & 2 \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 \end{vmatrix} = o$$

als die gesuchte Gleichung des fraglichen Elementenpaars.

Mittelst der Gleichungen (304) und (305) haben wir eine Reihe von bekannten Sätzen über quadratische Involutionen hergeleitet und es folgen hier noch einige andere Sätze, welche zwar ebenfalls bereits in dem vorigen Capitel gegeben erscheinen, hier aber noch einmal bewiesen werden, um noch einige Anwendungen dieser Gleichungen zu zeigen.

Bekanntlich bestimmen die beiden Gleichungen

$$(a) \quad f(u) \equiv a u^2 + 2 b u + c = o, \quad \varphi(u) \equiv a' u^2 + 2 b' u + c' = o$$

zwei Punktpaare M_1, M_1' und M_2, M_2', liegend in der Achse der x, und ist ferner, sobald λ einen veränderlichen Parameter bedeutet,

$$(b) \, f(u) + \lambda . \varphi(u) \equiv (a + \lambda a') u^2 + 2 (b + \lambda b') u + (c + \lambda c') = o$$

die Gleichung einer quadratischen Punktinvolution, bestimmt durch die Elementenpaare M_1, M_1' und M_2, M_2'. Löst man nun die erste der Gleichungen (a) nach u auf, so erhält man $u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - a c}}{a}$, und ist daher, zufolge der bekannten Bedeutung von u, $O M_1 = \frac{a}{b - \sqrt{b^2 - a c}}$ und $O M_1' = \frac{a}{b + \sqrt{b^2 - a c}}$, wenn wieder O den Ursprung des hier vorausgesetzten rechtwinkeligen Coordinatensystems bedeutet. (Siehe Gl. (41)). Die eben gefundenen Ausdrücke für $O M_1$ und $O M_1'$ können aber noch passend umgeformt werden, indem man nämlich die Nenner rational macht, und man erhält, sobald man dasselbe Verfahren einschlägt,

behufs Bestimmung von OM_2 und OM_2' aus der zweiten der obigen Gleichungen (a), schließlich:

$$(c)\quad \frac{OM_1}{OM_1'} = \left\{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c},\quad \frac{OM_2}{OM_2'} = \left\{\frac{b' \pm \sqrt{b'^2 - a'c'}}{c'}.\right.\right.$$

Es wäre nun nicht schwer, die Entfernungen OM und OM' irgend eines Paars entsprechender Elemente der Punktinvolution anzugeben, was jedoch unterbleiben mag. Übergehend auf die beiden Doppelelemente E und F, wird bemerkt, dass zufolge Gl. (298) die Gleichung dieser Punkte lautet:

$$(ab' - a'b)\,u^2 + (ac' - a'c)\,u + (bc' - b'c) = o,$$

wie man sich sofort überzeugt, sobald man dort $u_1 = u$, $u_2 = 1$ setzt und hierauf die Determinante berechnet, weshalb nach Gl. (c) die Abstände dieser Doppelpunkte vom Ursprunge O sich ergeben aus

$$\frac{OE}{OF} = \left\{\frac{(ac' - a'c) \pm \sqrt{(ac' - a'c)^2 - 4(ab' - a'b)(bc' - b'c)}}{2(bc' - b'c)}\right.$$

Bezeichnet man auch hier den Mittelpunkt der Strecke EF mit G, so ist $OG = \frac{1}{2}(OE + OF)$, somit

$$(d)\qquad OG = \frac{ac' - a'c}{2(bc' - b'c)},$$

und damit erscheint die Entfernung des Centrums der Involution vom Ursprunge bestimmt. Dass dieser Punkt G und der unendlich ferne Punkt der Achse der x ebenfalls ein Paar entsprechender Punkte darstellen, lässt sich nun auch leicht zeigen. Man bestimme nämlich aus (b) denjenigen Punkt M', welcher dem unendlich fernen Punkte M_∞ des gemeinsamen Trägers beider Reihen entspricht, und setze zu diesem Zwecke $c + \lambda c' = o$, oder $\lambda = -\frac{c}{c'}$, wodurch diese Gleichung die Form annimmt:

$$(ac' - a'c)\,u^2 + 2(bc' - b'c)\,u = o.$$

Die beiden Wurzeln obiger Gleichung sind:

$$u = o, \qquad u = -2\,\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c},$$

und daher ist auch

$$(e)\qquad OM' = \frac{ac' - a'c}{2(bc' - b'c)} = OG,$$

zum Beweise, dass G und M_∞ wirklich ein Paar entsprechender Elemente der Punktinvolution darstellen. Lässt man schließlich den Ursprung O mit dem Mittelpunkte G der Punktinvolution zusammenfallen, so ist $OG = o$, somit zufolge Gl. (e) auch $ac' - a'c = o$. Nun ist aber nach der Bedeutung von u, wenn M, M' irgend ein Paar entsprechender Punkte bedeuten, wie Gl. (b) sofort erkennen lässt

$$OM.OM' = \frac{a + \lambda a'}{c + \lambda c'},$$

und daher, wenn noch der Ursprung O mit dem Mittelpunkte G der Involution identisch ist,

$$OM.OM' = \frac{a + \lambda a'}{c + \lambda \frac{a'}{a} c} = \frac{a}{c},$$

d. h., es ist das Product:

$$(f) \qquad GM.GM' = GE^2 = GF^2 = \text{Const},$$

in Übereinstimmung mit dem im vorigen Capitel bereits Gefundenen.

Leicht lässt sich auch, mittelst der in diesem Capitel gewonnenen Formeln, der bereits ebenfalls bekannte Satz ableiten, dass nämlich die beiden Elemente des rechtwinkeligen Strahlenpaars einer Strahleninvolution identisch erscheinen mit den beiden Winkelhalbierungslinien des von den Doppelstrahlen (E) und (F) gebildeten Winkels. Es seien zu diesem Zwecke

$$(g) \qquad f(x,y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 = o, \quad \varphi(x,y) \equiv a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = o$$

die Gleichungen zweier Paare (L_1), (L_1') und (L_2), (L_2') entsprechender Strahlen; die durch dieselben bestimmte Strahleninvolution hat dann die Gleichung:

$$(h) \qquad f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \equiv (a + \lambda a')x^2 + 2(b + \lambda b')xy + (c + \lambda c')y^2 = o,$$

sobald wieder λ einen veränderlichen Parameter darstellt, und wird noch bemerkt, dass sämmtliche Elemente dieser Strahleninvolution durch den Ursprung O des Coordinatensystems gehen. Für die Doppelstrahlen (E) und (F) der durch Gl. (h) bestimmten Strahleninvolution erhält man

daher aus Gl. (299), sobald man dort $x_1 = x$, $x_2 = y$ setzt und die Determinante berechnet, die Gleichung:

$$(i) \quad (bc' - b'c)\,y^2 + (ac' - a'c)\,xy + (ab' - a'b)\,x^2 = o,$$

und mittelst derselben lassen sich ohneweiters die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel ε und φ berechnen, welche die Achse der x mit den Doppelstrahlen (E) und (F) bildet. Man braucht zu diesem Zwecke bloß die letzte Gleichung durch x^2 zu dividieren und hierauf selbe nach $\frac{y}{x}$ aufzulösen, wodurch man erhält:

$$(k) \quad \left.\begin{matrix}\mathrm{tg}\,\varepsilon\\ \mathrm{tg}\,\varphi\end{matrix}\right\} = \frac{(a'c - ac') \pm \sqrt{(ac' - a'c)^2 - 4(ab' - a'b)(bc' - b'c)}}{2\,(bc' - b'c)}.$$

Der Ideengang des hier folgenden Beweises unseres Satzes erfordert nun die Bestimmung desjenigen Winkels, welchen irgend ein Paar entsprechender Strahlen (L), (L') mit einander einschließen. Nach Gl. (301) des vorigen Paragraphen folgt derselbe aus

$$\mathrm{tg}\,(L,\,L') = 2\,\frac{\sqrt{(b + \lambda b')^2 - (a + \lambda a')\,(c + \lambda c')}}{(a + \lambda a') + (c + \lambda c')},$$

und es bilden daher diese Strahlen dann einen rechten Winkel, wenn

$$\lambda = -\,\frac{a + c}{a' + c'}$$

gewählt wird, wodurch aber auch gleichzeitig constatiert erscheint, dass in jeder quadratischen Strahleninvolution ein Paar entsprechender Strahlen existiert, deren Elemente auf einander senkrecht stehen. Wir wollen diese Strahlen hier mit (G) und (G') bezeichnen. Ihre Gleichung ergibt sich aus (h), wenn man daselbst für λ den eben gefundenen Wert substituiert, und ist somit die Gleichung von (G) und (G'):

$$(l) \quad \frac{1}{2}(ac' - a'c)\,x^2 + (a'b + c'b - ab' - cb')\,xy - \frac{1}{2}(ac' - a'c)\,y^2 = o,$$

und diese stimmt gleichzeitig überein mit der Gleichung der Winkelhalbierungslinien des von den Doppelstrahlen (E) und (F) gebildeten Winkels, wie aus den Gleichungen (i) und (302) sofort hervorgeht. Es erscheint somit erwiesen, dass die Strahlen (G) und (G') identisch sind mit den Winkel-

halbierungslinien des von den Doppelstrahlen (E) und (F) gebildeten Winkels.

Um endlich noch den in Gl. (273) ausgesprochenen Satz aus den hier vorliegenden Formeln abzuleiten, lasse man den Strahl (G) mit der Achse der x, jenen (G') aber mit der Achse der y zusammenfallen, und hat dann

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\lambda xy = o$$

als Gleichung einer Strahleninvolution. Weil nun in der letzten Gleichung $a' = c' = o$ und $b' = 1$ ist, wird nach Gl. (k)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\sqrt{\frac{a}{c}}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{a}{c}},$$

ferner, wenn (L) und (L') ein Paar entsprechender Strahlen angeben,

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{tg}(x, L)\\ \operatorname{tg}(x, L')\end{matrix}\right\} = \frac{-(b+\lambda) \pm \sqrt{(b+\lambda)^2 - ac}}{c},$$

und hieraus folgt

$$\operatorname{tg}(x, L) \,.\, \operatorname{tg}(x, L') = \frac{a}{c}.$$

Nun ist aber, laut Annahme, die Achse der x identisch mit (G) und ferner nach den obigen Gleichungen $(\operatorname{tg} \varepsilon)^2 = (\operatorname{tg} \varphi)^2 = \frac{a}{c}$, daher besteht in der That die Beziehung:

$$\operatorname{tg}(G, L) \cdot \operatorname{tg}(G, L') = \overline{\operatorname{tg}(G, E)^2} = \overline{\operatorname{tg}(G, F)^2} = \text{Const},$$

welche auch im vorigen Capitel in einer anderen Weise gefunden wurde.

§ 47. Punkt- und Strahleninvolution *n*ter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer Punkt- oder Strahleninvolution $n$ter Ordnung lautet:

$$f(\xi_1, \xi_2) + \lambda \cdot \varphi(\xi_1, \xi_2) = o,$$

wenn λ einen veränderlichen Parameter bedeutet, $f(\xi_1, \xi_2)$ und $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ zwei binäre Formen $n$ter Ordnung repräsentieren. Die hier vorkommenden Veränderlichen ξ_1 und ξ_2 sind Liniencoordinaten bei der Punktinvolution und Punktcoordinaten bei der Strahleninvolution, d. h. bei der ersteren hat man u_1 und u_2, bei der letzteren x_1 und x_2 für ξ_1 und

ξ_2 sich zu denken, und es ist klar, dass sämmtliche Punkte der Punktinvolution in der Geraden ($\xi_1 = o$, $\xi_2 = o$), dagegen sämmtliche Strahlen der Strahleninvolution durch den Punkt ($\xi_1 = o$, $\xi_2 = o$) gehen. Selbstverständlich sind auch

$$(312)\quad \begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &\equiv a\xi_1^n + \tbinom{n}{1} b\xi_1^{n-1}\xi_2 + \tbinom{n}{2} c\xi_1^{n-2}\xi_2^2 + \\ &\quad \ldots + \tbinom{n}{1} \varkappa \xi_1 \xi_2^{n-1} + l\xi_2^n = o, \\ \varphi(\xi_1, \xi_2) &\equiv a'\xi_1^n + \tbinom{n}{1} b'\xi_1^{n-1}\xi_2 + \tbinom{n}{2} c'\xi_1^{n-2}\xi_2^2 + \\ &\quad \ldots + \tbinom{n}{1} \varkappa' \xi_1 \xi_2^{n-1} + l'\xi_2^n = o \end{aligned}$$

die Gleichungen von je n einander entsprechenden Elementen (Punkten oder Strahlen) der Involution $n$ter Ordnung, und erscheint demnach letztere eindeutig bestimmt, sobald man zwei Gruppen von je n einander entsprechenden Elementen kennt. Wir wollen die durch die letzten Gleichungen gegebenen Elemente mit M', $M'' \ldots . M^{(n)}$ und N', $N'' \ldots . N^{(n)}$ bezeichnen, und es sind dieselben Punkte bei der Punktinvolution und Strahlen bei der Strahleninvolution. Es ist klar, dass die obige Gleichung der Involution $n$ter Ordnung auch so gegeben werden kann:

$$(313)\quad \begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) + \lambda\varphi(\xi_1, \xi_2) &\equiv (a + \lambda a')\xi_1^n + \tbinom{n}{1} (b + \lambda b') \\ \xi_1^{n-1}\xi_2 + \tbinom{n}{2} (c + \lambda c')\, \xi_1^{n-2}\xi_2^2 &+ \ldots . + \tbinom{n}{1} \\ (\varkappa + \lambda\varkappa')\, \xi_1 \xi_2^{n-1} &+ (l + \lambda l')\, \xi_2^n = o. \end{aligned}$$

Dividiert man eine jede der Gleichungen (312) durch ξ_2^n, so erhält man zwei Gleichungen $n$ten Grades in $\xi = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$, und wenn μ', μ'', $\mu''' \ldots . \mu^{(n)}$, sowie ν', ν'', $\nu''' \ldots . \nu^{(n)}$ die n Wurzeln dieser Gleichungen repräsentieren, so sind

$$\begin{aligned} \xi_1 - \mu'\xi_2 = o, \quad \xi_1 - \mu''\xi_2 = o \ldots . . \xi_1 - \mu^{(n)}\xi_2 = o; \\ \xi_1 - \nu'\xi_2 = o, \quad \xi_1 - \nu''\xi_2 = o \ldots . . \xi_1 - \nu^{(n)}\xi_2 = o \end{aligned}$$

die Gleichungen der Elemente M', $M'' \ldots . . M^{(n)}$ und N', $N'' \ldots . . N^{(n)}$, weshalb an die Stelle der vorangegangenen Gleichungen (312) auch gesetzt werden kann:

$$(a)\quad \begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &\equiv a(\xi_1 - \mu'\xi_2)(\xi_1 - \mu''\xi_2)(\xi_1 - \mu'''\xi_2) . . (\xi_1 - \mu^{(n)}\xi_2) = o, \\ \varphi(\xi_1, \xi_2) &\equiv a'(\xi_1 - \nu'\xi_2)(\xi_1 - \nu''\xi_2)(\xi_1 - \nu'''\xi_2) . . (\xi_1 - \nu^{(n)}\xi_2) = o. \end{aligned}$$

Natürlich entsprechen hier irgend einem Elemente E', d. h. irgend einem Punkte in der Geraden ($\xi_1 = o$, $\xi_2 = o$) oder irgend einem Strahl aus dem Punkte ($\xi_1 = o$, $\xi_2 = o$), ($n - 1$) andere Elemente E'', $E''' \ldots . E^{(n)}$, die gleichfalls

auf derselben Geraden liegen oder durch denselben Punkt gehen, und die n Elemente E', E'', $E'''\ldots.E^{(n)}$ sind untereinander vertauschungsfähig. Es unterliegt nun keinem Anstande, wenn die Gleichung von E' gegeben erscheint, die Gleichungen der übrigen $(n - 1)$ Elemente ausfindig zu machen. Ist nämlich z. B. $\xi_1 - \varrho' \cdot \xi_2 = o$ die Gleichung von E', so dividiere man die Gleichung (313) durch $\xi_2{}^n$ und ersetze dann den Quotienten $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ in derselben durch ϱ', wodurch man die in λ lineare Gleichung erhält

$$(a + \lambda a')\,\varrho'^n + \tbinom{n}{1}(b + \lambda b')\,\varrho'^{n-1} + \tbinom{n}{2}(c + \lambda c')\,\varrho'^{n-2} + \ldots\ldots + (l + \lambda l') = o,$$

aus welcher nun derjenige Wert von λ hervorgeht, welcher den einander entsprechenden Elementen E', E'', $E'''\ldots E^{(n)}$ angehört. Diesen Wert von λ substituiere man hierauf in die Gl. (313) und erhält so die Gleichung dieser n Elemente. Um aber die Gleichungen der letzteren einzeln zu erhalten, hat man noch (313) durch $\xi_2{}^n$ zu dividieren, wodurch eine Gleichung von der Form sich ergibt:

$$(a + \lambda a')\,\xi^n + \tbinom{n}{1}(b + \lambda b')\,\xi^{n-1} + \tbinom{n}{2}(c + \lambda c')\,\xi^{n-2} + \ldots\ldots + (l + \lambda l') = o,$$

und diese ist nun nach ξ aufzulösen. Repräsentieren ϱ', ϱ'', $\varrho'''\ldots.\varrho^{(n)}$ die n Wurzeln derselben, so sind:

(*b*) $\xi_1 - \varrho'\xi_2 = o,\quad \xi_1 - \varrho''\xi_2 = o\ldots.\xi_1 - \varrho^{(n)}\xi_2 = o$

die Gleichungen der Elemente E', E'', $E'''\ldots.E^{(n)}$, und stellen davon die $(n - 1)$ letzten jene Elemente dar, welche dem Elemente $\xi_1 - \varrho'\xi_2 = o$ entsprechen. Es ist an sich klar, dass man, zufolge der beiden Gleichungen (*a*), die Gleichung der Involution auch so geben kann:

$$a\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \mu'\right)\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \mu''\right)\ldots\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \mu^{(n)}\right) + \lambda . a'\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \nu'\right)\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \nu''\right)\ldots\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \nu^{(n)}\right) = o;$$

sind daher $\xi_1 - \varrho^{(i)}\xi_2 = o$ und $\xi_1 - \varrho^{(k)} \cdot \xi_2 = o$ die Gleichungen zweier Elemente $E^{(i)}$ und $E^{(k)}$, welche bei einem bestimmten Werte von λ einander entsprechen, d. h. derselben Gruppe von n einander entsprechenden Elementen

angehören, so bestehen nach der obigen Gleichung die beiden Relationen:

$$a\,(\varrho^{(i)}-\mu')\,(\varrho^{(i)}-\mu'')\,(\varrho^{(i)}-\mu''')\ldots(\varrho^{(i)}-\mu^{(n)})+\lambda a'\,(\varrho^{(i)}-\nu')\,(\varrho^{(i)}-\nu'')\,(\varrho^{(i)}-\nu''')\ldots(\varrho^{(i)}-\nu^{(n)})=o,$$

$$a\,(\varrho^{(k)}-\mu')\,(\varrho^{(k)}-\mu'')\,(\varrho^{(k)}-\mu''')\ldots(\varrho^{(k)}-\mu^{(n)})+\lambda a'\,(\varrho^{(k)}-\nu')\,(\varrho^{(k)}-\nu'')\,(\varrho^{(k)}-\nu''')\ldots(\varrho^{(k)}-\nu^{(n)})=o,$$

und aus diesen ergibt sich durch die Elimination von λ

$$(\varrho^{(i)}-\mu')\,(\varrho^{(i)}-\mu'')\,(\varrho^{(i)}-\mu''')\ldots(\varrho^{(i)}-\mu^{(n)})\,(\varrho^{(k)}-\nu')\,(\varrho^{(k)}-\nu'')\,(\varrho^{(k)}-\nu''')\ldots(\varrho^{(k)}-\nu^{(n)})-(\varrho^{(k)}-\mu')\,(\varrho^{(k)}-\mu'')\,(\varrho^{(k)}-\mu''')\ldots(\varrho^{(k)}-\mu^{(n)})\,(\varrho^{(i)}-\nu')\,(\varrho^{(i)}-\nu'')\,(\varrho^{(i)}-\nu''')\ldots(\varrho^{(i)}-\nu^{(n)})=o,$$

woraus sofort folgt

$$\left[\frac{(\varrho^{(i)}-\mu')\,(\varrho^{(k)}-\nu')}{(\varrho^{(i)}-\nu')\,(\varrho^{(k)}-\mu')}\right]\cdot\left[\frac{(\varrho^{(i)}-\mu'')\,(\varrho^{(k)}-\nu'')}{(\varrho^{(i)}-\nu'')\,(\varrho^{(k)}-\mu'')}\right]\ldots\ldots\left[\frac{(\varrho^{(i)}-\mu^{(n)})\,(\varrho^{(k)}-\nu^{(n)})}{(\varrho^{(i)}-\nu^{(n)})\,(\varrho^{(k)}-\mu^{(n)})}\right]=1.$$

Nun ist aber, wie in § 44 dieses Capitels gezeigt wurde, das Doppelverhältnis der vier Elemente M', N', $E^{(i)}$, $E^{(k)}$, welche beziehungsweise durch die Gleichungen $\xi_1-\mu'\xi_2=o$, $\xi_1-\nu'\xi_2=o$, $\xi_1-\varrho^{(i)}\xi_2=o$, $\xi_1-\varrho^{(k)}\xi_2=o$ gegeben erscheinen, gleich

$$(M'N'E^{(i)}E^{(k)})=\frac{\mu'-\varrho^{(i)}}{\nu'-\varrho^{(i)}}:\frac{\mu'-\varrho^{(k)}}{\nu'-\varrho^{(k)}}=\frac{(\varrho^{(i)}-\mu')\,(\varrho^{(k)}-\nu')}{(\varrho^{(i)}-\nu')\,(\varrho^{(k)}-\mu')}$$

und wir gelangen somit zu dem nachfolgenden Satze:

Ist M', M'', $M'''\ldots M^{(n)}$ eine Gruppe von n einander entsprechenden Elementen einer Punkt- oder Strahleninvolution $n$ter Ord.; N', N'', $N'''\ldots N^{(n)}$ eine andere Gruppe solcher Elemente und repräsentieren $E^{(i)}$ und $E^{(k)}$ irgend zwei Elemente einer dritten Gruppe, so ist das Product

$$(314)\quad (M'N'E^{(i)}E^{(k)})\,(M''N''E^{(i)}E^{(k)})\ldots(M^{(n)}N^{(n)}E^{(i)}E^{(k)})=+1.$$

Diejenigen Werte von λ, welche solchen Gruppen von n einander entsprechenden Elementen angehören, die je ein tautologes Element (Doppelpunkt, Doppelstrahl) besitzen, resultieren bekanntlich aus den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} = o$$
$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} = o$$

durch die Elimination von ξ_1 und ξ_2. Das Resultat der Elimination ist übrigens die gleich null gesetzte Discriminante der binären Form $f(\xi_1, \xi_2) + \lambda\varphi(\xi_1, \xi_2)$, und weil diese Discriminante in den Coefficienten dieser Form homogen und vom Grade $2(n-1)$ ist, so existieren offenbar $2(n-1)$ Elementengruppen, die je ein tautologes Element besitzen. Alle diese tautologen Elemente sind überdies enthalten in der Gleichung:

$$(315) \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = o.$$

Capitel IX.

Projectivische ebene Systeme.

(Projectivische Grundgebilde II. Stufe.)

§ 48. Einleitung.

Unter einem ebenen System versteht man die Gesammtheit aller in einer und derselben Ebene liegenden Punkte und Strahlen und es erscheint diese Ebene gleichzeitig als der Träger des ebenen Systems. Es ist klar, dass in einem ebenen System unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel enthalten sind, indem ja alle Punkte einer Geraden eine Punktreihe und alle durch einen Punkt gehenden Strahlen des Systems einen Strahlenbüschel bilden. Das ebene System gehört zu den sogenannten Grundgebilden II. Stufe, zu welchen man noch den Strahlenbündel rechnet, der die Gesammtheit aller durch einen und denselben Punkt gehenden Ebenen repräsentiert. Wir werden uns hier nur mit den projectivischen Eigenschaften ebener Systeme beschäftigen, weil der Strahlenbündel der Raumgeometrie angehört und darum hier nicht behandelt werden kann.

Zwischen zwei ebenen Systemen I und II existieren im allgemeinen zwei Arten von eindeutigen Verwandtschaften. Bei der einen entspricht jedem Punkte von I ein Punkt von II, ebenso jedem Strahl von I ein Strahl von II; bei der anderen entspricht dagegen jedem Punkte von I ein Strahl von II und jedem Strahl von I ein Punkt von II. Man nennt nun die erste Art der Verwandtschaft die collineare, die zweite aber die reciproke oder duale.

§ 49. Collineation ebener Systeme.

Bei den hier folgenden Untersuchungen lassen wir die Träger $[E]$ und $[E']$ der beiden collinear verwandten Systeme I und II zusammenfallen und beziehen die Coordinaten

von zwei einander entsprechenden Punkten x und y oder Strahlen (u) und (v) auf ein und dasselbe Coordinatendreieck. Sind nun x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die trilinearen Coordinaten von x und y, so müssen, nachdem jedem Punkte des einen Systems nur ein Punkt des anderen entspricht, zwischen diesen Coordinaten drei lineare Beziehungen bestehen von der Form:

$$(316) \ldots \quad \begin{aligned} \varrho y_1 &= a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 \\ \varrho y_2 &= a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3 \\ \varrho y_3 &= a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + a_{3,3} x_3, \end{aligned}$$

in welchen ϱ ein Proportionalfactor ist, während $a_{i,k}$ neun gegebene Coefficienten darstellen, und aus diesen Gleichungen folgt, wenn man sie mit den bekannten Coefficienten $A_{1,k}$, $A_{2,k}$ und $A_{3,k}$ multipliciert — $k = 1, 2, 3$ —, welche die in § 27 bereits gegebene Bedeutung haben, hierauf addiert und an die Stelle von $\varrho \, . \, A$ den Proportionalfactor σ setzt,

$$(317) \ldots \quad \begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{1,1} y_1 + A_{2,1} y_2 + A_{3,1} y_3 \\ \sigma x_2 &= A_{1,2} y_1 + A_{2,2} y_2 + A_{3,2} y_3 \\ \sigma x_3 &= A_{1,3} y_1 + A_{2,3} y_2 + A_{3,3} y_3. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (316) ergeben sich sofort die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher im System *II* dem zu *I* gerechneten Punkte x entspricht. Betrachtet man dagegen den Punkt x als zu *II* gehörig und substituiert in (317) für y_1, y_2 und y_3 die Coordinaten von x, so resultieren aus (317) die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher dem Punkte x im System *I* entspricht, und aus dem Baue der obigen Relationen erhellet, dass man jedesmal einen anderen Punkt erhält. Eine Vertauschungsfähigkeit der beiden einander entsprechenden Punkte findet sonach hier nicht statt. Der dem Punkte x entsprechende Punkt heißt der Bildpunkt von x.

Um nun auch eine Beziehung zwischen den Coordinaten u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 von zwei einander entsprechenden Geraden (u) und (v) zu erhalten, von welchen erstere als zu *I* und letztere als zu *II* gehörig angesehen werden soll, sei

$$(a) \ldots \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o$$

die Gleichung von (u), wobei noch angenommen wird, dass die Gerade (u) durch die Bewegung des Punktes x entstanden ist. Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte y, welche diesen Punkten x im System II entsprechen, ergibt sich jetzt ohneweiters durch die Substitution der in (317) gegebenen Werte von x_i in die Gleichung (a), und man erhält dadurch, wenn man gleichzeitig die Glieder mit y_1, y_2 und y_3 zusammenfasst,

$$y_1 \,.\, \Sigma A_{1,k}\, u_k + y_2 \Sigma A_{2,k}\, u_k + y_3 \,.\, \Sigma A_{3,k} u_k = o,$$

d. h. der gesuchte geometrische Ort ist eine Gerade (v), und diese entspricht in II der Geraden (u) in I, und die Coordinaten v_1, v_2, v_3 der ersteren ergeben sich aus den Gleichungen

$$(318) \quad \begin{aligned} \mu v_1 &= A_{1,1}\, u_1 + A_{1,2}\, u_2 + A_{1,3}\, u_3 \\ \mu . v_2 &= A_{2,1}\, u_1 + A_{2,2}\, u_2 + A_{2,3}\, u_3 \\ \mu . v_3 &= A_{3,1}\, u_1 + A_{3,2}\, u_2 + A_{3,3}\, u_3, \end{aligned}$$

in welchen wieder μ ein Proportionalfactor ist, und hieraus fließen, sobald man dieselben der Reihe nach mit den Coefficienten $a_{1,k}$, $a_{2,k}$, $a_{3,k}$ multipliciert, sie hierauf addiert und anstatt μA den Proportionalfactor v setzt, die drei weiteren Gleichungen:

$$(319) \quad \begin{aligned} v u_1 &= a_{1,1}\, v_1 + a_{2,1}\, v_2 + a_{3,1}\, v_2 \\ v u_2 &= a_{1,2}\, v_1 + a_{2,2}\, v_2 + a_{3,2}\, v_3 \\ v u_3 &= a_{1,3}\, v_1 + a_{2,3}\, v_2 + a_{3,3}\, v_3. \end{aligned}$$

Mittelst der Gleichungsgruppe (318) können die Coordinaten v_1, v_2, v_3 derjenigen Geraden (v) berechnet werden, welche im System II der zu I gehörigen Geraden (u) entspricht, wenn die Coordinaten u_1, u_2, u_3 der letzteren gegeben erscheinen, während die Gruppe (319) die Lösung der verkehrten Aufgabe ermöglicht. Auch hier ersieht man, dass die Vertauschungsfähigkeit zweier einander entsprechender Geraden im allgemeinen ausgeschlossen ist.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die eben gegebenen zwölf Gleichungen mit den in § 29 vorgeführten Transformationsgleichungen im Baue übereinstimmen; die letzteren sind sonach gleichzeitig die Gleichungen der Collineation, sobald die dort vorkommenden Punkt- und

Liniencoordinaten auf ein und dasselbe Coordinatendreieck sich beziehen.

Satz. Die collineare Verwandtschaft von zwei ebenen Systemen erscheint eindeutig bestimmt, sobald man vier Paare von einander entsprechenden Punkten oder Geraden kennt, wobei jedoch in dem ersten Fall keine drei Punkte desselben Systems in einer Geraden liegen, in dem zweiten aber keine drei Strahlen desselben Systems durch den nämlichen Punkt gehen dürfen.

Der Beweis dieses Satzes erscheint sofort erbracht, sobald man bedenkt, dass in den Verwandtschaftsgleichungen (316) oder (318) neun Coefficienten $a_{i,k}$ oder $A_{i,k}$ vorkommen und die gegebenen vier Paare acht lineare Gleichungen zur Berechnung dieser Coefficienten liefern, woraus ein jeder derselben sich ergibt in der Form $a_i x$, wo x ein Proportionalfactor ist, der schließlich in ϱ oder μ eingeht.

Satz. Einer Punktreihe des einen Systems entspricht im anderen System eine ihr projectivische Punktreihe.

Beweis. Es seien x_i, x_i', x_i'', $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten dreier Punkte x, x', x'' des Systems I und y_i, y_i', y_i'' jene der den ersteren entsprechenden Punkte y, y', y'' des Systems II, wobei noch angenommen wird, dass x, x', x'' in einer und derselben Geraden liegen.

Satz. Einem Strahlenbüschel des einen Systems entspricht im anderen System ein ihm projectivischer Strahlenbüschel.

Beweis. Es seien u_i, u_i', u_i'', $i = 1, 2, 3$, die Coordinaten dreier Strahlen (u), (u'), (u'') des Systems I und v_i, v_i', v_i'' jene der den ersteren entsprechenden Strahlen (v), (v'), (v'') des Systems II, wobei noch angenommen wird, dass (u), (u'), (u'') in einem und demselben Punkte sich durchschneiden

und somit auch

$$(c) \quad x_i = x_i' - \lambda . x_i'', \quad i = 1, 2, 3, \quad u_i = u_i' - \lambda u_i'' \quad (d)$$

sein muss. Nachdem aber die Punkte x jenen y und die Strahlen (u) jenen (v) entsprechen, bestehen zwischen deren Coordinaten nach (316) und (318) die linearen Beziehungen:

$$\varrho' y_i' = a_{i,1} x_1' + a_{i,2} x_2' + a_{i,3} x_3', \quad \mu' v_i' = A_{i,1} u_1' + A_{i,2} u_2' + A_{i,3} u_3',$$
$$\varrho'' y_i'' = a_{i,1} x_1'' + a_{i,2} x_2'' + a_{i,3} x_3'' \quad \mu'' v_i'' = A_{i,1} u_1'' + A_{i,2} u_2'' + A_{i,3} u_3''$$

und

$$\varrho y_i = a_{i,1} (x_1' - \lambda x_1'') + a_{i,2} (x_2' - \lambda x_2'') + a_{i,3} (x_3' - \lambda x_3'') = \varrho' y_i' - \lambda \varrho'' y_i'',$$
$$\mu v_i = A_{i,1} (u_1' - \lambda u_1'') + A_{i,2} (u_2' - \lambda u_2'') + A_{i,3} (u_3' - \lambda u_3'') = \mu' v_i - \lambda \mu'' v_i'',$$

woraus sich ergibt, wenn man $\frac{\varrho''}{\varrho'} = m$, $\frac{\mu''}{\mu'} = n$ und anstatt $\frac{\varrho}{\varrho'} y_i$, respective $\frac{\mu}{\mu'} v_i$, einfach y_i und v_i setzt,

$$(e) \quad y_i = y_i' - \lambda m y_i'', \quad i = 1, 2, 3, \quad v_i = v_i' - \lambda n v_i'', \quad (f)$$

womit y_i und v_i bestimmt und gleichzeitig erwiesen erscheint, dass y in der Geraden $y' y''$ liegt, während (v) durch den Schnittpunkt der Strahlen (v') und (v'') geht. Die in den Gleichungen (e) und (f) vorkommenden Coefficienten m und n sind unabhängig von λ; zufolge der in § 33 gegebenen Gleichungen (224) und (225), bestimmen daher auch (c) und (e), sobald λ einen veränderlichen Parameter darstellt, die Coordinaten entsprechender Punkte von zwei projectivischen Punktreihen, dagegen (d) und (f) die Coordinaten entsprechender Strahlen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, und sind damit die früher ausgesprochenen zwei Sätze erwiesen.

Gestützt auf die eben bewiesenen Sätze ist man aber auch in der Lage, zu einem gegebenen Punkte x des Systems I denjenigen Punkt y zu finden, welcher ersterem in II entspricht, sobald die collineare Verwandtschaft beider Systeme bestimmt erscheint durch vier Paare entsprechender Punkte x', y'; x'', y''; x''', y''' und x^{IV}, y^{IV}, die der Einschränkung unterliegen, dass keine drei Punkte desselben Systems in einer und derselben Geraden liegen. Man verbinde zu diesem Zwecke den Punkt x' durch vier Strahlen mit den Punkten x'', x''', x^{IV}, x und jenen y' durch drei Strahlen mit y'', y''', y^{IV} und construiere hierauf denjenigen Strahl (a), welcher im System II dem Strahl $x'x$ des Systems I entspricht. Nun widerhole man dasselbe Verfahren unter der Voraussetzung, dass x'' und y'' die Mittelpunkte der beiden

projectivischen Strahlenbüschel sind, wodurch man den Strahl (b) erhält, der im System II dem Strahl $x''x$ des Systems I entspricht, und es ist dann der Schnittpunkt von (a) mit (b) selbstverständlich der gesuchte Punkt y. Ein ganz analoger Weg ist einzuschlagen, sobald zu einem gegebenen Strahl (u) des Systems I der entsprechende (v) in II gefunden werden soll und die collineare Verwandtschaft von I und II gegeben erscheint durch vier Paare entsprechender Strahlen (u'), (v'); (u''), (v''); (u'''), (v''') und (u^{IV}), (v^{IV}), die bezüglich ihrer gegenseitigen Lage der Einschränkung unterliegen, dass keine drei demselben System angehörigen Strahlen durch einen und denselben Punkt gehen. Man bringe nämlich die Strahlen (u''), (u'''), (u^{IV}) und (u) zum Schnitte mit (u'), dann jene (v''), (v'''), (v^{IV}) zum Schnitte mit (v'), wodurch man beziehungsweise die Punkte x'', x''', x^{IV}, x und y'', y''', y^{IV} erhält, und construiere hierauf den dem Punkte x entsprechenden Punkt y. Alsdann wiederhole man dieses Verfahren, jedoch mit der Variation, dass man (u'') und (v'') an die Stelle von (u') und (v') treten lässt. Die jetzt sich ergebenden Punkte seien respective ξ', ξ''', ξ^{IV}, ξ und η', η''' η^{IV} und der dem Punkte ξ entsprechende Punkt sei η. Selbstverständlich ist die Verbindungsgerade $y\eta$ der gesuchte Strahl (v).

Satz. Sind zwei ebene Systeme collineare, so entspricht einer algebraischen Curve $n$ter Ordn. des einen Systems eine algebraische Curve derselben Ordnung des anderen.

Beweis. Es sei $f(x_1 x_2 x_3) = o$ die Gleichung derjenigen algebraischen Curve $n$ter Ordnung, welche ein Punkt x in der Ebene $[E]$ des Systems I beschreibt. Der dem Punkte x entsprechende Punkt y

Satz. Sind zwei ebene Systeme collineare, so entspricht einer algebraischen Curve $n$ter Classe des einen Systems eine algebraische Curve derselben Classe des anderen.

Beweis. Es sei $\varphi(u_1 u_2 u_3) = o$ die Gleichung derjenigen algebraischen Curve $n$ter Classe, welche ein Strahl (u) in der Ebene $[E]$ des Systems I beschreibt. Der dem Strahl (u) entsprechende

des Systems *II* beschreibt dann in der Ebene $[E']$ ebenfalls eine Curve, deren Gleichung gefunden wird, sobald man in $f\ (x_1\, x_2\, x_3) = o$ einfach x_1, x_2 und x_3 ersetzt durch die in den Formeln (317) gegebenen Werte, wodurch sich eine Gleichung ergibt von der Form $F\,(y_1\, y_2\, y_3) = o$, die bezüglich y_1, y_2 und y_3, vermöge der linearen und homogenen Beschaffenheit der Formeln (317), ebenfalls homogen und vom Grade n erscheint, weshalb auch die von y beschriebene Curve algebraisch und vom Grade n ist.

Strahl (v) des Systems *II* beschreibt dann in der Ebene $[E']$ ebenfalls eine Curve, deren Gleichung gefunden wird, sobald man in $\varphi\,(u_1 u_2\, u_3) = o$ bloß u_1, u_2 und u_3 ersetzt durch die in den Formeln (319) gegebenen Werte, wodurch sich eine Gleichung ergibt von der Form $\Phi\ (v_1, v_2\ v_3) = o$, die bezüglich v_1, v_2 und v_3, vermöge der linearen und homogenen Beschaffenheit der Formeln (319), ebenfalls homogen und vom Grade n erscheint, weshalb auch die von (v) beschriebene Curve algebraisch und $n$ter Classe ist.

Fluchtlinien. Für die folgenden Untersuchungen erscheint es geboten, diejenige Gerade zu bestimmen, welche der unendlich fernen Geraden (L_∞) der Ebene $[E]$ oder $[E']$ entspricht. Hierbei benützen wir aber nicht mehr die homogenen Coordinaten, sondern die Coordinaten des Cartesius und setzen deshalb in den Verwandtschaftsgleichungen (316) und (317), im Sinne des in § 28 bereits Gesagten, $x_1 = \xi$, $x_2 = \eta$, $x_3 = 1$ und $y_1 = \xi'$, $y_2 = \eta'$, $y_3 = 1$. Dividiert man noch in beiden Gruppen (316) und (317) die ersten zwei Gleichungen durch die dritte Gleichung, so ergeben sich die zur Lösung der hier gestellten Aufgabe führenden vier Relationen:

$$(320)\quad \begin{aligned} \xi' &= \frac{a_{1,1}\xi + a_{1,2}\eta + a_{1,3}}{a_{3,1}\xi + a_{3,2}\eta + a_{3,3}} \\ \eta' &= \frac{a_{2,1}\xi + a_{2,2}\eta + a_{2,3}}{a_{3,1}\xi + a_{3,2}\eta + a_{3,3}}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{A_{1,1}\xi' + A_{2,1}\eta' + A_{3,1}}{A_{1,3}\xi' + A_{2,3}\eta' + A_{3,3}} \\ \eta &= \frac{A_{1,2}\xi' + A_{2,2}\eta' + A_{3,2}}{A_{1,3}\xi' + A_{2,3}\eta' + A_{3,3}}, \end{aligned} \quad (321)$$

in welchen ξ, η die Coordinaten irgend eines Punktes M des Systems *I* und ξ', η' jene des dem Elemente M entsprechenden Punktes M' im anderen System *II* repräsentieren.

Selbstverständlich bleibt auch hier wieder die Voraussetzung aufrecht, dass die Ebenen $[E]$ und $[E']$ beider Systeme zusammenfallen und mit der Ebene der beiden Coordinatenachsen identisch erscheinen. Betrachtet man nun die unendlich ferne Gerade L_∞ der beiden vereinigten Ebenen $[E]$ und $[E']$ als ein Gebilde von II, so ist für sämmtliche Punkte derselben $\xi' = \infty$, $\eta' = \infty$, oder $\frac{1}{\xi'} = \frac{1}{\eta'} = o$, was nach (320) offenbar $a_{3,1}\xi + a_{3,2}\eta + a_{3,3} = o$ bedingt. Der unendlich fernen Geraden der Ebene $[E']$ entspricht sonach in der Ebene $[E]$ die Gerade

$$(322) \quad . \; . \; . \; F \equiv a_{3,1}\xi + a_{3,2}\eta + a_{3,3} = o,$$

und in derselben Weise lässt sich mittelst (321) zeigen, dass der unendlich fernen Geraden der Ebene $[E]$ in der Ebene $[E']$ die Gerade

$$(323) \quad . \; . \; F' \equiv A_{1,3}\xi' + A_{2,3}\eta' + A_{3,3} = o$$

entspricht. Man nennt die durch die beiden letzten Gleichungen definierten Geraden (F) und (F') die Fluchtlinien oder Gegenlinien der beiden Systeme I und II, und es ist klar, dass dieselben im allgemeinen verschiedene Richtungen haben müssen. Wir werden später bei der centralen Collineation von zwei ebenen Systemen noch einmal auf diese Fluchtlinien zurückkommen.

Doppelelemente. Für diejenigen Punkte der beiden Systeme I und II, welche sich selbst entsprechen, d. h. für die Doppelpunkte derselben, ist $y_i = x_i$, sonach zufolge der früheren Gleichungen (316)

$$\varrho x_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3, \qquad i = 1, 2, 3,$$

weshalb die Bestimmung der Coordinaten der Doppelpunkte beider Systeme mittelst der drei Gleichungen zu erfolgen hat:

$$(324) \quad . \quad \begin{array}{l} (a_{1,1} - \varrho)\,x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = o \\ a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \varrho)\,x_2 + a_{2,3}x_3 = o \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + (a_{3,3} - \varrho)\,x_3 = o, \end{array}$$

in welchen die Coefficienten $a_{i,k}$ als gegeben erscheinen, dagegen ϱ und die Coordinaten x_i die Unbekannten repräsentieren. Die Unbekannte ϱ kann nun ohneweiters ermittelt

werden; denn eliminiert man aus (324) die drei Coordinaten x_1, x_2, x_3, so ergibt sich als Resultat der Elimination, die in Bezug auf ϱ cubische Gleichung

$$(325) \ldots \quad \begin{vmatrix} (a_{1,1}-\varrho) & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & (a_{2,2}-\varrho) & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & (a_{3,3}-\varrho) \end{vmatrix} = o,$$

oder

$$\varDelta \equiv -\varrho^3 + (a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})\varrho^2 - (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2})\varrho + A = o,$$

wenn noch A die aus den neun Coefficienten $a_{i,k}$ gebildete 3^2 elementige Determinante bedeutet. Die eben gefundene Gleichung hat aber drei Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, und ein jeder dieser drei Werte von ϱ bestimmt mittelst zweier der Gleichungen (324), nachdem man daselbst $\varrho = \varrho_i$ gesetzt hat, ein solches Wertesystem von $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$, welches einem Doppelpunkte der beiden ebenen Systeme angehört. Nachdem aber die Verbindungsgerade zweier Doppelpunkte einen Doppelstrahl beider Systeme darstellt, ergibt sich sonach der wichtige **Satz:**

Zwei collinear verwandte ebene Systeme besitzen drei Doppelpunkte und drei Doppelstrahlen.

Die Bestimmung derjenigen Wertesysteme von $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$, welche den Doppelpunkten entsprechen, kann auch mittelst der Minoren der Determinante $\varDelta$ geschehen, wenn man nämlich noch zuvor in dem Ausdrucke für $\varDelta$ an die Stelle von ϱ die Wurzelwerte ϱ_i substituiert. Da nämlich dann $\varDelta = o$ wird, so bestehen nach einer bekannten Eigenschaft der Nulldeterminante die Proportionen:

$$(326) \ldots \quad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \varDelta_{1,1} : \varDelta_{1,2} : \varDelta_{1,3} \\ &= \varDelta_{2,1} : \varDelta_{2,2} : \varDelta_{2,3} \\ &= \varDelta_{3,1} : \varDelta_{3,2} : \varDelta_{3,3}, \end{aligned}$$

wenn wieder $\varDelta_{i,k}$ gleich erscheint $(-1)^{i+k}$mal jener Minore, die aus der Determinante $\varDelta$ hervorgeht, wenn man dort die Zeile i und Colonne k unterdrückt und aus den zurückbleibenden Elementen eine neue Determinante bildet.

Die Verwandtschaftsgleichungen der Collineation vereinfachen sich, sobald man die drei Doppelpunkte als die Ecken des gemeinsamen Coordinatendreiecks wählt. Denn, weil hier für $x_i = o$ auch $y_i = o$, sowie für $u_i = o$ auch $v_i = o$ sein muss, so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \alpha_1 x_1 \qquad & \nu u_1 &= \alpha_1 v_1 \\ \varrho y_2 &= \alpha_2 x_2 \qquad & \nu u_2 &= \alpha_2 v_2 \\ \varrho y_3 &= \alpha_3 x_3. \qquad & \nu u_3 &= \alpha_3 v_3. \end{aligned}$$

§ 50. Centrale Collineation.

Setzt man in den drei Gleichungen (324) für ϱ eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta = o$, so erscheint jede derselben als eine Folge der beiden übrigen, d. h. jede der drei Gleichungen (324) geht hervor durch lineare Combination der zwei anderen, weshalb auch bei der Berechnung von $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ eine dieser drei Gleichungen zu entfallen hat. Von selbst tritt nun an uns die Frage heran, was geschehen würde, wenn $\varrho = \sigma$ eine solche Wurzel der Gleichung $\Delta = o$ wäre, für welche die drei Gleichungen (324) auf eine einzige zurückgeführt werden können. Nachdem dann sechs Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ existieren, für welche die Identitäten bestehen müssen:

$$(a) \qquad \begin{aligned} a_{1,1} - \sigma &= \beta_1\alpha_1 \qquad & a_{2,1} &= \beta_2\alpha_1 \qquad & a_{3,1} &= \beta_3\alpha_1 \\ a_{1,2} &= \beta_1\alpha_2 \qquad & a_{2,2} - \sigma &= \beta_2\alpha_2 \qquad & a_{3,2} &= \beta_3\alpha_2 \\ a_{1,3} &= \beta_1\alpha_3 \qquad & a_{2,3} &= \beta_2\alpha_3 \qquad & a_{3,3} - \sigma &= \beta_3\alpha_3, \end{aligned}$$

so nimmt die cubische Gleichung (325), sobald man dort für $a_{i,k}$ die aus den neun obigen Relationen hervorgehenden Werte substituiert, die Form an:

$$\begin{vmatrix} [\beta_1\alpha_1 - (\varrho - \sigma)] & \beta_1\alpha_2 & \beta_1\alpha_3 \\ \beta_2\alpha_1 & [\beta_2\alpha_2 - (\varrho - \sigma)] & \beta_2\alpha_3 \\ \beta_3\alpha_1 & \beta_3\alpha_2 & [\beta_3\alpha_3 - (\varrho - \sigma)] \end{vmatrix} = (\varrho - \sigma)^2 (\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \sigma - \varrho) = o,$$

woraus man erkennt, dass $\varrho = \sigma$ eine Doppelwurzel und $\varrho = \sigma + \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3$ eine einfache Wurzel der Gl. (325) darstellt. Hat somit die Gleichung $\Delta = o$ eine

Doppelwurzel und substituiert man in den Gleichungen (324) für ϱ diese Doppelwurzel, so übergehen die letzteren in eine einzige. Was nun die Verwandtschaftsgleichungen (316) anbelangt, so nehmen dieselben jetzt die Form an:

$$(b) \quad \varrho' y_i = \sigma x_i + \beta_i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \ldots i = 1, 2, 3,$$

wenn ϱ' wieder einen Proportionalfactor bezeichnet, und aus dieser folgt, sobald man $\varrho' = \sigma$ und $x_i = y_i$ setzt,

$$(c) \quad \ldots\ldots \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = o$$

als geometrischer Ort der Doppelpunkte der beiden ebenen Systeme. In dem singulären Fall, wo die Gleichung $\Delta = o$ eine Doppelwurzel besitzt, ist somit der geometrische Ort aller derjenigen Punkte beider ebenen Systeme, welche sich selbst entsprechen, eine Gerade, genannt die Achse der Collineation und bestimmt durch die obige Gleichung (c). Aber auch alle sich selbst entsprechenden Strahlen der beiden ebenen Systeme durchschneiden sich hier in einem und demselben Punkte, wovon man sich sofort überzeugt, wenn man die aus (a) resultierenden Werte der Coefficienten $a_{i,k}$ in die Verwandtschaftsgleichungen (319) einführt. Denn dadurch gehen dieselben über in

$$(d) \quad v' u_i = \sigma v_i + \alpha_i (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3) \ldots i = 1, 2, 3,$$

wenn v' einen Proportionalfactor bedeutet, und hieraus folgt für $\sigma = v'$ und $u_i = v_i$

$$(e) \quad \ldots\ldots \quad \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = o,$$

wodurch in der That erwiesen erscheint, dass alle sich selbst entsprechenden Strahlen beider Systeme in einem und demselben Punkte sich durchschneiden, genannt das Centrum der Collineation und bestimmt durch die Gl. (e). Gleichzeitig lassen die Gleichungen (c) und (e) sofort erkennen, dass für die Coordinaten der Collineationsachse und des Collineationscentrums die beiden Proportionen bestehen:

$$(f) \quad . \quad u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3, \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3.$$

Eliminiert man aus den drei Gleichungen (b) die Größen ϱ', σ und den Klammerausdruck $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$, ebenso aus den drei Gleichungen (d) die Größen v', σ und den Klammerausdruck $(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3)$, so folgt

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = o,$$

und diese beiden Gleichungen sagen aus, dass immer ein Paar entsprechender Punkte x, y in einer durch das Collineationscentrum β gehenden Geraden liegen, dagegen ein Paar entsprechender Strahlen (u), (v) in der Collineationsachse (α) sich durchschneiden, sobald die Coefficienten $a_{i,k}$ der Collineationsgleichungen den Bedingungen (a) genügen, d. h. die Gl. $\Delta = o$ eine Doppelwurzel besitzt.

Man nennt nun diese Art der Verwandtschaft von zwei ebenen Systemen I und II, bei welcher zwei einander entsprechende Punkte in einer durch einen festen Punkt gehenden Geraden liegen und zwei einander entsprechende Geraden in einer festen Geraden sich durchschneiden, die centrale Collineation. Der feste Punkt heißt das Centrum, die feste Gerade die Achse der Collineation, und es entspricht jede durch das Centrum der Collineation gehende Gerade, sowie jeder in der Collineationsachse liegende Punkt, sich selbst. Auch ist klar, dass das Collineationscentrum und die Collineationsachse sich selbst entsprechen.

Es lässt sich nun zeigen, dass bei der centralen Collineation die beiden Fluchtlinien (F) und (F') parallel gerichtet sind zur Achse der Collineation und überdies noch eine solche Lage besitzen, dass sie jede in dem Collineationscentrum anfangende und in der Collineationsachse endigende Strecke symmetrisch theilen. Um dies zu beweisen, seien M_1, M_1' in Fig. 67 ein Paar entsprechender Punkte der beiden central-collinearen Systeme und sei ferner C das Centrum, (A) die Achse der Collineation. Dass die collineare Verwandtschaft der beiden Systeme durch die Angabe dieser Elemente eindeutig bestimmt erscheint, ist an sich klar, indem C ein Paar und (A) zwei Paare entsprechender Elemente repräsentieren und nach einem früheren Satze die collineare Verwandtschaft von zwei ebenen Systemen gegeben ist, sobald man vier Paare entsprechender Elemente kennt. Nun lege man durch C einen beliebigen Strahl (L) und bestimme constructiv den entsprechenden

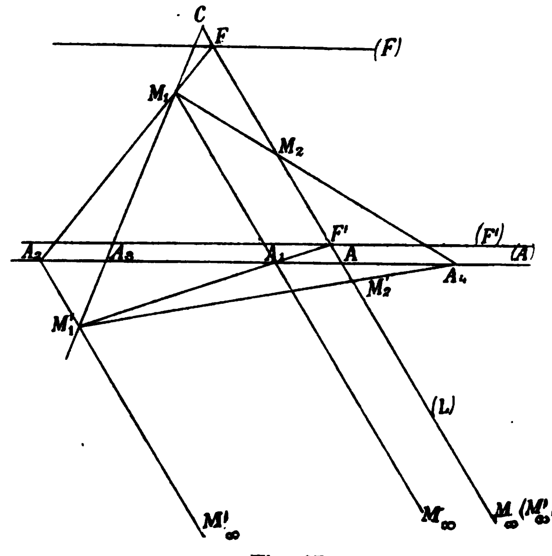


Fig. 67.

Punkt des unendlich fernen Punktes von (L), wobei gleichzeitig bemerkt wird, dass letzterer angesehen werden kann als ein Punkt von I oder II und im ersten Fall mit M_∞, im zweiten aber mit M_∞' bezeichnet werden soll. Der entsprechende Punkt von M_∞ liegt in der Fluchtlinie (F') und heiße F', während jener von M_∞' in der anderen Fluchtlinie (F) sich befinden muss und mit F bezeichnet werden möge. Behufs Auffindung von F' lege man durch M_1 einen parallelen Strahl zu (L), welcher die Achse (A) im Punkte A_1 durchschneidet, und verbinde hierauf die Punkte M'_1, und A_1 durch eine Gerade und diese trifft (L) in dem zu suchenden Punkte F', indem nach dem Wesen der centralen Collineation, weil ja M_1, M_1' und M_∞, F' je ein Paar entsprechender Punkte darstellen, die Geraden $M_1 M_\infty$ und M_1' F' in einem Punkte von (A) sich durchschneiden und überdies auch M_∞ und F' in einer durch O gehenden Geraden liegen müssen. In derselben Weise lässt sich nun auch der Punkt F constructiv ermitteln; man braucht zu diesem Zwecke bloß durch M_1' eine Parallele zu (L) zu ziehen, den Schnittpunkt A_2 der ersteren mit (A) durch eine Gerade mit M_1 zu

verbinden und diese mit (L) zum Schnitte zu bringen. Denkt man sich jetzt in dem Strahl (L) die Punkte 1, 2, 3, 4... und zu diesen nach dem nunmehr bekannten Principe der centralen Collineation die entsprechenden Punkte $1', 2', 3', 4'\ldots$ aufgesucht, so sind 1, 2, 3, 4... und $1'$, $2'$, $3'$, $4'\ldots$ zwei conlocale projectivische Punktreihen mit den Doppelpunkten C und A, weshalb nach einem früher bei den conlocalen projectivischen Punktreihen gegebenen Satze auch $(CA\,1\,1') = (CA\,2\,2') = K$ sein muss. Aus diesem Grunde ist daher, weil auch F, M_∞' und M_∞, F' je ein Paar entsprechender Punkte dieser Punktreihen darstellen,

$$(CAFM'_\infty) = (CAM_\infty F') = K$$

und hieraus folgt, wegen $(CAM'_\infty) = (CAM_\infty) = 1$,

$$(CAF) = \frac{1}{(CAF')} = K,$$

oder

$$(CAF) = K, \qquad (CAF') = \frac{1}{K},$$

woraus nach der Bedeutung dieser Symbole sich ergibt: (siehe Gl. (87)

$$CF = \frac{K}{K-1}.CA, \;\; AF = \frac{1}{K-1}.CA, \;\; CF' = \frac{1}{1-K}\,CA,$$

$$AF' = \frac{K}{1-K}CA,$$

d. h. es ist in der That

$$CF = -\,AF', \qquad CF' = -\,AF$$

und sind daher F und F' symmetrische Theilpunkte der Strecke CA, was behauptet wurde. Noch ist aber zu beweisen, dass die beiden Fluchtlinien (F) und (F') parallel zur Achse (A) der Collineation gerichtet erscheinen. Dies kann nach den obigen Formeln offenbar nur dann stattfinden, wenn der in denselben vorkommende Parameter K denselben Wert besitzt, gleichgiltig welcher durch C gehende Strahl der gemeinsame Träger der beiden projectivischen Punktreihen auch ist. Dies ist aber hier der Fall; denn sind M_2, M_2' ein Paar entsprechender Punkte in der Geraden (L), so durchschneiden sich, wie wir bereits gesehen haben, die Geraden $M_1 M_2$ und $M_1' M_2'$ in einem Punkte A_4

von (A) und ist deshalb nach dem Satze von Pappus (§ 18) $(C A M_1 M_1') = (C A M_2 M_2') = K$, d. h. es ist K constant für alle durch C gehenden Strahlen.

Selbstverständlich ist, zufolge der eben bestimmten Richtung und Lage der beiden Fluchtlinien, die centrale Collineation von zwei ebenen Systemen I und II auch dann eindeutig bestimmt, sobald die Achse (A) der Collineation und das Centrum C der letzteren, sowie die beiden Fluchtlinien (F), (F') gegeben sind. Um nun hier zu einem gegebenen Punkte M den entsprechenden Punkt M' aufzufinden (Fig. 68), lege man durch C einen beliebigen Strahl (L),

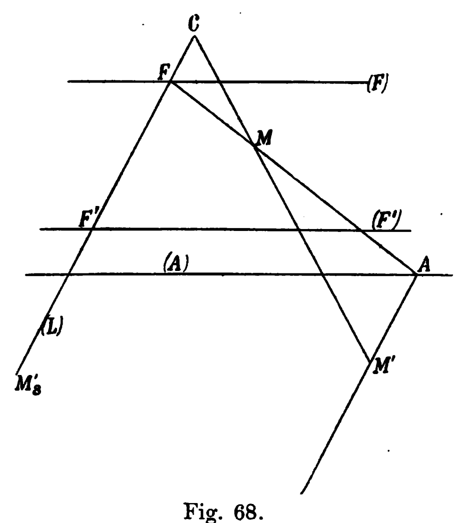


Fig. 68.

welcher die Fluchtlinie (F) im Punkte F trifft, verbinde hierauf F mit M durch eine Gerade und verlängere letztere bis zu ihrem Durchschnitte A mit (A). Die durch A gelegte Parallele zu (L) durchschneidet dann die Gerade CM in dem gesuchten Punkte M'.

Von selbst ergibt sich nun der Satz: Sind M_1, M_2, M_3 und M_1', M_2', M_3' die Ecken zweier Dreiecke, welche zu einander eine solche Lage haben, dass die Verbindungsgeraden $M_1 M_1'$, $M_2 M_2'$ und $M_3 M_3'$ der entsprechenden Ecken in einem und demselben Punkte C sich durchschneiden, so treffen sich die entsprechenden Seiten $M_1 M_2$, $M_1' M_2'$; $M_1 M_3$,

$M_1'M_3'$ und $M_2 M_3$, $M_2'M_3'$ in drei Punkten einer und derselben Geraden (A).

Geht man wieder zu den früher gefundenen Formeln (b) und (d) zurück, nach welchen zwischen den Coordinaten x_i, y_i von zwei einander entsprechenden Punkten x, y und den Coordinaten u_i, v_i von zwei einander entsprechenden Strahlen (u), (v) die linearen Beziehungen bestehen:

$$\varrho' y_i = \sigma x_i + \beta_i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3),$$
$$\nu' u_i = \sigma v_i + \alpha_i (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3)$$

und löst dieselben nach x_i, beziehungsweise v_i, $i = 1, 2, 3$, auf, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen die Gleichungen:

$$(g) \quad \begin{array}{l} \sigma (\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3 + \sigma)\, x_i = \varrho' (\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \\ \beta_3 \alpha_3 + \sigma)\, y_i - \varrho' \beta_i (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3), \end{array}$$

$$(h) \quad \begin{array}{l} \sigma (\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3 + \sigma)\, v_i = \nu' (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \\ \alpha_3 \beta_3 + \sigma)\, u_i - \nu' \alpha_i (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3), \end{array}$$

und diese lehren im Vereine mit den obigen, dass eine Vertauschungsfähigkeit der einander entsprechenden Elemente nur dann eintreten kann, wenn die Beziehung erfüllt erscheint:

$$(i) \quad \ldots \quad \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3 = -2\sigma,$$

und d. i. die Bedingung für die involutorische Collineation oder für die Involution von zwei ebenen Systemen.

Zum Schlusse dieses Paragraphen wird noch der Satz bewiesen, dass zwei collineare verwandte Systeme durch Parallelverschiebung und Drehung in ihrer Ebene in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden können, dass sie central-collinear sind.

Bei der Beweisführung dieses Satzes benütze man die früher gegebenen Gleichungen (316), ersetze jedoch darin x_1, x_2 und x_3 durch ξ, η und 1; y_1, y_2 und y_3 durch $(a + \xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi)$, $(b + \xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi)$ und 1, wobei noch bemerkt wird, dass ξ, η die Cartesischen Coordinaten irgend eines Punktes M des Systems I und ξ', η' jene des entsprechenden Punktes M' im System II bezeichnen, beide bezogen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem. Damit nehmen die Gleichungen zur Bestimmung

der Coordinaten ξ, η und ξ', η' der einander entsprechenden Punkte M und M' die Form an:

$$
(327)\quad
\begin{aligned}
\varrho\,(a + \xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi) &= a_{1,1}\,\xi + a_{1,2}\,\eta + a_{1,3} \\
\varrho\,(b + \xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi) &= a_{2,1}\,\xi + a_{2,2}\,\eta + a_{2,3} \\
\varrho \qquad\qquad\qquad\qquad &= a_{3,1}\,\xi + a_{3,2}\,\eta + a_{3,3},
\end{aligned}
$$

und hieraus ersieht man, dass jedem Wertesystem von ξ, η nur ein Wertesystem von ξ', η' entspricht, wie die collineare Verwandtschaft der beiden Systeme I und II es erfordert. Für diejenigen Punkte, welche sich selbst entsprechen, d. h. für die Doppelpunkte der Systeme I und II, ist in den obigen Gleichungen wieder $\xi' = \xi$ und $\eta' = \eta$ zu setzen, und erhält man sonach zur Berechnung der Coordinaten dieser tautologen Elemente die drei Gleichungen:

$$
(328)\quad
\begin{aligned}
(a_{1,1} - \varrho\cos\varphi)\,\xi + (a_{1,2} + \varrho\sin\varphi)\,\eta + (a_{1,3} - \varrho\, a) &= o \\
(a_{2,1} - \varrho\sin\varphi)\,\xi + (a_{2,2} - \varrho\cos\varphi)\,\eta + (a_{2,3} - \varrho\, b) &= o \\
a_{3,1}\,\xi + \qquad a_{3,2}\,\eta \qquad + (a_{3,3} - \varrho) &= o,
\end{aligned}
$$

in welchen die Coefficienten $a_{i,k}$, der Winkel φ und die Coordinaten a, b als gegeben anzusehen, dagegen ϱ, ξ und η zu suchen sind. Man eliminiere nun wieder ξ und η aus der Gleichungsgruppe (328) und erhält dadurch die bezüglich ϱ cubische Gleichung

$$
(329)\quad
\begin{vmatrix}
(a_{1,1} - \varrho\cos\varphi) & (a_{1,2} + \varrho\sin\varphi) & (a_{1,3} - \varrho\, a) \\
(a_{2,1} - \varrho\sin\varphi) & (a_{2,2} - \varrho\cos\varphi) & (a_{2,3} - \varrho\, b) \\
a_{3,1} & a_{3,2} & (a_{3,3} - \varrho)
\end{vmatrix} = o,
$$

welche drei Wurzeln besitzt, die auch hier mit ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 bezeichnet werden mögen. Substituiert man hierauf für ϱ einen dieser drei Werte, so erscheint jede der drei Gleichungen (328) als eine Folge der beiden übrigen, weshalb die dritte dieser Gleichungen wegzulassen ist, während die beiden übrigen zur Berechnung der Coordinaten ξ, η des betreffenden Doppelpunktes dienen.

Hat nun die Gleichung (329) eine Doppelwurzel σ, so ist die durch die Gleichungen (327) gegebene Collineation der beiden ebenen Systeme central und lassen sich dann, sobald man in den Gleichungen (328) $\varrho = \sigma$ setzt, dieselben auf eine einzige Gleichung zurückführen. Es lässt sich nun zeigen, dass für φ, a und b immer solche Werte möglich

erscheinen, welche der centralen Collineation entsprechen, gleichgiltig welche reelle Werte die Coefficienten $a_{i,k}$ besitzen. Zu diesem Zwecke gehe man von der Voraussetzung aus, dass die Gleichung (329) in der That eine Doppelwurzel $\varrho = \sigma$ hat, in welchem Fall es, nach dem bereits früher Gesagten, immer gestattet ist zu setzen:

$$(k)\quad \begin{array}{lll} a_{1,1} - \sigma\cos\varphi = \varkappa p\alpha & a_{2,1} - \sigma\sin\varphi = \varkappa q\alpha & a_{3,1} = \varkappa\alpha \\ a_{1,2} + \sigma\sin\varphi = \varkappa p\beta & a_{2,2} - \sigma\cos\varphi = \varkappa q\beta & a_{3,2} = \varkappa\beta \\ a_{1,3} - \sigma a \quad = \varkappa p, & a_{2,3} - \sigma b \quad = \varkappa q, & a_{3,3} - \sigma = \varkappa. \end{array}$$

Aus den in den beiden ersten Zeilen stehenden Gleichungen der Gruppe (k) folgt nun

$$\begin{array}{ll} a_{1,1} - \sigma\cos\varphi = p\,a_{3,1} & a_{2,1} - \sigma\sin\varphi = q\,.\,a_{3,1} \\ a_{1,2} + \sigma\sin\varphi = p\,a_{3,2}, & a_{2,2} - \sigma\cos\varphi = q\,.\,a_{3,2}. \end{array}$$

und hieraus ergeben sich durch die Elimination von p, beziehungsweise q, die zur Berechnung von φ und σ dienenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_{3,2}\,(\sigma\cos\varphi) + a_{3,1}\,(\sigma\sin\varphi) = a_{1,1}\,a_{3,2} - a_{1,2}\,a_{3,1} \\ a_{3,1}\,(\sigma\cos\varphi) - a_{3,2}\,(\sigma\sin\varphi) = a_{2,2}\,a_{3,1} - a_{2,1}\,a_{3,2}. \end{array}$$

Quadriert man nun dieselben und addiert sie hierauf, so folgt:

$$(l)\ .\ \sigma^2 = \frac{(a_{1,1}\,a_{3,2} - a_{1,2}\,a_{3,1})^2 + (a_{2,2}\,a_{3,1} - a_{2,1}\,a_{3,2})^2}{a_{3,1}^{\;2} + a_{3,2}^{\;2}},$$

während man durch die Auflösung obiger Gleichungen nach $\sigma\cos\varphi$ und $\sigma\sin\varphi$ erhält:

$$(m)\ldots\sigma\cos\varphi = \frac{a_{1,1}\,a_{3,2}^{\;2} - a_{3,1}\,a_{3,2}\,(a_{1,2} + a_{2,1}) + a_{2,2}\,a_{3,1}^{\;2}}{a_{3,1}^{\;2} + a_{3,2}^{\;2}},$$

$$\sigma\sin\varphi = \frac{a_{2,1}\,a_{3,2}^{\;2} + a_{3,1}\,a_{3,2}\,(a_{1,1} - a_{2,2}) - a_{1,2}\,a_{3,1}^{\;2}}{a_{3,1}^{\;2} + a_{3,2}^{\;2}},$$

womit zunächst σ, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus den neun Coefficienten $a_{i,k}$ bestimmt erscheinen. Nun kann man aber auch ohneweiters p und q berechnen, denn es ist ja

$$p = \frac{a_{1,1} - \sigma\cos\varphi}{a_{3,1}},\qquad q = \frac{a_{2,1} - \sigma\sin\varphi}{a_{3,1}},$$

und hieraus ergibt sich nach erfolgter Substitution der für $\sigma\cos\varphi$ und $\sigma\sin\varphi$ gefundenen Werte aus (m):

$$(n) \quad . \quad . \quad p = \frac{a_{3,1}\,(a_{1,1} - a_{2,2}) + a_{3,2}\,(a_{1,2} + a_{2,1})}{a_{3,1}^{\,2} + a_{3,2}^{\,2}},$$

$$q = \frac{a_{3,2}\,(a_{2,2} - a_{1,1}) + a_{3,1}\,(a_{1,2} + a_{2,1})}{a_{3,1}^{\,2} + a_{3,2}^{\,2}},$$

und sind somit σ, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, p und q bestimmt. Die Werte von $\varkappa$, a und b ergeben sich jetzt nach erfolgter Berechnung von σ, p und q aus den Gleichungen der dritten Zeile der Gruppe (k), und zwar ist nach diesen:

$$(o) \quad . \quad \varkappa = a_{3,3} - \sigma, \quad a = \frac{a_{1,3} - \varkappa p}{\sigma}, \quad b = \frac{a_{2,3} - \varkappa q}{\sigma},$$

womit nun alle hier vorkommenden Unbekannten gefunden erscheinen.

Aus dieser Entwickelung geht demnach hervor, dass die Überführung von zwei collinear verwandten, ebenen Systemen in eine solche Lage, bei welcher sie central collinear sind, auf zwei Arten möglich ist. Bei beiden Arten der Überführung ist das Collineationscentrum dasselbe; denn die Gleichung des letzteren lautet nach (e) und (k)

$$(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad pu + qv + 1 = o,$$

und weil p und q, wie ein Blick auf Gl. (n) zeigt, unabhängig von σ sind, so existiert wirklich nur ein Collineationscentrum. Anders verhält es sich mit den Collineationsachsen. Dieselben haben wohl einerlei Richtung, fallen aber nicht zusammen, indem, zufolge (c) und (k), die Gleichung der Collineationsachse in dem hier vorliegenden Fall ist

$$(q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha x + \beta y + 1 = o$$

und nach den Gleichungen (k)

$$(r) \quad . \quad . \quad \alpha = \frac{a_{3,1}}{a_{3,3} - \sigma}, \qquad \beta = \frac{a_{3,2}}{a_{3,3} - \sigma}$$

wird. Nachdem aber σ zwei Werte besitzt und $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a_{3,1}}{a_{3,2}}$ ist, sind die beiden Collineationsachsen wohl von einander verschieden, haben jedoch dieselbe Richtung.

§ 51. Affinität, Ähnlichkeit und Congruenz.

Affinität. Die Affinität ist ein specieller Fall der centralen Collineation, indem hier das Centrum der Collineation in unendlicher Ferne liegt. Stellt somit wieder M_1, M_1' ein

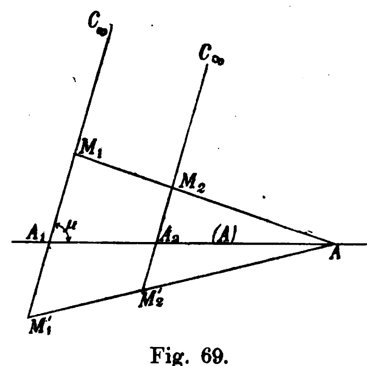


Fig. 69.

Paar entsprechender Punkte (Fig. 69) dar, so ist nach dem bei der centralen Collineation bereits Vorgeführten, sobald noch A_1 den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden M_1M_1' mit der Collineationsachse (A) repräsentiert, das Doppelverhältnis

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad (C_\infty A_1 M_1 M_1') = K,$$

wo K eine Constante ist, die für jedes Paar entsprechender Punkte in der Geraden $C_\infty A_1$ denselben Wert besitzt. Nun ist aber das Doppelverhältnis $(C_\infty A_1 M_1 M_1') = (C_\infty A_1 M_1):$
$(C_\infty A_1 M_1') = \frac{C_\infty M_1}{A_1 M_1} : \frac{C_\infty M_1'}{A_1 M_1'} = \frac{C_\infty M_1 \,.\, A_1 M_1'}{C_\infty M_1' \,.\, A_1 M_1} = \frac{M_1 C_\infty}{M_1' C_\infty} \cdot$
$\frac{M_1' A_1}{M_1 A_1}$ und wird folglich, weil ja $\frac{M_1 C_\infty}{M_1' C_\infty} = (M_1 M_1' C_\infty) = 1$
ist, $(C_\infty A_1 M_1 M_1') = \frac{M_1' A_1}{M_1 A_1}$, somit nach obiger Gleichung (a)

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{M_1 A_1}{M_1' A_1} = \frac{1}{K},$$

und man erkennt demnach, dass zwei einander entsprechende Punktreihen hier ähnlich sind. Selbstverständlich ist die Affinität von zwei ebenen Systemen I und II gegeben durch die Angabe der Achse (A) der Collineation, welche hier insbesondere die Achse der Affinität heißt, und durch ein Paar entsprechender Punkte M_1, M_1'. Zu irgend einem Punkte M_2 des Systems I wird nun der entsprechende Punkt M_2' im System II gefunden, wenn man den Punkt A, in welchem die Verbindungsgerade M_1M_2 die Achse (A) der Affinität durchschneidet, verbindet mit dem Punkte M_1' und diese Gerade zum Schnitte bringt mit der durch M_2 gezogenen Parallelen zur Geraden M_1M_1'. Es ist klar, dass jedem Werte des in (b) erscheinenden Quotienten $\frac{M_1 A_1}{M_1' A_1} = \frac{1}{K}$ eine bestimmte Affinität entspricht. In dem besonderen Fall, wo der in Fig. 69 angegebene Winkel $\mu = \frac{\pi}{2}$ ist,

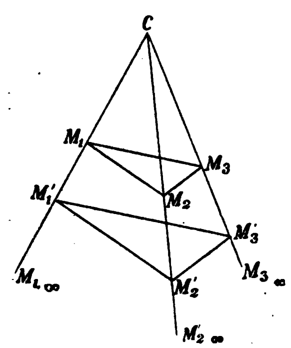


Fig. 70.

heißt die Affinität orthogonal. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass bei der Affinität die beiden Fluchtlinien mit der unendlich fernen Geraden (L_∞) der gemeinsamen Ebene beider Systeme identisch erscheinen.

Ähnlichkeit. Zwei central collineare verwandte Systeme sind ähnlich, wenn die Achse der Collineation mit der unendlich fernen Geraden der gemeinsamen Ebene beider Systeme identisch erscheint. Sind somit M_1, M_1' und M_2, M_2' in Fig. 70 zwei Paare entsprechender Punkte, so erscheinen die Verbindungsgeraden $M_1 M_2$ und $M_1' M_2'$ zu einander parallel gerichtet und ist diese Art der centralen Collineation von zwei ebenen Systemen I und II bestimmt durch die Angabe des Collineationscentrums und eines Paars entsprechender Punkte. Repräsentiert ferner $M_{1,\infty}$ den unendlich fernen Punkt der Geraden $M_1 M_1'$, so ist auch hier wieder

$$(c) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (C M_{1,\infty} M_1 M_1') = K,$$

und weil das Doppelverhältnis

$$(C M_{1,\infty} M_1 M_1') = (C M_{1,\infty} M_1) : (C M_{1,\infty} M_1') = \frac{C M_1}{M_{1,\infty} M_1} : \frac{C M_1'}{M_{1,\infty} M_1'} = \frac{C M_1 \,.\, M_{1,\infty} M_1'}{C M_1' \,.\, M_{1,\infty} M_1} = \frac{M_1 C \,.\, M_1' M_{1,\infty}}{M_1' C \,.\, M_1 M_{1,\infty}} = (M_1 M_1' C)$$

$$(M_1' M_1 M_{1,\infty}) = (M_1 M_1' C)$$

ist, so wird schließlich

$$(d) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{M_1 C}{M_1' C} = K,$$

und hieraus erkennt man (siehe § 39), dass zwei einander entsprechende Punktreihen ähnlich sind. Um schließlich zu einem gegebenen Punkte M_2 den entsprechenden Punkt M_2' zu finden, ziehe man durch M_1' eine Parallele zur Geraden $M_1 M_2$, verbinde M_2 durch eine Gerade mit C und ermittle den Durchschnitt dieser beiden Geraden.

Congruenz. Liegt das Collineationscentrum C und die Achse der Collineation unendlich weit, so sind die beiden collinearen Systeme congruent. Es ist klar, dass die Congruenz bestimmt ist durch ein Paar entsprechender Punkte.

§ 52. Reciprocität ebener Systeme.

Auch hier sollen die Träger $[E]$ und $[E']$ der beiden reciprok verwandten ebenen Systeme I und II als zusammenfallend angenommen werden. Nachdem bei der Reciprocität einem Punkte des einen Systems ein Strahl des anderen entspricht und umgekehrt, so seien im Sinne dieser Art der Verwandtschaft x_i, $i = 1, 2, 3$, die trimetrischen Coordinaten irgend eines Punktes x des Systems I und v_i, $i = 1, 2, 3$, die trigonalen Coordinaten desjenigen Strahls (v), welcher im System II dem Punkte x entspricht, beide bezogen auf dasselbe Coordinatendreieck. Dann müssen zwischen diesen Coordinaten die linearen Beziehungen bestehen:

$$(330) \quad \begin{aligned} \varrho v_1 &= a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 \\ \varrho v_2 &= a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3 \\ \varrho v_3 &= a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + a_{3,3} x_3, \end{aligned}$$

in welchen ϱ einen Proportionalfactor darstellt, während $a_{i,k}$ neun gegebene Coefficienten sind. Aus den eben gegebenen drei Gleichungen (330) folgt, sobald man sie der Reihe nach mit den Coefficienten $A_{1,k}$, $A_{2,k}$, $A_{3,k}$ — $k = 1, 2, 3$ — multipliciert, welche die in § 27 angegebene Bedeutung haben, hierauf addiert und noch an Stelle des Quotienten $\frac{A}{\varrho}$ den Proportionalfactor σ einführt:

$$(331) \quad \begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{1,1} v_1 + A_{2,1} v_2 + A_{3,1} v_3 \\ \sigma x_2 &= A_{1,2} v_1 + A_{2,2} v_2 + A_{3,2} v_3 \\ \sigma x_3 &= A_{1,3} v_1 + A_{2,3} v_2 + A_{3,3} v_3. \end{aligned}$$

Um nun auch eine Beziehung zwischen den Coordinaten u_i einer dem System I angehörigen Geraden (u) und jenen y_i des Punktes y zu erhalten, welcher im System II der Geraden (u) entspricht, bestimme man den geometrischen Ort derjenigen Strahlen (v), welche den in der Geraden (u) liegenden Punkten x entsprechen. Die Gleichung des Strahls (u) ist nun

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$$

und aus dieser folgt, sobald man für x_1, x_2 und x_3 die in den Gleichungen (331) gegebenen Werte einführt und hierauf die Glieder mit v_1, v_2 und v_3 zusammenzieht,

$$v_1 \Sigma A_{1,k} u_k + v_2 \Sigma A_{2,k} u_k + v_3 \Sigma A_{3,k} u_k = o,$$

woraus man erkennt, dass der fragliche geometrische Ort der Strahlen (v), welche im System II den in der Geraden (u) des Systems I liegenden Punkten entsprechen, ein Punkt y ist, dessen Coordinaten y_i zu den Coordinaten u_i der Geraden (u) in der Beziehung stehen:

$$(332) \quad \begin{aligned} \mu y_1 &= A_{1,1} u_1 + A_{1,2} u_2 + A_{1,3} u_3 \\ \mu y_2 &= A_{2,1} u_1 + A_{2,2} u_2 + A_{2,3} u_3 \\ \mu y_3 &= A_{3,1} u_1 + A_{3,2} u_2 + A_{3,3} u_3, \end{aligned}$$

wenn noch μ ein Proportionalfactor ist. Aus den drei letzten Gleichungen ergeben sich endlich, sobald man dieselben der Reihe nach mit $a_{1,k}$, $a_{2,k}$, $a_{3,k}$ — $k = 1, 2, 3$ — multipliciert, hierauf addiert und endlich den Quotienten $\frac{A}{\mu}$ ersetzt durch den Proportionalfactor v, die drei neuen Relationen:

$$(333) \quad \begin{aligned} v u_1 &= a_{1,1} y_1 + a_{2,1} y_2 + a_{3,1} y_3 \\ v u_2 &= a_{1,2} y_1 + a_{2,2} y_2 + a_{3,2} y_3 \\ v u_3 &= a_{1,3} y_1 + a_{2,3} y_2 + a_{3,3} y_3. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (330) lehren wieder, dass die reciproke Verwandtschaft von zwei ebenen Systemen eindeutig bestimmt ist, sobald man vier Paare einander entsprechender Elemente kennt. Ferner lassen sich in sehr einfacher Weise die beiden zu einander reciproken Sätze nachweisen, nämlich:

Dem Punkte x in I von den Coordinaten $x_i = x_i' - \lambda x_i''$ entspricht in II ein Strahl (v) von den Coordinaten $v_i = v_i' - \lambda m v_i''$,

Dem Strahl (u) in I von den Coordinaten $u_i = u_i' - \lambda u_i''$ entspricht in II ein Punkt y von den Coordinaten $y_i = y_i' - \lambda m y_i''$,

$i = 1, 2, 3$, wenn m ein von λ unabhängiger Coefficient ist.

Beweis. Die Coordinaten v_i des dem Punkte x entsprechenden Strahls (v) re-

Beweis. Die Coordinaten y_i des dem Strahl (u) entsprechenden Punktes y resul-

sultieren nach den Gleichungen (330) aus

$\varrho v_i = a_{i,1}(x_1' - \lambda x_1'') + a_{i,2}(x_2' - \lambda x_2'') + a_{i,3}(x_3' - \lambda x_3''),$

tieren nach den Gleichungen (332) aus

$\mu y_i = A_{i,1}(u_1' - \lambda u_1'') + A_{i,2}(u_2' - \lambda u_2'') + A_{i,3}(u_3' - \lambda u_3''),$

wofür man auch schreiben kann

$\varrho v_i = \varrho' v_i' - \lambda \varrho'' v_i'', \quad i = 1, 2, 3 \quad \mu y_i = \mu' y_i' - \lambda \mu'' y_i'',$

wenn v_i', v_i'' die Coordinaten derjenigen Strahlen (v'), (v'') in II sind, die den zu I gehörigen Punkten x', x'' von den Coordinaten x_i', x_i'' entsprechen, und diese Gleichungen können wieder ersetzt werden durch

$$v_i = v_i' - \lambda m v_i''.$$

wenn y_i', y_i'' die Coordinaten derjenigen Punkte y', y'' in II sind, die den zu I gehörigen Strahlen (u'), (u'') von den Coordinaten u_i', u_i'' entsprechen, und diese Gleichungen können wieder ersetzt werden durch

$$y_i = y_i' - \lambda m y_i''.$$

Von selbst folgen nun aus dem eben Bewiesenen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der in § 33 gegebenen Gleichungen (231) die beiden weiteren Sätze:

Einer Punktreihe von I entepricht in II ein zu dieser Reihe projectivischer Strahlenbüschel.

Einem Strahlenbüschel von I entspricht in II eine zu diesem Büschel projectivische Punktreihe.

Satz. Sind zwei ebene Systeme reciprok verwandt, so entspricht einer algebraischen Curve $n$ter Ordnung des einen Systems eine algebraische Curve $n$ter Classe des anderen.

Satz. Sind zwei ebene Systeme reciprok verwandt, so entspricht einer algebraischen Curve $n$ter Classe des einen Systems eine algebraische Curve $n$ter Ordnung des anderen.

Beweis.***) Es sei $f(x_1 x_2 x_3) = o$ die Gleichung derjenigen algebraischen Curve $n$ter Ordnung, welche ein Punkt in der Ebene [E] des

Beweis.***) Es sei $\varphi(u_1 u_2 u_3) = o$ die Gleichungen derjenigen algebraischen Curve $n$ter Classe, welche ein Strahl (u) des Systems I in der Ebene

***) Im § 44 wurden die Gleichungen dieser Curven bereits angegeben.

Systems I beschreibt. Der dem Punkte x entsprechende Strahl (v) des Systems II beschreibt dann in der Ebene $[E']$ ebenfalls eine Curve, deren Gleichung gefunden wird, sobald man in $f(x_1 x_2 x_3) = o$ die Coordinaten x_1, x_2 und x_3 ersetzt durch die in den Gleichungen (331) gegebenen Werte, wodurch eine Gleichung sich ergibt von der Form $F(v_1 v_2 v_3) = o$, die in Bezug auf v_1, v_2 und v_3, vermöge der linearen und homogenen Beschaffenheit der Formeln (331), ebenfalls homogen und vom Grade n erscheint, weshalb auch die von dem Strahl (v) beschriebene Curve algebraisch und $n$ter Classe ist.

$[E]$ beschreibt. Der dem Strahl (u) entsprechende Punkt y des Systems II beschreibt dann in der Ebene $[E']$ ebenfalls eine Curve, deren Gleichung gefunden wird, sobald man in $\varphi(u_1 u_2 u_3) = o$ die Coordinaten u_1, u_2 und u_3 ersetzt durch die in den Gleichungen (333) gegebenen Werte, wodurch eine Gleichung sich ergibt von der Form $\Phi(y_1 y_2 y_3) = o$, die in Bezug auf y_1, y_2 und y_3, vermöge der linearen und homogenen Beschaffenheit der Formeln (333), ebenfalls homogen und vom Grade n erscheint, weshalb auch die von dem Punkte y beschriebene Curve algebraisch und von der $n$ten Ordnung ist.

Es erscheint hier am Platze, noch die nachfolgenden Sätze beizufügen.

Satz. Sind zwei ebene Systeme I und II zu einem dritten System III collinear verwandt, so sind sie unter einander collinear, und ganz dasselbe gilt auch dann noch, wenn I und II zu III reciprok verwandt erscheinen.

Beweis. In dem ersten Fall entspricht nämlich einem Punkte z von III der Punkt x von I und der Punkt y von II, weshalb x in I und y in II ein Paar entsprechender Punkte darstellen und somit jedem Punkte von I ein Punkt von II entspricht, wie es die collineare Verwandtschaft erfordert. Ganz dasselbe gilt aber auch von dem zweiten Fall. Ist nämlich hier (w) ein Strahl des Systems III, so entspricht demselben, vermöge der vorausgesetzten reciproken Verwandtschaft von I und III, II und III, ein Punkt x in I

und ein Punkt y in II, weshalb auch diesmal x und y ein Paar entsprechender Punkte von I und II angeben.

Satz. Sind die ebenen Systeme I und III collinear, jene II und III aber reciprok verwandt, so sind I und II reciprok verwandt.

Beweis. Hier entspricht einem Strahl (w) von III der Strahl (u) von I und der Punkt y von II, weshalb (u) und y ebenfalls ein Paar entsprechender Elemente von I und II repräsentieren, wie die reciproke Verwandtschaft es bedingt.

Zum Schlusse dieses Paragraphen mag noch der geometrische Ort derjenigen Punkte x des Systems I (oder y des Systems II) bestimmt werden, welche zu den entsprechenden Strahlen (v) im System II (oder entsprechenden Strahlen (u) im System I) eine perspectivische Lage haben, d. h. in diesen Strahlen zu liegen kommen. Nachdem der Punkt x in der Geraden (v) liegt, besteht zwischen den Coordinaten x_i und v_i dieser beiden Elemente die Beziehung (siehe Gl. (154) in § 27)

$$(a) \quad . \; . \; . \qquad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = o$$

und aus dieser ergibt sich, sobald man für v_1, v_2 und v_3 die in den Gleichungen (330) gegebenen Werte substituiert, die Gleichung:

$$(334) \; . \; . \quad \begin{array}{l} U \equiv a_{1,1}{}^{2} x_1{}^{2} + (a_{1,2} + a_{2,1})\, x_1 x_2 + a_{2,2}\, x_2{}^{2} + \\ (a_{1,3} + a_{3,1})\, x_1 x_3 + (a_{2,3} + a_{3,2})\, x_2 x_3 + a_{3,3}\, x_3{}^{2} = o, \end{array}$$

welcher die Coordinaten x_i aller jener Punkte x von I (oder y von II) zu genügen haben, deren entsprechende Strahlen (v) — oder (u) — durch sie gehen. Nun ist aber obige Gleichung, bezüglich x_1, x_2 und x_3, homogen und vom 2. Grade, daher ist der geometrische Ort der Punkte x — oder y — eine Curve 2. Ordnung oder ein Kegelschnitt. Mittelst der Gleichung (a) lässt sich aber auch gleichzeitig der geometrische Ort der Strahlen (v) — oder (u) — ermitteln, welche die ihnen entsprechenden Punkte des anderen Systems enthalten; man braucht ja blos darin x_1, x_2 und x_3 zu ersetzen durch die aus den Gleichungen (331) fließenden Werte, wodurch man die Gleichung erhält:

$$(335) \ldots \begin{array}{l} \Sigma = A_{1,1} v_1^2 + (A_{1,2} + A_{2,1}) v_1 v_2 + A_{2,2} v_2^2 + \\ (A_{1,3} + A_{3,1}) v_1 v_3 + (A_{2,3} + A_{3,2}) v_2 v_3 + A_{3,3} v_3^2 = o, \end{array}$$

und weil letztere bezüglich v_1, v_2 und v_3 ebenfalls homogen und vom 2. Grade ist, so ist der geometrische Ort der Strahlen (v) — oder (u) — eine Curve 2. Classe oder ein Kegelschnitt.***) Man nennt die beiden eben bestimmten Kegelschnitte die Ordnungscurven von zwei in derselben Ebene liegenden reciproken Systemen, und man kann noch $U = o$ den Polkegelschnitt und $\Sigma = o$ den Polarkegelschnitt heißen.

§ 53. Das Polarsystem.

Zum Schlusse dieses Capitels untersuchen wir noch die reciproke Verwandtschaft von zwei ebenen Systemen *I* und *II* unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass die Coefficienten $a_{i,k}$, welche in den Gleichungen (330) vorkommen, der Bedingung unterworfen sind $a_{i,k} = a_{k,i}$. Dadurch wird die aus den neun Coefficienten gebildete 3^2 elementige Determinante A symmetrisch und folglich nach einer bekannten Eigenschaft symmetrischer Determinanten auch $A_{i,k} = A_{k,i}$, weshalb die bei der Reciprocität ebener Systeme gegebenen Gleichungen (330) bis (333) die Form annehmen:

$$\begin{array}{ll} \varrho v_1 = a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 & \sigma x_1 = A_{1,1} v_1 + A_{1,2} v_2 + A_{1,3} v_3 \\ \varrho v_2 = a_{1,2} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3 & \sigma x_2 = A_{1,2} v_1 + A_{2,2} v_2 + A_{2,3} v_3 \\ \varrho v_3 = a_{1,3} x_1 + a_{2,3} x_2 + a_{3,3} x_3, & \sigma x_3 = A_{1,3} v_1 + A_{2,3} v_2 + A_{3,3} v_3, \\ \mu y_1 = A_{1,1} u_1 + A_{1,2} u_2 + A_{1,3} u_3 & \nu u_1 = a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + a_{1,3} y_3 \\ \mu y_2 = A_{1,2} u_1 + A_{2,2} u_2 + A_{2,3} u_3 & \nu u_2 = a_{1,2} y_1 + a_{2,2} y_2 + a_{2,3} y_3 \\ \mu y_3 = A_{1,3} u_1 + A_{2,3} u_2 + A_{3,3} u_3, & \nu u_3 = a_{1,3} y_1 + a_{2,3} y_2 + a_{3,3} y_3, \end{array}$$

und hieraus folgt, dass für $x_i = y_i$ auch $v_i = u_i$ und für $u_i = v_i$ auch $y_i = x_i$ wird, d. h., es entspricht einem Punkte M des einen Systems eine Gerade (P) des anderen, gleichgiltig ob hierbei der Punkt M als zu *I* oder zu *II* gehörig betrachtet wird; ebenso entspricht einer Geraden (P)

***) Es wird später gezeigt werden, dass eine Curve 2. Ordnung gleichzeitig eine Curve 2. Classe ist, weshalb man diesen beiden Curven einen gemeinsamen Namen ertheilt, u. zw. heißen sie Kegelschnitte, weil sie durch den Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene entstehen.

des einen Systems ein Punkt M des anderen, und es ist auch hier wieder gleichgiltig, ob (P) dem System I oder II angehört. Man kann daher sagen, es entspricht dem Punkte x von dem Coordinaten x_i, $i = 1, 2, 3$, eine Gerade (u), deren Coordinaten u_i resultieren aus:

$$(336) \quad \begin{aligned} \varrho u_1 &= a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 \\ \varrho u_2 &= a_{1,2} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3 \\ \varrho u_3 &= a_{1,3} x_1 + a_{2,3} x_2 + a_{3,3} x_3, \end{aligned}$$

und umgekehrt entspricht der Geraden (u) von den Coordinaten u_i, $i = 1, 2, 3$, ein Punkt x, dessen Coordinaten x_i sich ergeben aus

$$(337) \quad \begin{aligned} \mu x_1 &= A_{1,1} u_1 + A_{1,2} u_2 + A_{1,3} u_3 \\ \mu x_2 &= A_{1,2} u_1 + A_{2,2} u_2 + A_{2,3} u_3 \\ \mu x_3 &= A_{1,3} u_1 + A_{2,3} u_2 + A_{3,3} u_3. \end{aligned}$$

Gleichzeitig wird noch bemerkt, dass die drei letzten Gleichungen aus den drei ersten hervorgehen, sobald man diese mit den Coefficienten $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}$; beziehungsweise $A_{1,2}, A_{2,2}, A_{2,3}$ oder $A_{1,3}, A_{2,3}, A_{3,3}$ multipliciert und hierauf addiert. Ferner lehrt diese Betrachtung, dass der Punkt x und die demselben entsprechende Gerade (u) ein festes System bilden und das eine Element dieses Systems eindeutig bestimmt erscheint, sobald das andere angegeben ist. Man nennt nun in der Geometrie die durch die Gleichungen (336) bestimmte Gerade (u) die Polare des Punktes x, dagegen letzteren den Pol der ersteren; beide zusammen bilden das Polarsystem. Es ist klar, dass der feste Zusammenhang zwischen x und (u) gegeben ist durch die drei Gleichungen (336) oder die hieraus folgenden (337).

Im Anschlusse mag noch der geometrische Ort jener Punkte ermittelt werden, deren Polaren durch sie hindurchgehen. Ist zu diesem Zwecke die Polare (u) des Punktes x eine Gerade aus letzterem, so besteht zwischen den Coordinaten u_i und x_i die Beziehung (Siehe Gl. (154) in § 27)

$$(a) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$$

und aus dieser folgt, wenn man für u_1, u_2 und u_3 die in den Gleichungen (336) gegebenen Werte substituiert,

$$(338) \ldots \quad \begin{aligned} a_{1,1} x_1^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2 + 2 a_{1,3} x_1 x_3 + \\ 2 a_{2,3} x_2 x_3 + a_{3,3} x_3^2 = o, \end{aligned}$$

d. h. der fragliche geometrische Ort der Punkte x ist eine Curve 2. Ord. oder ein Kegelschnitt, und diese Curve heißt auch die Grundcurve oder Ordnungscurve des Polarsystems. Nun kann man aber auch in (a) für x_1, x_2 und x_3 die in den Gleichungen (337) angegebenen Werte einführen und erhält dann

$$(339) \ldots \quad \begin{aligned} A_{1,1} u_1^2 + 2 A_{1,2} u_1 u_2 + A_{2,2} u_2^2 + 2 A_{1,3} u_1 u_3 + \\ 2 A_{2,3} u_2 u_3 + A_{3,3} u_3^2 = o, \end{aligned}$$

welche eine Curve 2. Classe, also wieder einen Kegelschnitt, darstellt, und diese Curve wird umhüllt von denjenigen Geraden, deren Pole in den letzteren zu liegen kommen. Es ist mithin an sich klar, dass die beiden letzten Gleichungen eine und dieselbe Curve repräsentieren. Wir werden bei den Kegelschnitten auf das hier betrachtete Polarsystem noch einmal, jedoch viel eingehender, zurückkommen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über Kegelschnitte.

Capitel X.

Einleitung.

§ 54. Gleichung der Curven 2. Ordnung und 2. Classe.

Die allgemeine Gleichung der Curven 2. Ordnung lautet in gebräuchlichen Punktcoordinaten

$$U \equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = o, \quad (340)$$

in trimetrischen Punktcoordinaten nach den in § 25 gegebenen Beziehungen zwischen x, y und x_1, x_2, x_3

$$U \equiv a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o, \quad (342)$$

Die allgemeine Gleichung der Curven 2. Classe lautet in gebräuchlichen Liniencoordinaten

$$\Sigma \equiv \alpha_{1,1}u^2 + 2\alpha_{1,2}uv + \alpha_{2,2}v^2 + 2\alpha_{1,3}u + 2\alpha_{2,3}v + \alpha_{3,3} = o, \quad (341)$$

in trigonalen Liniencoordinaten nach den in § 26 gefundenen Relationen zwischen u, v und u_1, u_2, u_3

$$\Sigma \equiv \alpha_{1,1}u_1^2 + 2\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,2}u_2^2 + 2\alpha_{1,3}u_1u_3 + 2\alpha_{2,3}u_2u_3 + \alpha_{3,3}u_3^2 = o, \quad (343)$$

wobei noch bemerkt wird, dass die Coefficienten $a_{i,k}$ und $\alpha_{i,k}$ in den beiden letzten Gleichungen für eine und dieselbe Curve andere Werte besitzen als in den vorangeschickten Gleichungen (340) und (341). Bei den folgenden Untersuchungen werden wir auch manchmal die Gleichungen (342) und (343) ersetzen durch die folgenden

$$f(x_1x_2x_3) = o. \qquad | \qquad \varphi(u_1u_2u_3) = o.$$

Es ist hier am Platze, einige algebraische Eigenschaften der Gleichungspolynome U, V — ternären Formen U, V — vorzuführen. Setzt man nämlich in dem Folgenden,

unter der ausdrücklichen Annahme, dass $a_{i,k} = a_{k,i}$ und $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$ ist,

$$(a) \quad U_i = 2(a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + a_{i,3} x_3) \quad i = 1, 2, 3 \quad \Sigma_i = 2(\alpha_{i,1} u_1 + \alpha_{i,2} u_2 + \alpha_{i,3} u_3); \quad (b)$$

d. h. bezeichnet man den partiellen Differentialquotienten von U, genommen nach x_i, mit U_i, jenen von Σ, genommen nach u_i, aber mit Σ_i, so ist, wie nach der bekannten Euler'schen Formel: $2\,\psi(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = \xi_1 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}$ folgt, in welcher $\psi(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ eine homogene Function 2. Grades von ξ_i repräsentiert,

$$(c) \quad 2U = U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3, \quad \Big| \quad 2\Sigma = \Sigma_1 u_1 + \Sigma_2 u_2 + \Sigma_3 u_3 \quad (d)$$

ferner, sobald man noch die Bezeichnung wählt

$$U_i(\varrho) = 2(a_{i,1} x_1(\varrho) + a_{i,2} x_2(\varrho) + a_{i,3} x_3(\varrho)), \quad i = 1, 2, 3 \quad \Sigma_i(\varrho) = 2(\alpha_{i,1} u_1(\varrho) + \alpha_{i,2} u_2(\varrho) + \alpha_{i,3} u_3(\varrho)),$$

$$(e) \quad U_1' x_1'' + U_2' x_2'' + U_3' x_3'' = U_1'' x_1' + U_2'' x_2' + U_3'' x_3'. \quad \Big| \quad \Sigma_1' u_1'' + \Sigma_2' u_2'' + \Sigma_3' u_3'' = \Sigma_1'' u_1' + \Sigma_2'' u_2' + \Sigma_3'' u_3'. \quad (f)$$

Von ganz besonderer Wichtigkeit für die späteren Untersuchungen der durch die Gleichungen $U = o$, respective $\Sigma = o$, dargestellten Curven, sind die aus den sechs Coefficienten $a_{i,k}$, beziehungsweise $\alpha_{i,k}$, gebildeten symmetrischen Determinanten, weshalb wir dieselben auch mit eigenen Symbolen bezeichnen, und zwar setzen wir:

$$(g) \quad A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + 2a_{1,2} a_{1,3} a_{2,3} - a_{1,1} a_{2,3}^2 - a_{2,2} a_{1,3}^2 - a_{3,3} a_{1,2}^2.$$

$$E = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \alpha_{3,3} + 2\alpha_{1,2} \alpha_{1,3} \alpha_{2,3} - \alpha_{1,1} \alpha_{2,3}^2 - \alpha_{2,2} \alpha_{1,3}^2 - \alpha_{3,3} \alpha_{1,2}^2. \quad (h)$$

Diese Determinanten sind gleichzeitig die Discriminanten der ternären Formen U und Σ; denn eliminiert man aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = o, \; \frac{\partial U}{\partial x_2} = o, \; \frac{\partial U}{\partial x_3} = o \quad \Big| \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial u_1} = o, \; \frac{\partial \Sigma}{\partial u_2} = o, \; \frac{\partial \Sigma}{\partial u_3} = o$$

die Coordinaten x_1, x_2, x_3, beziehungsweise u_1, u_2, u_3, so ergibt sich

$$A = o \quad \Big| \quad E = o$$

als das Resultat der Elimination, und diese Gleichungen bestätigen nach dem bekannten Begriffe der Discriminante die Richtigkeit der Behauptung.***)

§ 55. Gleichung einer durch fünf Punkte bestimmten Curve 2. Ordn. und reciproke Aufgabe.

Die früheren Gleichungen (342) und (343) enthalten je sechs von einander unabhängige Coefficienten $a_{i,k}$, beziehungsweise $\alpha_{i,k}$, und diese können übrigens, wenn man die diesbezüglichen Gleichungen durch einen derselben dividiert, auf fünf reduciert werden. Nachdem nun für die Coordinaten

$x_i(\varrho)$ eines Punktes $M(\varrho)$ der durch (342) gegebenen Ortscurve das Gleichungspolynom $f(x_1 x_2 x_3)$ verschwindet, liefert ein jeder Curvenpunkt eine lineare Gleichung zur Berechnung der Coefficienten $a_{i,k}$. Sind daher x_i', $x_i''\ldots x_i^V$ die Coordinaten von fünf gegebenen Punkten M', $M''\ldots M^V$ einer Curve 2. Ordnung

$$f(x_1 x_2 x_3) = o,$$

$u_i(\varrho)$ einer Tangente $(T(\varrho))$ der durch (343) gegebenen Classencurve das Gleichungspolynom $\varphi(u_1 u_2 u_3)$ verschwindet, liefert eine jede Tangente der Curve eine lineare Gleichung zur Berechnung der Coefficienten $\alpha_{i,k}$. Sind daher u_i', $u_i''\ldots u_i^V$ die Coordinaten von fünf gegebenen Tangenten (T'), $(T'')\ldots(T^V)$ einer Curve 2. Classe

$$\varphi(u_1 u_2 u_3) = o,$$

so treten die fünf Gleichungen in Kraft

$f(x_1' x_2' x_3') = o$, $f(x_1'' x_2'' x_3'') = o \ldots f(x_1^V x_2^V x_3^V) = o$,

$\varphi(u_1' u_2' u_3') = o$, $\varphi(u_1'' u_2'' u_3'') = o \ldots \varphi(u_1^V u_2^V u_3^V) = o$,

und aus diesen und der obigen Gleichung kann man die sechs Coefficienten $a_{i,k}$, respective $\alpha_{i,k}$, eliminieren, wodurch man erhält

***) Unter der Disciminante einer homogenen Function $\psi(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ versteht man die aus den in dieser Function vorkommenden Coefficienten gebildete Function, welche gleich null gesetzt, die Bedingung ausdrückt, unter welcher ein Wertesystem von $\frac{\xi_1}{\xi_3}$ und $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ existiert, welches den drei partialen Differentialgleichungen $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} = o$, $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} = o$, $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} = o$ gleichzeitig genügt.

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & x_1 x_2, & x_2^2, & x_1 x_3, \\ & x_2 x_3, & x_3^2 & \\ x_1'^2, & x_1' x_2', & x_2'^2, & x_1' x_3', \\ & x_2' x_3', & x_3'^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{V2}, & x_1^V x_2^V, & x_2^{V2}, & x_1^V x_3^V, \\ & x_2^V x_3^V, & x_3^{V2} & \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} u_1^2, & u_1 u_2, & u_2^2, & u_1 u_3, \\ & u_2 u_3, & u_3^2 & \\ u_1'^2, & u_1' u_2', & u_3'^2, & u_1' u_3', \\ & u_2' u_3', & u_3'^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{V2}, & u_1^V u_2^V, & u_3^{V2}, & u_1^V u_3^V, \\ & u_2^V u_3^V, & u_3^{V2} & \end{vmatrix} = o$$

als Gleichung der durch die fünf

Punkte M', M'' .... M^V bestimmten Curve 2. Ordnung,

Tangenten (T'), (T'')...(T^V) bestimmten Curve 2. Classe,

und diese kurze Betrachtung führt gleichzeitig zu dem wichtigen Satze:

Eine Curve 2. Ordnung erscheint eindeutig bestimmt durch fünf Punkte, und zwei Curven 2. Ordnung, welche fünf Punkte mit einander gemein haben, sind identisch.

Eine Curve 2. Classe erscheint eindeutig bestimmt durch fünf Tangenten, und zwei Curven 2. Classe, welche fünf Tangenten mit einander gemein haben, sind identisch.

§ 56. Schnitt einer Geraden mit einer Curve 2. Ordnung und Tangenten aus einem Punkte an eine Curve 2. Classe.

Die Gerade (L), deren Schnittpunkte mit der Curve 2. Ordnung $U = o$ bestimmt werden sollen, sei gegeben durch die Coordinaten x_i' und x_i'' zweier ihrer Punkte M' und M'', weshalb nach § 30, Gl. (181), die Coordinaten x_i irgend eines in (L) liegenden Punktes M

Der Punkt M, aus welchem die Tangenten an die Curve 2. Classe $\Sigma = o$ gelegt werden sollen, sei gegeben durch die Coordinaten u_i' und u_i'' zweier durch ihn gehenden Strahlen (L') und (L''), weshalb nach § 30, Gl. (182), die Coordinaten u_i irgend eines durch M gehenden Strahls (L)

resultieren aus

$$(a) \quad x_i = x_i' - \lambda x_i'', \quad i = 1, 2, 3, \quad u_i = u_i' - \lambda u_i'', \quad (b)$$

wenn λ ein Parameter ist, der für jeden Punkt von (L), beziehungsweise Strahl aus M, einen anderen Wert besitzt. Kennt man daher die Werte von λ, welche den

Punkten entsprechen, in welchen die Gerade (L) die Curve $U = o$ durchschneidet — oder die denjenigen Strahlen aus M angehören, welche die Curve $\Sigma = o$ berühren — so erscheint die Aufgabe gelöst. Behufs Aufsuchung dieser Werte des Parameters λ dient aber die Gleichung:

$a_{1,1}(x_1' - \lambda x_1'')^2 + 2a_{1,2}(x_1' - \lambda x_1'')(x_2' - \lambda x_2'') + a_{2,2}(x_2' - \lambda x_2'')^2 + 2a_{1,3}(x_1' - \lambda x_1'')(x_3' - \lambda x_3'') + 2a_{2,3}(x_2' - \lambda x_2'')(x_3' - \lambda x_3'') + a_{3,3}(x_3' - \lambda x_3'')^2 = o,$
indem die Coordinaten eines Schnittpunktes der Geraden (L) mit der Curve $U = o$ auch der letzten Gleichung zu genügen haben.

$\alpha_{1,1}(u_1' - \lambda u_1'')^2 + 2\alpha_{1,2}(u_1' - \lambda u_1'')(u_2' - \lambda u_2'') + \alpha_{2,2}(u_2' - \lambda u_2'')^2 + 2\alpha_{1,3}(u_1' - \lambda u_1'')(u_3' - \lambda u_3'') + 2\alpha_{2,3}(u_2' - \lambda u_2'')(u_3' - \lambda u_3'') + \alpha_{3,3}(u_3' - \lambda u_3'')^2 = o,$
indem die Coordinaten einer jeden aus dem Punkte M an die Curve $\Sigma = o$ gelegten Tangente auch die letzte Gleichung befriedigen müssen.

Führt man nun die in obiger Gleichung angedeutete Multiplication wirklich aus und ordnet dann dieselbe nach den fallenden Potanzen von λ, so ergibt sich die in λ quadratische Gleichung:

$$U''\lambda^2 - K\lambda + U' = o, \quad (344) \qquad \Sigma''\lambda^2 - R\lambda + \Sigma' = o, \quad (345)$$

wenn der Kürze wegen

$$(346) \quad U' = a_{1,1}x_1'^2 + 2a_{1,2}x_1'x_2' + \ldots + a_{3,3}x_3'^2, \quad U'' = a_{1,1}x_1''^2 + 2a_{1,2}x_1''x_2'' + \ldots + a_{3,3}x_3''^2, \quad K = U_1'x_1'' + U_2'x_2'' + U_3'x_3'' = U_1''x_1' + U_2''x_2' + U_3''x_3'$$

$$(347) \quad \Sigma' = \alpha_{1,1}u_1'^2 + 2\alpha_{1,2}u_1'u_2' + \ldots + \alpha_{3,3}u_3'^2, \quad \Sigma'' = \alpha_{1,1}u_1''^2 + 2\alpha_{1,2}u_1''u_2'' + \ldots + \alpha_{3,3}u_3''^2, \quad R = \Sigma_1'u_1'' + \Sigma_2'u_2'' + \Sigma_3'u_3'' = \Sigma_1''u_1' + \Sigma_2''u_2' + \Sigma_3''u_3'$$

gesetzt wird.

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln, welche reell und gesondert, reell und zusammenfallend, oder endlich imaginär und gesondert sein können, und damit ist auch gleichzeitig erwiesen der

Satz: Eine Curve 2. Ordnung wird von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten,

Satz: Aus einem Punkte gehen zwei Tangenten an eine Curve 2. Classe, und

und diese sind reell und gesondert, reell und zusammenfallend, oder endlich imaginär und gesondert.

Die Coordinaten der Schnittpunkte K' und K'' der Geraden (L) mit der Curve 2. Ordnung $U = o$ sind nun $x_i' - \lambda' x_i''$ und $x_i' - \lambda'' x_i''$.

diese sind reell und gesondert, reell und zusammenfallend, oder endlich imaginär und gesondert.

Die Coordinaten der Tangenten (T') und (T'') aus dem Punkte M an die Curve 2. Classe $\Sigma = o$ sind nun $u_i' - \lambda' u_i''$ und $u_i' - \lambda'' u_i''$.

§ 57. Singularitäten.

Es kann der Fall eintreten, dass das Gleichungspolynom U, oder jenes Σ, in zwei lineare Factoren sich zerlegen lässt, wo dann das geometrische Äquivalent von $U = o$ ein Geradenpaar, von $\Sigma = o$ aber ein Punktpaar ist. Dieser Fall spielt nun in der Geometrie der Kegelschnitte eine hervorragende Rolle, und wir beschäftigen uns daher nicht nur mit der Aufsuchung der Bedingung, welcher die Coefficienten $a_{i,k}$, respective $\alpha_{i,k}$, unterworfen sein müssen, damit $U = o$ ein Geradenpaar, beziehungsweise $\Sigma = o$ ein Punktpaar, darstellt, sondern auch noch mit der Ermittlung der Coordinaten der Elemente dieser Paare, sowie ihrer Träger. Es ist klar, dass der erste Theil der Frage gelöst erscheint, sobald es gelingt, die Frage zu beantworten, wann die homogene Gleichung zweiten Grades zwischen ξ_1, ξ_2 und ξ_3

$$(a) \quad \psi(\xi_1 \xi_2 \xi_3) \equiv b_{1,1}\,\xi_1^2 + 2\,b_{1,2}\,\xi_1\xi_2 + b_{2,2}\,\xi_2^2 + 2\,b_{1,3}\,\xi_1\xi_3 + 2\,b_{2,3}\,\xi_2\,\xi_3 + b_{3,3}\,\xi_3^2 = o$$

in zwei lineare und homogene Gleichungen zwischen ξ_1, ξ_2 und ξ_3 zerlegt werden kann. Lässt man alle Kunstgriffe bei Seite und löst zu diesem Zwecke obige Gleichung einfach nach einer der Größen ξ_i, z. B. nach ξ_1, auf, so erhält man

$$(b) \quad \xi_1 = \frac{-(b_{1,2}\,\xi_2 + b_{1,3}\,\xi_3) \pm}{b_{1,1}}$$
$$\frac{\sqrt{(b_{1,2}^2 - b_{1,1}b_{2,2})\xi_2^2 - 2(b_{1,1}b_{2,3} - b_{1,2}b_{1,3})\xi_2\xi_3 + (b_{1,3}^2 - b_{1,1}b_{3,3})\xi_3^2}}{b_{1,1}},$$

und es ist daher ersichtlich, dass die trenäre und quadratische

Form ψ ($\xi_1 \xi_2 \xi_3$) nur dann in zwei lineare Factoren sich zerlegen lässt, wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ein vollständiges Quadrat repräsentiert, d. h.

$$b_{1,1} b_{2,3} - b_{1,2} b_{1,3} = \sqrt{b_{1,2}^2 - b_{1,1} b_{2,2}} \cdot \sqrt{b_{1,3}^2 - b_{1,1} b_{3,3}}$$

ist, und hieraus ergibt sich nach einigen einfachen algebraischen Operationen

$$(c) \quad . \; . \quad \begin{aligned} B \equiv b_{1,1} b_{2,2} b_{3,3} + 2 b_{1,2} b_{1,3} b_{2,3} - b_{1,1} b_{2,3}^2 - \\ b_{2,2} b_{1,3}^2 - b_{3,3} b_{1,2}^2 = o. \end{aligned}$$

Die Gleichung (a) kann somit nur dann in zwei lineare und homogene Gleichungen zwischen den Veränderlichen ξ_i zerlegt werden, sobald die aus den sechs Coefficienten $b_{i,k}$ gebildete symmetrische Determinante B, oder was nach dem in § 54 bereits Gesagten dasselbe ist, die Discriminante der ternären Form ψ ($\xi_1 \; \xi_2 \; \xi_3$) verschwindet. Nimmt man nun an, es sei die Bedingung (c) wirklich erfüllt, so wird der unter dem Wurzelzeichen in (b) erscheinende Ausdruck gleich $(\xi_2 \sqrt{b_{1,2}^2 - b_{1,1} b_{2,2}} - \xi_3 \sqrt{b_{1,3}^2 - b_{1,1} b_{3,3}})^2$ und demnach, sobald man wieder voraussetzt, dass $B_{i,k}$ zu B in demselben Verhältnisse steht, wie in § 27 die Größe $A_{i,k}$ zu A,

$$\xi_1 = \frac{-(b_{1,2}\xi_2 + b_{1,3}\xi_3) \pm (\xi_2 \sqrt{-B_{3,3}} - \xi_3 \sqrt{-B_{2,2}})}{b_{1,1}},$$

und sind sonach die beiden linearen Gleichungen, auf welche (a) sich zurückführen lässt, bestimmt. Nun ist es aber keineswegs nothwendig, dass man die gegebene Gleichung (a) gerade nach ξ_1 auflöst; im Gegentheil hätte man dieselbe auch nach ξ_2 oder ξ_3 auflösen können, wo sich dann, unter der Voraussetzung $B = o$, je zwei lineare Gleichungen zwischen ξ_i ergeben würden, die jedoch nur durch constante Factoren von jenen Gleichungen sich unterscheiden, welche aus (a) durch die Auflösung nach ξ_1 fließen. Für den Fall, dass die Discriminante $B = o$ ist, kann man somit die in ξ_i quadratische Gleichung (a) immer in zwei lineare Gleichungen zwischen ξ_i zerlegen, und die letzteren sind, wenn noch angenommen wird, dass $b_{i,k} = b_{k,i}$ ist,

$$b_{1,1}\xi_1 + (b_{1,2} - \sqrt{-B_{3,3}})\xi_2 + (b_{1,3} + \sqrt{-B_{2,2}})\xi_3 = o,$$
$$b_{1,1}\xi_1 + (b_{1,2} + \sqrt{-B_{3,3}})\xi_2 + (b_{1,3} - \sqrt{-B_{2,2}})\xi_3 = o,$$

und können ersetzt werden durch die zwei Gleichungen

$$(b_{2,1} + \sqrt{-B_{3,3}})\xi_1 + b_{2,2}\xi_2 + (b_{2,3} - \sqrt{-B_{1,1}})\xi_3 = o,$$

$$(b_{2,1} - \sqrt{-B_{3,3}})\xi_1 + b_{2,2}\xi_2 + (b_{2,3} + \sqrt{-B_{1,1}})\xi_3 = o,$$

oder die folgenden

$$(b_{3,1} - \sqrt{-B_{2,2}})\xi_1 + (b_{3,2} + \sqrt{-B_{1,1}})\xi_2 + b_{3,3}\xi_3 = o$$

$$(b_{3,1} + \sqrt{-B_{2,2}})\xi_1 + (b_{3,2} - \sqrt{-B_{1,1}})\xi_2 + b_{3,3}\xi_3 = o.$$

Übertragen wir nun die eben gewonnenen Resultate auf die Gleichung $U = o$, respective $\Sigma = o$, so ergibt sich der für die späteren Untersuchungen wichtige

Satz: Das geometrische Äquivalent der Gleichung $U = o$ ist ein Geradenpaar, d. h. eine degenerierte Curve 2. Ordnung, wenn die Discriminante A des Gleichungspolynoms U verschwindet, und die Coordinaten u_i' und u_i'', $i = 1, 2, 3$, der Elemente (L') und (L'') dieses Paars sind gegeben durch

$$u_1' : u_2' : u_3' = a_{1,1} : a_{1,2} - \sqrt{-A_{3,3}} : a_{1,3} + \sqrt{-A_{2,2}} = a_{1,2} + \sqrt{-A_{3,3}} : a_{2,2} : a_{2,3} - \sqrt{-A_{1,1}} = a_{1,3} - \sqrt{-A_{2,2}} : a_{2,3} + \sqrt{-A_{1,1}} : a_{3,3} \tag{348}$$

$$u_1'' : u_2'' : u_3'' = a_{1,1} : a_{1,2} + \sqrt{-A_{3,3}} : a_{1,3} - \sqrt{-A_{2,2}} = a_{1,2} - \sqrt{-A_{3,3}} : a_{2,2} : a_{2,3} + \sqrt{-A_{1,1}} = a_{1,3} + \sqrt{-A_{2,2}} : a_{2,3} - \sqrt{-A_{1,1}} : a_{3,3},$$

Satz: Das geometrische Äquivalent der Gleichung $\Sigma = o$ ist ein Punktpaar, d. h. eine degenerierte Curve 2. Classe, wenn die Discriminante E des Gleichungspolynoms Σ verschwindet, und die Coordinaten x_i' und x_i'', $i = 1, 2, 3$, der Elemente M' und M'' dieses Paars sind gegeben durch

$$x_1' : x_2' : x_3' = \alpha_{1,1} : \alpha_{1,2} - \sqrt{-E_{3,3}} : \alpha_{1,3} + \sqrt{-E_{2,2}} = \alpha_{1,2} + \sqrt{-E_{3,3}} : \alpha_{2,2} : \alpha_{2,3} - \sqrt{-E_{1,1}} = \alpha_{1,3} - \sqrt{-E_{2,2}} : \alpha_{2,3} + \sqrt{-E_{1,1}} : \alpha_{3,3} \tag{349}$$

$$x_1'' : x_2'' : x_3'' = \alpha_{1,1} : \alpha_{1,2} + \sqrt{-E_{3,3}} : \alpha_{1,3} - \sqrt{-E_{2,2}} = \alpha_{1,2} - \sqrt{-E_{3,3}} : \alpha_{2,2} : \alpha_{2,3} + \sqrt{-E_{1,1}} = \alpha_{1,3} + \sqrt{-E_{2,2}} : \alpha_{2,3} - \sqrt{-E_{1,1}} : \alpha_{3,3},$$

wenn $A_{i,k}$ die in § 27 gegebene Bedeutung hat und $E_{i,}$ zu E in derselben Relation steht, wie $A_{i,k}$ zu A.

Die hier gestellte Aufgabe wäre somit eigentlich gelöst, und beschäftigen wir uns im Anschlusse noch mit der Aufsuchung des Trägers der Elemente des Paars, d. h. mit dem Mittelpunkte des Geradenpaars, respective mit der Geraden, auf welcher die beiden Punkte des Punktpaars zu liegen kommen. Zu diesem Zwecke gehe man von den drei Gleichungen aus

$$(d)\quad \begin{aligned} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3&=o \\ a_{1,2}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3&=o \\ a_{1,3}x_1+a_{2,3}x_2+a_{3,3}x_3&=o \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} \alpha_{1,1}u_1+\alpha_{1,2}u_2+\alpha_{1,3}u_3&=o \\ \alpha_{1,2}u_1+\alpha_{2,2}u_2+\alpha_{2,3}u_3&=o \\ \alpha_{1,3}u_1+\alpha_{2,3}u_2+\alpha_{3,3}u_3&=o \end{aligned} \quad (e)$$

und bedenke, dass hier, wegen $A = o$, beziehungsweise $E = o$, ein Wertesystem von $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$, respective $\frac{u_1}{u_3}$ und $\frac{u_2}{u_3}$, existiert, welches den drei obigen Gleichungen gleichzeitig genügt. Bezeichnet man dieses Wertesystem mit $\frac{x_1^{(o)}}{x_3^{(o)}}$ und $\frac{x_2^{(o)}}{x_3^{(o)}}$, beziehungsweise $\frac{u_1^{(o)}}{u_3^{(o)}}$ und $\frac{u_2^{(o)}}{u_3^{(o)}}$, so erscheint dasselbe nach der Lehre von den Determinanten bekanntlich gegeben durch

$$(350)\quad x_1^{(o)} : x_2^{(o)} : x_3^{(o)} = A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad u_1^{(o)} : u_2^{(o)} : u_3^{(o)} = E_{i,1} : E_{i,2} : E_{i,3}, \quad (351)$$

und diese Coordinaten gehören, wie sogleich gezeigt werden wird, dem gesuchten Träger des Paars an.

Nach der in § 54 gegebenen Bedeutung des Symbols U_i wird nämlich für $x_i = x_i^{(o)}$, $U_i = U_i^{(o)} = o$, daher auch $U^{(o)} = \frac{1}{2}(x_1^{(o)} U_1^{(o)} + x_2^{(o)} U_2^{(o)} + x_3^{(o)} U_3^{(o)}) = o$ und ist somit der durch die Coordinaten $x_i^{(o)}$ bestimmte Punkt $M^{(o)}$ ein Punkt des Geradenpaars $U = o$, oder $f(x_1 x_2 x_3) = o$. Nimmt man jetzt noch an, dass der Punkt M' einer der beiden Geraden (L') oder (L'')

Nach der in § 54 gegebenen Bedeutung des Symbols Σ_i wird nämlich für $u_i = u_i^{(o)}$, $\Sigma_i = \Sigma_i^{(o)} = o$, daher auch $\Sigma^{(o)} = \frac{1}{2}(u_1^{(o)} \Sigma_1^{(o)} + u_2^{(o)} \Sigma_2^{(o)} + u_3^{(o)} \Sigma_3^{(o)}) = o$ und geht somit der durch die Coordinaten $u_i^{(o)}$ bestimmte Strahl $(L^{(o)})$ durch ein Element des Punktpaars $\Sigma = o$, oder $\varphi(u_1 u_2 u_3) = o$. Nimmt man jetzt noch an, dass der Strahl (L') durch den Punkt M' oder M''

angehört, so ist auch $U' = o$, und weil nach § 56 $f(x_1^{(o)} - \lambda x_1', x_2^{(o)} - \lambda x_2', x_3^{(o)} - \lambda x_3') = U'\lambda^2 - K\lambda + U^{(o)}$

geht, so ist auch $\Sigma' = o$, und weil nach § 56 $\varphi(u_1^{(o)} - \lambda u_1', u_2^{(o)} - \lambda u_2', u_3^{(o)} - \lambda u_3') = \Sigma'\lambda^2 - R\lambda + \Sigma^{(o)}$

ist, wenn man diesmal

$K = U_1^{(o)}x_1' + U_2^{(o)}x_2' + U_3^{(o)}x_3'$

$R = \Sigma_1^{(o)}u_1' + \Sigma_2^{(o)}u_2' + \Sigma_3^{(o)}u_3'$

setzt, so wird auch für jeden Wert des Parameters λ

$f(x_1^{(o)} - \lambda x_1', x_2^{(o)} - \lambda x_2', x_3^{(o)} - \lambda x_3') = o,$

und diese Gleichung sagt aus, dass alle in der Geraden $M^{(o)}M'$ liegenden Punkte dem Geradenpaar $U = o$ angehören. Der durch die Gleichungen (350) bestimmte Punkt $M^{(o)}$ ist somit ein Punkt des Geradenpaars $U = o$ und hat noch die besondere Eigenschaft, dass alle Punkte, welche auf einer Geraden liegen, die ihn mit irgend einem Punkte M' des Geradenpaars $U = o$ verbindet, Punkte dieses Paars darstellen, was offenbar nur dann denkbar erscheint, wenn $M^{(o)}$ der Mittelpunkt des Paars ist, d. h. der Schnittpunkt der beiden Elemente (L') und (L'') des letzteren.

$\varphi(u_1^{(o)} - \lambda u_1', u_2^{(o)} - \lambda u_2', u_3^{(o)} - \lambda u_3') = o,$

und diese Gleichung zeigt, dass alle durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen $(L^{(o)})$ und (L') gehenden Strahlen durch ein Element des Punktpaars $\Sigma = o$ gehen. Der durch die Gleichungen (351) definierte Strahl $(L^{(o)})$ ist demnach ein durch ein Element des Paars $\Sigma = o$ gehender Strahl und hat noch die besondere Eigenschaft, dass alle Strahlen, welche durch jenen Punkt gehen, wo $(L^{(o)})$ von irgend einem durch ein Element des Paars gelegten Strahl (L') geschnitten wird, auch ein Element des Paars enthalten, was jedoch nur in dem einzigen Fall denkbar ist, wo $(L^{(o)})$ die Verbindungsgerade der Punkte M' und M'' darstellt, d. h. den Träger des Paars.

§ 58. Gleichung der Tangente und Normale der Curve $U = o$ und des Berührungspunktes einer Tangente der Curve $\Sigma = o$.

Nimmt man an, dass der in § 56 mit M' bezeichnete

Nimmt man an, dass die in § 56 mit (L') bezeichnete

Punkt der Curve $U = o$ angehört, so wird $U' = o$ und nimmt dadurch die in diesem Paragraphen gegebene Gleichung (344) die Form an: $U''.\lambda^2 - K\lambda = o$ und hieraus folgt, wenn wieder λ' und λ'' die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen, $\lambda' = o$ und $\lambda'' = \frac{K}{U''}$, d. h. der eine Schnittpunkt K' der Geraden (L) mit der Curve $U = o$ fällt mit dem Punkte M' zusammen. In dem Fall, wo nun die Gerade (L) die Curve $U = o$ im Punkte M' berühren soll, muss aber auch der zweite Schnittpunkt K'' der Geraden (L) mit der Curve $U = o$ mit dem Punkte M' zusammenfallen und dies bedingt $\lambda'' = \frac{K}{U''} = o$, oder $K = o$. Es gibt sonach unendlich viele Punkte M'', welche in Bezug auf den Curvenpunkt M' eine solche Lage besitzen, dass die Verbindungsgerade $M'M''$ die Curve $U = o$ im Punkte M' zweipunktig oder nach der ersten Ordnung berührt, und die Coordinaten x_i'' dieser Punkte müssen nach der in § 56 gegebenen Bedeutung des Symbols K der linearen Gleichung genügen: $U_1'x_1'' + U_2'x_2'' + U_3'x_3'' = o$, oder

Gerade die Curve $\Sigma = o$ berührt, so wird $\Sigma' = o$ und nimmt dadurch die in diesem Paragraphen gegebene Gleichung (345) die Form an: $\Sigma''.\lambda^2 - R.\lambda = o$ und hieraus folgt, wenn wieder λ' und λ'' die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen, $\lambda' = o$ und $\lambda'' = \frac{R}{\Sigma''}$, d. h. die eine Tangente (T'), welche man aus dem Punkte M, dem Schnittpunkte von (L') und (L''), an die Curve $\Sigma = o$ legen kann, fällt mit dem Strahl (L') zusammen. In dem Fall, wo nun auch die zweite Tangente (T'') aus M an die Curve $\Sigma = o$ mit (L') zusammenfallen soll, muss $\lambda'' = \frac{R}{\Sigma''} = o$, oder $R = o$ werden. Es existieren sonach unendlich viele Strahlen (L''), welche bezüglich der Tangente (L') der Curve $\Sigma = o$, eine solche Lage besitzen, dass die aus dem Schnittpunkte M von (L') mit (L'') an die Curve $\Sigma = o$ noch mögliche zweite Tangente (T'') mit (L') ebenfalls identisch ist, und die Coordinaten u_i'' dieser Strahlen müssen nach der in § 56 gegebenen Bedeutung des Symbols R der linearen Gleichung genügen:

$U_1''x_1'+U_2''x_2'+U_3''x_3'=o$, d. h. der geometrische Ort dieser Punkte M'' ist eine Gerade (T') von der Gleichung:

$$T' \equiv U_1'x_1+U_2'x_2+U_3'x_3=o, \quad (352)$$

$$T' \equiv U_1x_1'+U_2x_2'+U_3x_3'=o, \quad (354)$$

und d. i. gleichzeitig die Gleichung der Tangente, gelegt im Punkte M' von den trimetrischen Coordinaten x_i' an die Curve $U=o$.

$\Sigma_1'u_1''+\Sigma_2'u_2''+\Sigma_3'u_3''=o$, oder $\Sigma_1''u_1'+\Sigma_2''u_2'+\Sigma_3''u_3'=o$, d. h. der geometrische Ort dieser Strahlen (L'') ist ein Punkt M' von der Gleichung:

$$M' \equiv \Sigma_1'u_1+\Sigma_2'u_2+\Sigma_3'u_3=o, \quad (353)$$

$$M' \equiv \Sigma_1u_1'+\Sigma_2u_2'+\Sigma_3u_3'=o, \quad (355)$$

und d. i. gleichzeitig die Gleichung desjenigen Punktes, in welchem die Tangente (L') oder (T') von den trigonalen Coordinaten u_i' die Curve $\Sigma=o$ berührt.

Aus der Gleichung der Tangente, respective des Berührungspunktes, in homogenen Coordinaten lassen sich nun auch die Gleichungen dieser Gebilde in gebräuchlichen Coordinaten herleiten; man braucht zu diesem Zwecke blos, im Sinne des in § 27 bereits Gesagten, die homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 durch x, y 1; die homogenen Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 aber durch u, v, 1 in den diesbezüglichen Gleichungen zu ersetzen und erhält dann, wenn der Kürze wegen noch die Symbole eingeführt werden:

$$g_1=2(a_{1,1}x_1+a_{1,2}y_1+a_{1,3}),\; h_1=2(a_{1,2}x_1+a_{2,2}y_1+a_{2,3}),\; i_1=2(a_{1,3}x_1+a_{2,3}y_1+a_{3,3}), \quad (356)$$

$$T_1 \equiv g_1x+h_1y+i_1=o \quad (358)$$

als Gleichung der Tangente (T_1), gelegt in dem Curvenpunkte M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 an die Curve 2. Ordnung $U=o$, hierbei

$$l_1=2(\alpha_{1,1}u_1+\alpha_{1,2}v_1+\alpha_{1,3}),\; m_1=2(\alpha_{1,2}u_1+\alpha_{2,2}v_1+\alpha_{2,3}),\; n_1=2(\alpha_{1,3}u_1+\alpha_{2,3}v_1+\alpha_{3,3}), \quad (357)$$

$$M_1 \equiv l_1u+m_1v+n_1=o \quad (359)$$

als Gleichung des Berührungspunktes M_1 der Tangente (T_1) von den Coordinaten u_1, v_1 der Curve 2. Classe $\Sigma=o$, hierbei

die letzte Gleichung verstanden in der nicht homogenen

Form (340), respective (341). Es ist klar, dass man die Gleichungen (358) und (359) nach den in § 54 gegebenen Relationen *(e)* und *(f)* ebenfalls ersetzen kann durch die folgenden

(360) . $T_1 \equiv g x_1 + h y_1 + i = o.$ | $M_1 \equiv l u_1 + m v_1 + n = o.$. (361)

Auch noch eine andere gebräuchliche Form für die Gleichung der Tangente, respective des Berührungspunktes, lässt sich nun aus der vorletzten Gleichung herleiten, wenn man nämlich von dieser die Gleichung subtrahiert

$g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 = o,$ | $l_1 u_1 + m_1 v_1 + n_1 = o,$

wodurch man erhält

(362) . $T_1 \equiv g_1 (x - x_1) + h_1 (y - y_1) = o.$ | $M_1 \equiv l_1 (u - u_1) + m_1 (v - v) = o.$. (363)

Des besseren Verständnisses wegen werden hier noch eine Reihe von einfachen Beispielen vorgeführt.

1. Beispiel. Die Gleichung der Curve 2. Ordnung hat die Form

(a) . $U \equiv \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o.$

1. Beispiel. Die Gleichung der Curve 2. Classe hat die Form

$\Sigma \equiv a^2 u^2 \pm b^2 v^2 - 1 = o$. (b)

Nachdem in diesem speciellen Fall

$a_{1,1} = \frac{1}{a^2}, \; a_{2,2} = \pm \frac{1}{b^2}, \; a_{3,3} = -1, \; a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3} = o$ | $\alpha_{1\,1} = a^2, \; \alpha_{2,2} = \pm b^2, \; \alpha_{3,3} = -1, \; \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,3} = o$

ist, so wird diesmal

$g = \frac{2x}{a^2}, \; h = \pm \frac{2y}{b^2}, \; i = -2,$ | $l = 2a^2 u, \; m = \pm 2b^2 v, \; n = -2,$

folglich das Trinom

$g_1 x + h_1 y + i_1 = 2\left(\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} - 1\right),$

und lautet demnach die Gleichung der Tangente (T_1), ge-

$l_1 u + m_1 v + n_1 = 2\,(a^2 u_1 u \pm b^2 v_1 v - 1),$

und lautet demnach die Gleichung des Berührungspunktes M_1 der Tangente (T_1) von den Coordinaten u_1, v_1 der

legt in dem Curvenpunkte M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 an die vorliegende Curve

(c) . $T_1 = \frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} - 1 = o.$

hier vorliegenden Curve

$M_1 \equiv a^2 u_1 u \pm b^2 v_1 v - 1 = o.$. (d)

2. Beispiel. Die Gleichung der Curve 2. Ordnung habe die Form

(e) . $U \equiv \frac{y^2}{p} - x = o$

2. Beispiel. Die Gleichung der Curve 2. Classe habe die Form

$\Sigma \equiv v^2 - \frac{4}{p} u = o$. (f)

und es ist daher

$a_{2,2} = \frac{1}{p},\ a_{1,3} = -\frac{1}{2},\ a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,3} = o,$

$\alpha_{2,2} = 1,\ \alpha_{1,3} = -\frac{2}{p},\ \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = o,$

mithin wird

$g = -1,\ h = \frac{2y}{p},\ i = -x,$

$g_1 x + h_1 y + i_1 = \frac{2 y_1 y}{p} - (x + x_1)$

$l = -\frac{4}{p},\ m = 2v,\ n = -\frac{4}{p} u,$

$l_1 u + m_1 v + n_1 = v_1 v - \frac{2}{p} (u + u_1)$

und lautet somit die Gleichung der Tangente, beziehungsweise des Berührungspunktes

(g) $T_1 \equiv \frac{2 y_1 y}{p} - (x + x_1) = o.$

$M_1 \equiv v_1 v - \frac{2}{p}(u + u_1) = o.$ (h)

Es erübrigt uns nur noch, die Gleichung der Normale einer Curve 2. Ordnung $U = o$ aufzustellen. Unter der Annahme, dass wieder M_1 ein Punkt dieser Curve wäre, ist nun nach Gl. (62) in § 12 die Gleichung der in diesem Punkte errichteten Senkrechten auf die Tangente $T_1 \equiv g_1 x + h_1 y + i_1 = o$

$$(364) \quad \ldots \ldots \quad \frac{x - x_1}{g_1} = \frac{y - y_1}{h_1},$$

und nachdem diese Senkrechte gleichzeitig die Normale der Curve im Punkte M_1 darstellt, erscheint auch der letzte Theil der hier gestellten Aufgabe gelöst. Für die durch die früheren Gleichungen (a) und (e) bestimmten Curven

2. Ordnung nimmt obige Gleichung beziehungsweise die Form an:

$$(i) \quad \ldots\ldots \quad y - y_1 = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

und

$$(k) \quad \ldots\ldots \quad y - y_1 = -\frac{2y_1}{p}(x - x_1).$$

§ 59. Identität der Curve 2. Ordnung und 2. Classe.

In den vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass die Gleichung

der Tangente (T), gelegt im Punkte M' an die Curve 2. Ordnung $U = o$, in trimetrischen Coordinaten lautet:

$$U_1' x_1 + U_2' x_2 + U_3' x_3 = o,$$

und wenn daher $u_i, i = 1, 2, 3$, die trigonalen Coordinaten dieser Tangenten repräsentieren, so bestehen nach Gl. (159) in § 28 die Beziehungen

$$(a) \quad . \quad U_1' = \varrho u_1, \; U_2' = \varrho u_2, \; U_3' = \varrho u_3$$

und ist gleichzeitig $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o$ die Gleichung der Tangente (T). Nachdem aber auch der Punkt M' der Geraden (T) angehört, so müssen die Coordinaten x_i' die letzte Gleichung ebenfalls befriedigen, was zur Relation führt

$$(c) \; u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3' = o.$$

Zwischen den Coordinaten u_i der Tangente (T) und den Coordinaten x_i' ihres Berüh-

des Berührungspunktes M der Tangente (T') der Curve 2. Classe $\Sigma = o$ in trigonalen Coordinaten lautet:

$$\Sigma_1' u_1 + \Sigma_2' u_2 + \Sigma_3' u_3 + o,$$

und wenn daher $x_i, i = 1,2,3$, die trimetrischen Coordinaten dieses Berührungspunktes bedeuten, so bestehen nach Gl. (160) in § 28 die Beziehungen

$$\Sigma_1' = \varrho x_1, \; \Sigma_2' = \varrho x_2, \; \Sigma_3' = \varrho x_3 \quad . \quad (b)$$

und ist gleichzeitig $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = o$ die Gleichung des Punktes M. Nachdem aber auch die Tangente (T') durch M geht, so müssen die Coordinaten u_i' die letzte Gleichung ebenfalls befriedigen, was zur Relation führt

$$x_1 u_1' + x_2 u_2' + x_3 u_3' = o. \; (d)$$

Zwischen den Coordinaten x_i des Berührungspunktes M und den Coordinaten (u_i') der

rungspunktes M' bestehen sonach, zufolge den Gleichungen (a) und (c), die nachfolgenden vier Beziehungen, wenn man noch die in § 54 angegebenen Werte für die Symbole $U_i(\varrho)$ substituiert, und zwar:

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1'+a_{1,2}x_2'+a_{1,3}x_3'-\frac{\varrho}{2}u_1&=o\\
a_{1,2}x_1'+a_{2,2}x_2'+a_{2,3}x_3'-\frac{\varrho}{2}u_2&=o\\
a_{1,3}x_1'+a_{2,3}x_2'+a_{3,3}x_3'-\frac{\varrho}{2}u_3&=o\\
u_1x_1'+u_2x_2'+u_3x_3'&=o
\end{aligned}$$

Tangente (T') bestehen sonach, zufolge der Gleichungen (b) und (d), die nachfolgenden vier Beziehungen, wenn man noch die in § 54 angegebenen Werte für die Symbole $\Sigma_i(\varrho)$ substituiert, und zwar:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1}u_1'+\alpha_{1,2}u_2'+\alpha_{1,3}u_3'-\frac{\varrho}{2}x_1&=o\\
\alpha_{1,2}u_1'+\alpha_{2,2}u_2'+\alpha_{2,3}u_3'-\frac{\varrho}{2}x_2&=o\\
\alpha_{1,3}u_1'+\alpha_{2,3}u_2'+\alpha_{3,3}u_3'-\frac{\varrho}{2}x_3&=o\\
x_1u_1'+x_2u_2'+x_3u_3'&=o
\end{aligned}$$

und aus diesen folgt durch die Elimination von x_1', x_2', x_3' und ϱ, respective u_1', u_2', u_3' und ϱ, nach dem aus der Determinantentheorie bekannten Eliminationstheorem:

$$(365)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & u_1 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & u_2 \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & o \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & x_1 \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & x_2 \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & o \end{vmatrix} = o, \quad (366)$$

oder wenn man die links vom Gleichheitszeichen hier vorkommende 4^2 elementige Determinante — Contravariante von U, respective Σ — berechnet und wieder die Discriminante des Gleichungspolynoms U und Σ beziehungsweise mit A und E bezeichnet, ferner den Symbolen $A_{i,k}$ und $E_{i,k}$ die in § 57 bereits erörterte Bedeutung beilegt,

$$(367)\quad \begin{aligned} &A_{1,1}u_1^2+2A_{1,2}u_1u_2+\\ &A_{2,2}u_2^2+2A_{1,3}u_1u_3+\\ &2A_{2,3}u_2u_3+A_{3,3}u_3^2=o,\end{aligned}$$

welcher Relation die Coordinaten u_i sämmtlicher Tangenten der Curve 2. Ordnung $U=o$ unterworfen sind, weshalb auch (365) oder (367)

$$\begin{aligned} &E_{1,1}x_1^2+2E_{1,2}x_1x_2+\\ &E_{2,2}x_2^2+2E_{1,3}x_1x_3+\\ &2E_{2,3}x_2x_3+E_{3,3}x_3^2=o,\end{aligned}\quad (368)$$

welcher Relation die Coordinaten x_i sämmtlicher Punkte der Curve 2. Classe $\Sigma=o$ unterworfen sind, weshalb auch (366) oder (368) die homogene

die homogene Gleichung der Curve 2. Ordnung $U = o$ in Liniencoordinaten darstellt. | Gleichung der Curve 2. Classe $\Sigma = o$ in Punktcoordinaten darstellt.

Die Gleichungen (367) und (368) heißen übrigens auch die reciproken Gleichungen der Originalgleichungen $U = o$, respective $\Sigma = o$, und in analoger Weise nennt man daher auch die Discriminante des Gleichungspolynoms von (367), d. h. die aus den sechs Coefficienten $A_{i,k}$ gebildete symmetrische 3^2 elementige Determinante, die reciproke Determinante von A und die in gleicher Weise aus $E_{i,k}$ resultierende Determinante, die reciproke Determinante von E. Wir bezeichnen dieselben mit A' und E' und bemerken gleichzeitig, dass nach bekannten Principien der Determinantentheorie $A' = A^2$ und $E' = E^2$, ferner $A'_{i,k} = A \cdot a_{i,k}$ und $E'_{i,k} = E \cdot a_{i,k}$ ist, wenn noch $A'_{i,k}$ aus A' und $E'_{i,k}$ aus E' in derselben Weise hervorgeht, wie $A_{i,k}$ aus A. Wie man sieht, sind die beiden letzten Gleichungen in den Veränderlichen u_i, respective x_i, homogen und vom zweiten Grade und daher gilt der

Satz: Die Curven 2. Ordnung sind von der 2. Classe, | **Satz:** Die Curven 2. Classe sind von der 2. Ordnung,

wodurch gleichzeitig die Identität zwischen Curven 2. Ordnung und solchen 2. Classe analytisch erwiesen erscheint. Wir werden zum Schlusse dieses Paragraphen noch diese beiden Sätze synthetisch beweisen. In Folge der eben bewiesenen Identität belegt man auch die vorliegenden Curven mit dem gemeinsamen Namen „der Kegelschnitte", u. zw. deshalb, weil dieselben sich ergeben als die Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene; es ist daher die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in homogenen Punktcoordinaten (trimetrischen Coordinaten):

$$(342) \quad U \equiv a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o,$$

in homogenen Liniencoordinaten (trigonalen Coordinaten) aber:

$$(367) \quad \Sigma \equiv A_{1,1}u_1^2 + 2A_{1,2}u_1u_2 + A_{2,2}u_2^2 + 2A_{1,3}u_1u_3 + 2A_{2,3}u_2u_3 + A_{3,3}u_3^2 = o.$$

Ersetzt man nun wieder in der ersten der eben gegebenen Gleichungen x_1, x_2, x_3 der Reihe nach durch x, y, 1; in der zweiten jedoch u_1, u_2, u_3 durch u, v, 1, so erhält man die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in gebräuchlichen (nicht homogenen) Punkt- und Liniencoordinaten, und ist es somit auch gestattet, in dem bisher Vorgeführten, sowie in den folgenden Untersuchungen über die Curve $\Sigma = o$, die dort vorkommenden Coefficienten $a_{i,k}$ mit $A_{i,k}$ zu vertauschen. Auch muss, weil die Gleichungen (342) und (367) einem und demselben Kegelschnitte angehören, die erste derselben aus der zweiten hervorgehen. In der That ist die reciproke Gleichung von (367), wenn man nämlich, wie bereits bemerkt wurde,

$$A' = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{vmatrix}$$

setzt, $S A'_{i,k} x_i x_k = o$, und weil die Coefficienten $A'_{i,k}$ der Relation unterliegen $A'_{i,k} = A \,.\, a_{i,k}$, so lautet die gesuchte reciproke Gleichung $A \,.\, S a_{i,k} x_i x_k = o$, wofür man auch schreiben kann $S a_{i,k} x_i x_k = o$.

Die hier angestellten Betrachtungen zerfallen in ihr Nichts, wenn die Gleichung (342) ein Geradenpaar — eine reduzible oder degenerierte Curve 2. Ordnung — oder jene (343) ein Punktpaar — eine reduzible oder degenerirte Curve 2. Classe — darstellt, und in diesen singulären Fällen ist es daher nicht mehr erlaubt (367) und (368) als die reciproken Gleichungen von (342) und (343) anzusehen. Dass dies so sein muss, erhellt sofort, wenn man bedenkt, dass eine eigentliche oder irreduzible Curve 2. Ordnung oder 2. Classe, d. h. eine solche Curve, welche weder in ein Geradenpaar, noch in ein Punktpaar zerfällt, auf zweifache Weise entstanden gedacht werden kann, nämlich durch die Bewegung eines Punktes, wo sie durch Gl. (342) dargestellt und eine Ortscurve genannt wird, oder durch die Bewegung einer Geraden, in welchem Fall sie eine Classencurve heißt und durch Gl. (343) analytisch definiert erscheint. Nun kann man aber das Geradenpaar niemals als eine Classencurve auffassen, indem dasselbe doch nicht durch die

stetige Bewegung einer Geraden entsteht, sowie es anderseits unmöglich ist, das Punktpaar als eine Ortscurve anzusehen, weil ja dieses Paar durch die stetige Bewegung eines Punktes nicht erzeugt werden kann, und eben deshalb gelten die bereits erklärten Beziehungen zwischen den Gleichungen (342) und (367), sowie (343) und (368), ferner die bewiesene Identität von Curven 2. Ordnung mit Curven 2. Classe, nur für die irreduziblen Curven dieser Kategorie. Übrigens kann man auch das Geradenpaar als eine Curve von der Classe *o* und das Punktpaar als eine Curve von der Ordnung *o* ansehen.

Obwohl hier vorzugsweise der analytische Theil aus der Geometrie der Kegelschnitte einer eingehenden Betrachtung unterzogen wird, mögen dennoch die letzten zwei Sätze auch synthetisch begründet werden.

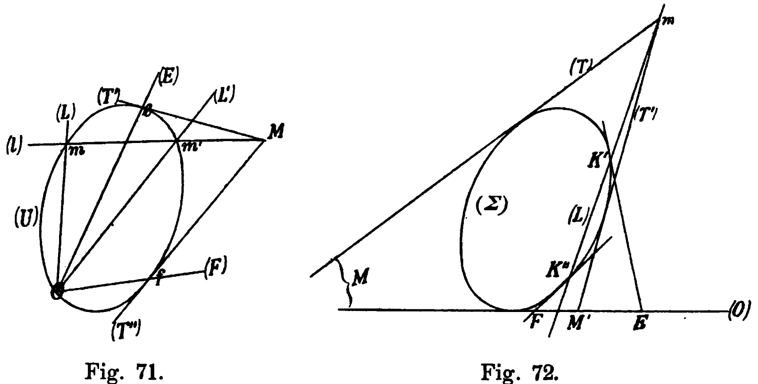


Fig. 71. Fig. 72.

Es sei zu diesem Zwecke die in Fig. 71 dargestellte Curve (U) von der 2. Ordnung und M irgend ein Punkt in der Ebene dieser Curve. Nun lege man durch M einen Strahl (l), welcher die Curve (U), weil diese eben von der 2. Ordnung ist, in zwei Punkten m und m' durchschneidet,

Es sei zu diesem Zwecke die in Fig. 72 gezeichnete Curve (Σ) von der 2. Classe und (L) irgend ein Strahl in der Ebene dieser Curve. In (L) wähle man nun einen Punkt m und lege aus diesem die zwei hier möglichen Tangenten (T) und (T') an die Curve, welche die feste Curven-

und verbinde hierauf die letzteren durch die Strahlen (L) und (L') mit dem festen Curvenpunkte O. Die so gewonnenen Strahlen (L) und (L') repräsentieren dann nach dem in § 43 bereits Gesagten ein Paar entsprechender Strahlen einer quadratischen Strahleninvolution. Zieht man nun aus dem Punkte M eine Tangente (T') an die Curve und nennt den zugehörigen Berührungspunkt e, so ist die Verbindungsgerade Oe der eine Doppelstrahl (E) der vorliegenden Strahleninvolution, indem hier m und m', mithin auch (L) und (L') zusammenfallen. Bekanntlich hat aber eine Strahleninvolution zwei Doppelstrahlen, und muss daher noch ein zweiter Doppelstrahl (F) existieren und dieser trifft die Curve (U) in einem zweiten Punkte f, welcher mit M geradlinig verbunden, die Tangente (T'') bestimmt, die aus M an die Curve noch gelegt werden kann. Nachdem aber sonst kein Doppelstrahl mehr möglich ist, kann man aus M auch nur zwei Tangenten an die Curve (U) legen und ist somit letztere von der 2. Classe.

tangente (O) in den Punkten M und M' durchschneiden. Die so gewonnenen Punkte repräsentieren dann nach dem in § 43 bereits Gesagten ein Paar entsprechender Punkte einer quadratischen Punktinvolution. Legt man nun in dem Punkte K', wo der Strahl (L) die Curve (Σ) durchschneidet, eine Tangente an die Curve, so trifft diese Tangente jene (O) in dem Punkte E und dies ist der eine Doppelpunkt vorliegender Punktinvolution, indem hier (T) und (T'), mithin auch M und M' zusammenfallen. Bekanntlich hat aber eine Punktinvolution zwei Doppelpunkte, und muss folglich noch ein zweiter Doppelpunkt F existieren und die aus F an die Curve (Σ) gelegte Tangente berührt diese Curve in einem Punkte K'', welcher gleichzeitig ein Schnittpunkt von (L) mit der Curve ist. Nachdem aber sonst kein Doppelpunkt mehr vorhanden ist, kann auch der Strahl (L) die Curve (Σ) blos in zwei Punkten durchschneiden und folglich ist diese von der 2. Ordnung.

Zum Schlusse mögen hier noch einige Anwendungen der in diesem Paragraphen gewonnenen Gleichungen gezeigt werden, und beginnen wir damit, die reciproken Gleichungen von einigen einfachen Gleichungen 2. Ordnung zwischen Cartesischen Punktcoordinaten x und y zu bestimmen.

1. Aufgabe. Es soll die Gleichung der durch

$$(e) \quad . \; . \quad U \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = o$$

gegebenen Curve, welche ein Kreis von den Coordinaten a, b, r ist, in gebräuchlichen Liniencoordinaten u, v gefunden werden. Nachdem hier $U = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2)$ ist, so wird $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$, $a_{1,2} = o$, $a_{1,3} = -a$, $a_{2,3} = -b$, $a_{3,3} = a^2 + b^2 - r^2$ und folglich die Discriminante

$$A = \begin{vmatrix} 1, & o, & -a \\ o, & 1, & -b \\ -a, & -b, & (a^2 + b^2 - r^2) \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt dann: $A_{1,1} = a^2 - r^2$, $A_{1,2} = ab$, $A_{2,2} = b^2 - r^2$, $A_{1,3} = a$, $A_{2,3} = b$, $A_{3,3} = 1$, weshalb die reciproke Gleichung von (e) lautet: $(au + bv + 1)^2 - r^2 (u^2 + v^2) = o$, oder

$$(f) \quad . \; . \; . \; . \quad \Sigma \equiv u^2 + v^2 - \frac{o^2}{r^2} = o,$$

wenn noch $o \equiv au + bv + 1 = o$ die Gleichung des Kreismittelpunktes in der Normalform ist. Die eben entwickelte Gleichung (f) ist gleichzeitig die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten u, v, u. zw. in der Normalform.

2. Aufgabe. Die Gleichung der durch

$$(g) \quad . \; . \; . \; . \quad U \equiv \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

bestimmten Curve — Ellipse oder Hyperbel — ist in gebräuchlichen Liniencoordinaten u, v zu finden. Die Discriminante A von dem Gleichungspolynom U ergibt sich hier, wegen $a_{1,1} = \frac{1}{a^2}$, $a_{2,2} = \pm \frac{1}{b^2}$, $a_{3,3} = -1$, $a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3} = o$, aus

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}, & o, & o \\ o, & \pm\frac{1}{b^2}, & o \\ o, & o, & -1 \end{vmatrix},$$

weshalb $A_{1,1} = \pm\frac{1}{b^2}$, $A_{2,2} = -\frac{1}{a^2}$, $A_{3,3} = \pm\frac{1}{a^2 b^2}$, $A_{1,2} = A_{1,3} = A_{2,3} = o$ wird und die reciproke Gleichung von (g) ist

(h) . . . . $\Sigma \equiv a^2 u^2 \pm b^2 v^2 - 1 = o.$

Damit ist aber auch gleichzeitig die Frage beantwortet, welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die durch die Gleichung $Ax + By + C = o$ gegebene Gerade eine Tangente der Curve $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ ist? Denn, da hier $u = \frac{A}{C}$ und $v = \frac{B}{C}$ ist, so erscheint die fragliche Bedingung ausgedrückt durch

$$A^2 a^2 \pm B^2 b^2 - C^2 = o.$$

3. Aufgabe. Man suche die Gleichung der Curve — Parabel —

(i) . . . . $U \equiv \frac{y^2}{p} - x = o$

in gebräuchlichen Liniencoordinaten u, v. Hier ist $a_{2,2} = \frac{1}{p}$, $a_{1,3} = -\frac{1}{2}$ und $a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,3} = o$, daher die bei dieser Aufgabe in Betracht kommende Discriminante

$$A = \begin{vmatrix} o, & o, & -\frac{1}{2} \\ o, & \frac{1}{p}, & o \\ -\frac{1}{2} & o, & o \end{vmatrix}$$

und hieraus folgt $A_{2,2} = \frac{1}{4}$, $A_{1,3} = -\frac{1}{2p}$, während die übrigen Coefficienten $A_{i,k}$ verschwinden. Die Gleichung vorliegender Curve in Liniencoordinaten u, v ist sonach

$$(k) \quad \ldots\ldots \quad \Sigma \equiv v^2 - \frac{4u}{p} = o.$$

Es ist klar, dass die Gerade $Ax + By + C = o$ die durch Gl. (i) gegebene Curve wieder berührt, wenn die Bedingung erfüllt erscheint

$$B^2 - \frac{4AC}{p} = o.$$

4. Aufgabe. Es ist zu untersuchen, welcher Bedingung die Coordinaten

x_i' und x_i'' zweier Punkte M' und M'' unterworfen sind, damit ihre Verbindungsgerade den durch die Gleichung

| u_i' und u_i'' zweier Strahlen (L') und (L'') unterworfen sind, damit ihr Schnittpunkt in dem durch die Gleichung

$$(342) \quad \ldots \quad a_{1,1} x_1^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2 + 2 a_{1,3} x_1 x_3 + 2 a_{2,3} x_2 x_3 + a_{3,3} x_3^2 = o$$

gegebenen Kegelschnitt berührt.

Nach Gl. (163) in § 28 können die trigonalen Coordinaten der Verbindungsgeraden $M' M''$ gleich gesetzt werden

$$u_1 = x_2' x_3'' - x_2'' x_3',$$
$$u_2 = x_3' x_1'' - x_3'' x_1',$$
$$u_3 = x_1' x_2'' - x_1'' x_2',$$

und weil diese der reciproken Gleichung von (342) zu genügen haben,

| gegebenen Kegelschnitte liegt.

Nach Gl. (164) in § 28 können die trimetrischen Coordinaten des Schnittpunktes der Strahlen (L') und (L'') gleich gesetzt werden

$$x_1 = u_2' u_3'' - u_2'' u_3',$$
$$x_2 = u_3' u_1'' - u_3'' u_1',$$
$$x_3 = u_1' u_2'' - u_1'' u_2',$$

und weil diese der obigen Gleichung (342) zu genügen haben,

so lautet die fragliche Bedingung:

$$A_{1,1}(x_2' x_3'' - x_2'' x_3')^2 + 2 A_{1,2} (x_2' x_3'' - x_2'' x_3')(x_3' x_1'' - x_3'' x_1') + \ldots + A_{3,3}(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')^2 = o,$$

| $$a_{1,1}(u_2' u_3'' - u_2'' u_3')^2 + 2 a_{1,2} (u_2' u_3'' - u_2'' u_3')(u_3' u_1'' - u_3'' u_1') + \ldots + a_{3,3}(u_1' u_2'' - u_1'' u_2')^2 = o,$$

oder in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & x_1' & x_1'' \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{2,3} & x_2' & x_2'' \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} & x_3' & x_3'' \\ x_1' & x_2' & x_3' & o & o \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & o & o \end{vmatrix} = o.$$

| $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & u_1' & u_1'' \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & u_2' & u_2'' \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & u_3' & u_3'' \\ u_1' & u_2' & u_3' & o & o \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & o & o \end{vmatrix} = o.$$

§ 60. Gleichung des Tangentenpaars aus einem Punkte an die Curve $U = o$ und reciproke Aufgabe.

Soll der in § 56 mit M'' bezeichnete Punkt in Bezug auf den Punkt M', den wir hier als gegeben und im allgemeinen nicht auf der Curve $U = o$ liegend voraussetzen, eine solche Lage besitzen, dass die Verbindungsgerade $M'M''$ die Curve 2. Ordnung $U = o$ berührt, so müssen die in diesem Paragraphen mit K' und K'' bezeichneten Schnittpunkte der Geraden $M'M''$ mit der Curve $U = o$ zusammenfallen, was jedoch nur dann möglich ist, wenn die Wurzeln der Gl. (344) einander gleich sind, d. h. die Bedingung erfüllt erscheint

$$K^2 - 4 U' U'' = o,$$

woraus man ersieht, dass unendlich viele Punkte M'' existieren, welche dieser Anforderung genügen, und dass der geometrische Ort von allen diesen Punkten M'' bestimmt ist durch die Gleichung

$$(369) \quad (U_1' x_1 + U_2' x_2 + U_3' x_3)^2 - 4 U' . U = o.$$

Letztere ist aber in x_1, x_2 und x_3 homogen und vom zweiten Grade, weshalb sie, weil man aus einem Punkte M', zufolge des in § 59 bereits Erörterten, zwei Tan-

Besitzt die in § 56 mit (L'') bezeichnete Gerade, bezüglich des Strahls (L'), den wir hier als gegeben und im allgemeinen nicht als eine Tangente der Curve $\Sigma = o$ ansehen wollen, eine solche Lage, dass der Schnittpunkt der Strahlen (L') und (L'') auf der Curve $\Sigma = o$ liegt, so müssen die in diesem Paragraphen mit (T') und (T'') bezeichneten Tangenten der Curve $\Sigma = o$ zusammenfallen, was jedoch nur in dem Fall realisierbar ist, wo die beiden Wurzeln der Gl. (345) einander gleich sind, d. h. die Bedingung erfüllt erscheint

$$R^2 - 4 \Sigma' \Sigma'' = o,$$

woraus man erkennt, dass es unendlich viele Strahlen (L'') gibt, welche dieser Anforderung genügen, und dass der geometrische Ort von allen diesen Strahlen (L'') gegeben ist durch die Gleichung

$$(\Sigma_1' u_1 + \Sigma_2' u_2 + \Sigma_3' u_3)^2 - 4 \Sigma' . \Sigma = o. \quad (370)$$

Letztere ist aber in u_1, u_2 und u_3 homogen und vom zweiten Grade, weshalb sie, weil eine Gerade (L'), zufolge des in § 59 bereits Erörterten, eine Curve 2. Classe $\Sigma = o$

genten an die Curve 2. Ordnung legen kann, die Gleichung des aus M' an $U = o$ gelegten Tangentenpaars darstellt.

in zwei Punkten durchschneidet, die Gleichung des Schnittpunktpaars des Strahles (L') mit der Curve $\Sigma = o$ repräsentiert.

Überträgt man die soeben erhaltenen Gleichungen auf nicht homogene Punkt- und Liniencoordinaten, so erhält man:

$$(371) \quad (g_1 x + h_1 y + i_1)^2 - 4\, U_1\, U = o$$

als Gleichung des Tangentenpaars, gelegt aus einem Punkte M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 an die Curve $U = o$, und es haben hierin g_1, h_1 und i_1 die in den Gleichungen (356) gegebene Bedeutung, während das Symbol U_1 definiert erscheint durch die Gleichung

$$U_1 = a_{1,1}\, x_1{}^2 + 2\, a_{1,2}\, x_1\, y_1 + a_{2,2}\, y_1{}^2 + 2\, a_{1,3}\, x_1 + 2\, a_{2,3}\, y_1 + a_{3,3}.$$

$$(l_1 u + m_1 v + n_1)^2 - 4\, \Sigma_1\, \Sigma = o \quad (372)$$

als Gleichung des Schnittpunktepaars der Geraden (L_1) von den Coordinaten u_1, v_1 mit der Curve $\Sigma = o$, und es haben hierin l_1, m_1 und n_1 die in den Gleichungen (357) gegebene Bedeutung, während das Symbol Σ_1 definiert ist durch die Gleichung

$$\Sigma_1 = \alpha_{1,1}\, u_1{}^2 + 2\, \alpha_{1,2}\, u_1\, v_1 + \alpha_{2,2}\, v_1{}^2 + 2\, \alpha_{1,3}\, u_1 + 2\, \alpha_{2,3}\, v_1 + \alpha_{3,3}.$$

1. Aufgabe. Es soll die Gleichung des Tangentenpaars bestimmt werden, welches man aus dem Punkte M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 an die Curve

$$(a) \quad . \; U \equiv \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o,$$

welche eine Ellipse oder Hyperbel darstellt, legen kann. Nachdem hier, wie wir in § 58 bereits gesehen haben,

$$g_1 = \frac{2\, x_1}{a^2},\; h_1 = \pm \frac{2\, y_1}{b^2} \text{ und}$$

$i_1 = -2$ ist, lautet die fragliche Gleichung

1. Aufgabe. Die Gleichung des Punktpaares **ist** zu bestimmen, in welchem die Gerade (L_1) von den Coordinaten u_1, v_1 die Curve

$$\Sigma \equiv a^2 u^2 \pm b^2 v^2 - 1 = o, \; . \; (b)$$

welche eine Ellipse oder Hyperbel darstellt, durchschneidet. In diesem Fall ist, wie bereits in § 58 gezeigt wurde,

$$l_1 = 2\, a^2 u_1,\; m_1 = + 2\, b^2 v_1$$

und $n_1 = -2$, daher ist die zu suchende Gleichung

$$(c) \quad . \quad \left(\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = o.$$

2. Aufgabe. Man ermittle die Gleichung des Tangentenpaars, welches man aus dem Punkte M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 an die Curve

$$(e) \quad . \quad . \quad U \equiv \frac{y^2}{p} - x = o.$$

welche eine Parabel ist, legen kann. In dem § 58 wurde bereits gezeigt, dass bei der vorliegenden Curve $g_1 = -1$, $h_1 = \frac{2 y_1}{p}$ und $i_1 = -x_1$ wird, und deshalb lautet die gesuchte Gleichung

$$(g) \quad . \quad \left(\frac{2 y_1 y}{p} - x - x_1\right)^2 - 4\left(\frac{y_1^2}{p} - x_1\right)\left(\frac{y^2}{p} - x\right) = o.$$

$$(a^2 u_1 u \pm b^2 v_1 v - 1)^2 - (a^2 u_1^2 \pm b^2 v_1^2 - 1)(a^2 u^2 \pm b^2 v^2 - 1) = o. \quad . (d)$$

2. Aufgabe. Die Gleichung des Punktpaars ist zu suchen, wo die Gerade (L_1) von den Coordinaten u_1, v_1 die Curve

$$\Sigma \equiv v^2 - \frac{4}{p} u = o, \quad . \quad . (f)$$

welche eine Parabel ist, durchschneidet. Nachdem hier, wie man in § 58 gesehen hat, $l_1 = -\frac{4}{p}$, $m_1 = 2 v_1$ und $n_1 = -\frac{4}{p} u_1$ ist, erhält man als gesuchte Gleichung

$$\left(v_1 v - \frac{2}{p}(u + u_1)\right)^2 - 4\left(v_1^2 - \frac{4}{p} u_1\right)\left(v^2 - \frac{4}{p} u\right) = o. \quad . (h)$$

§ 61. Gemeinsame Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte.

Um die gemeinsamen Punkte zweier Kegelschnitte (U') und (U'') von den Gleichungen

$$(a) \quad . \quad \begin{aligned} U' &\equiv a_{1,1}' x^2 + 2 a_{1,2}' xy + a_{2,2}' y^2 + 2 a_{1,3}' x + 2 a_{2,3}' y + a_{3,3}' = o \\ U'' &\equiv a_{1,1}'' x^2 + 2 a_{1,2}'' xy + a_{2,2}'' y^2 + 2 a_{1,3}'' x + 2 a_{2,3}'' y + a_{3,3}'' = o \end{aligned}$$

zu finden, hat man sich mit der Aufsuchung derjenigen Wertesysteme von x, y zu beschäftigen, welche diesen beiden Gleichungen gleichzeitig genügen, und da jedes dieser

Wertesysteme einen Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte bestimmt, so ist die Anzahl der Wertesysteme obiger Gleichung zugleich identisch mit der Zahl der Schnittpunkte der durch sie dargestellten Kegelschnitte. In analoger Weise hat man nun auch bei der Ermittlung der genannten Tangenten dieser Curven vorzugehen, hierbei aber die reciproken Gleichungen von (a), nämlich

$$(b) \quad \begin{aligned} U' &\equiv A_{1,1}'u^2 + 2A_{1,2}'uv + A_{2,2}'v^2 + 2A_{1,3}'u + 2A_{2,3}'v + A_{3,3}' = o \\ U'' &\equiv A_{1,1}''u^2 + 2A_{1,2}''uv + A_{2,2}''v^2 + 2A_{1,3}''u + A_{2,3}''v + A_{3,3}'' = o \end{aligned}$$

zum Ausgangspunkte zu wählen, und es ist klar, dass jedes Wertesystem u, v, welches den Gleichungen (b) Genüge leistet, auch eine gemeinsame Tangente der Kegelschnitte (U') und (U'') bestimmt. Selbstverständlich sind die in den zwei letzten Gleichungen vorkommenden Coefficienten $A_{i,k}'$ und $A_{i,k}''$, wenn A' und A'' die Discriminanten der Gleichungspolynome U' und U'' bedeuten, aus A', beziehungsweise A'', in derselben Weise zu construieren, wie die bereits mehrfach erwähnten Coefficienten $A_{i,k}$ aus A. Unsere Aufgabe ist somit beendigt, sobald die beiden Gleichungen (a), respective (b) aufgelöst sind, und beschäftigen wir uns deshalb mit der Auflösung derselben. Setzt man nun zu diesem Zwecke:

$a_0' = a_{1,1}'$, $a_1' = a_{1,2}'y + a_{1,3}'$, $a_2' = a_{2,2}'y^2 + 2a_{2,3}'y + a_{3,3}'$,	$A_0' = A_{1,1}'$, $A_1' = A_{1,2}'v + A_{1,3}'$, $A_2' = A_{2,2}'v^2 + 2A_{2,3}'v + A_{3,3}'$,
$a_0'' = a_{1,1}''$, $a_1'' = a_{1,2}''y + a_{1,3}''$, $a_2'' = a_{2,2}''y^2 + 2a_{2,3}''y + a_{3,3}''$,	$A_0'' = A_{1,1}''$, $A_1'' = A_{1,2}''v + A_{1,3}''$, $A_2'' = A_{2,2}''v^2 + 2A_{2,3}''v + A_{3,3}''$,

so nehmen die Gleichungen (a), respective (b), die Form an

$a_0'x^2 + a_1'x + a_2' = o$	$A_0'u^2 + A_1'u + A_2' = o$
$a_0''x^2 + a_1''x + a_2'' = o$,	$A_0''u^2 + A_1''u + A_2'' = o$,

und aus diesen findet man durch die Elimination von x, beziehungsweise u, nach der Methode von Sylvester***)

***) Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen.

$$\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & o \\ o & a_0' & a_1' & a_2' \\ a_0'' & a_1'' & a_2'' & o \\ o & a_0'' & a_1'' & a_2'' \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} A_0' & A_1' & A_2' & o \\ o & A_0' & A_1' & A_2' \\ A_0'' & A_1'' & A_2'' & o \\ o & A_0'' & A_1'' & A_2'' \end{vmatrix} = o,$$

oder nach erfolgter Berechnung der hier vorkommenden Determinanten

$$(c) \;.\; \begin{array}{c} (a_0' a_2'' - a_0'' a_2')^2 + \\ (a_1' a_0'' - a_1'' a_0') \\ (a_1' a_2'' - a_1'' a_2') = o, \end{array} \qquad \begin{array}{c} (A_0' A_2'' - A_0'' A_2')^2 + \\ (A_1' A_0'' - A_1'' A_0') \\ (A_1' A_2'' - A_1'' A_2') = o, \end{array} \;.\; (d)$$

und diese Gleichung ist in y, respective v, vom vierten Grade, besitzt demnach vier Wurzeln. Hat man nun die vier Wurzeln der Gleichung (c), beziehungsweise (d), berechnet, so substituiere man dieselben in die Gleichungen (a), respective (b), wodurch man für eine jede dieser Wurzeln zwei Gleichungen erhält, die in x, beziehungsweise u, vom 2. Grade sind. Die beiden Gleichungen eines solchen Paars haben aber bloß eine gemeinschaftliche Wurzel und diese ist beizubehalten. Letzteres erhellt schon aus dem Umstande, dass man durch die Elimination von y oder v aus (a), respective (b), abermals eine Gleichung vierten Grades in x, respective u, erhalten hätte. Damit ergibt sich gleichzeitig der

Satz: Zwei Kegelschnitte haben vier gemeinsame Punkte, die auch paarweise imaginär sein können.

Satz: Zwei Kegelschnitte haben vier gemeinsame Tangenten, die auch paarweise imaginär sein können.

Capitel XI.

Polarisation.

§ 62. Gleichung der Polaren und des Pols.

Haben die in § 56 mit M' und M'' bezeichneten Punkte eine solche Lage bezüglich der Curve 2. Ordnung $U = o$, dass ihre Verbindungslinie (L) diese Curve in zwei Punkten K' und K'' durchschneidet, welche mit M' und M'' zwei harmonische Punktpaare oder eine harmonische Punktreihe bilden, so nennt man die beiden Punkte M' und M'' ein Paar harmonischer Pole in Bezug auf die Curve $U = o$. Selbstverständlich ist jetzt nach § 19 und § 30 das Doppelverhältnis $(M'M''K'K'') = \frac{\lambda'}{\lambda''} = -1$ oder die Summe $\lambda' + \lambda'' = o$, wenn auch hier wieder λ' und λ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung (344) repräsentieren. Man ist sonach im Stande, den geometrischen Ort aller dem Punkte M' zugeordneten harmonischen Pole M'' zu bestimmen, indem die Bedingung $\lambda' + \lambda'' = o$ nach

Besitzen die in § 56 mit (L') und (L'') bezeichneten Strahlen hinsichtlich der Curve 2. Classe $\Sigma = o$ eine solche Lage, dass die aus ihrem Schnittpunkte M an diese Curve gelegten Tangenten (T') und (T'') mit (L') und (L'') zwei harmonische Strahlenpaare oder einen harmonischen Strahlenbüschel bilden, so heißen die beiden Strahlen (L') und (L'') ein Paar harmonischer Polaren in Bezug auf die Curve $\Sigma = o$. Selbstverständlich ist jetzt nach § 19 und § 30 das Doppelverhältnis $(L'L''T'T'') = \frac{\lambda'}{\lambda''} = -1$ oder die Summe $\lambda' + \lambda'' = o$, wenn auch hier wieder λ' und λ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung (345) darstellen. Man ist somit in der Lage, den geometrischen Ort aller dem Strahl (L') zugeordneten harmonischen Polaren (L'') zu bestimmen, indem die Be-

Gl. (344) in § 56 bloß bedingt, dass die in dieser Gleichung mit K bezeichnete Größe verschwindet, d. h. die Coordinaten x_i'' von M'' der Relation genügen $S\,U_i' x_i'' = o$, oder $S\,U_i'' x_i' = o$, woraus sofort folgt, dass der fragliche geometrische Ort definiert ist durch eine der beiden Gleichungen:

$$P' \equiv U_1' x_1 + U_2' x_2 + U_3' x_3 = o, \quad (373)$$

$$P' \equiv U_1 x_1' + U_2 x_2' + U_3 x_3' = o, \quad (375)$$

dingung $\lambda' + \lambda'' = o$ nach Gl. (345) in § 56 bloß bedingt, dass die in dieser Gleichung mit R bezeichnete Größe verschwindet, d. h. die Coordinaten u_i'' von (L'') der Relation genügen $S\,\Sigma_i' u_i'' = o$, oder $S\,\Sigma_i'' u_i' = o$, woraus sich ergibt, dass der in Frage stehende Ort definiert ist durch eine der beiden Gleichungen:

$$M' \equiv \Sigma_1' u_1 + \Sigma_2' u_2 + \Sigma_3' u_3 = o, \quad (374)$$

$$M' \equiv \Sigma_1 u_1' + \Sigma_2 u_2' + \Sigma_3 u_3' = o, \quad (376)$$

und hieraus folgt gleichzeitig, weil dies die Gleichung einer Geraden P' | eines Punktes M' ist, der wichtige

Satz: Der geometrische Ort aller einem gegebenen Punkte zugeordneten harmonischen Pole in Bezug auf eine Curve 2. Ordnung $U = o$ ist eine Gerade.

Diese Gerade heißt die Polare des gegebenen Punktes, und ist demnach auch (373) oder (375) die Gleichung der Polaren (P') des Punktes M' von den trimetrischen Coordinaten x_i' in Bezug auf die Curve 2. Ordnung $U = o$.

Ist (L) ein Strahl in der Ebene der Curve $U = o$, welcher letztere in dem Punktpaar K', K'' trifft, und con-

Satz: Der geometrische Ort aller einem gegebenen Strahl zugeordneten harmonischen Polaren in Bezug auf eine Curve 2. Classe $\Sigma = o$ ist ein Punkt.

Dieser Punkt heißt der Pol der gegebenen Geraden, und ist daher auch (374) oder (376) die Gleichung des Pols M' der Geraden (L') von den trigonalen Coordinaten u_i' in Bezug auf die Curve 2. Classe $\Sigma = o$.

Ist M ein Punkt in der Ebene der Curve $\Sigma = o$, ferner (T'), (T'') das Tangentenpaar aus diesem Punkte

struiert man zu jedem Punkte M' in (L) den zugeordneten harmonischen Pol M'' bezüglich $U = o$, so theilen, nach der eben gegebenen Definition harmonischer Pole, die Punkte M' und M'' die Strecke $K' K''$ harmonisch und bilden somit auch ein Paar entsprechender Punkte einer quadratischen Punktinvolution mit den Doppelpunkten K' und K'',

an die Curve, und construiert man zu jedem Strahl (L') aus M den zugeordneten harmonischen Strahl (L'') bezüglich $\Sigma = o$, so theilen, nach der bereits vorausgeschickten Definition harmonischer Polaren, die Strahlen (L') und (L'') den Winkel $(T' T'')$ harmonisch und bilden folglich auch ein Paar entsprechender Strahlen einer quadratischen Strahleninvolution mit den Doppelstrahlen (T') und (T''),

und hieraus folgt der

Satz: Auf einer jeden Geraden in der Ebene einer Curve 2. Ordnung existieren unendlich viele Paare harmonischer Pole bezüglich dieser Curve, und dieselben bilden eine quadratische Punktinvolution, deren Doppelpunkte die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Curve darstellen.

Zurückkehrend zur Polaren (P') des Punktes M', seien M''' und M^{IV} diejenigen Punkte, in welchen die Polare (P') die Curve $U = o$ durchschneidet und x_i''', x_i^{IV} die trimetrischen Coordinaten dieser Punkte. Alsdann lauten nach (352) in § 58 die Gleichungen der Tangenten (T''') und (T^{IV}), welche man in den

Satz: Aus einem jeden Punkte in der Ebene einer Curve 2. Classe lassen sich unendlich viele Paare harmonischer Polaren bezüglich dieser Curve verzeichnen, und dieselben bilden eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die aus diesem Punkte an die Curve gelegten Tangenten sind.

Zurückkehrend auf den Pol M' der Geraden (L'), seien (T''') und (T^{IV}) die Tangenten, welche man in jenen Punkten M''' und M^{IV} an die Curve $\Sigma = o$ legen kann, wo diese von (L') geschnitten wird, und u_i''', u_i^{IV} die trigonalen Coordinaten besagter Tangenten. Alsdann

Punkten M''' und M^{IV} an die Curve $U = o$ legen kann:

$T''' \equiv U_1'''x_1 + U_2'''x_2 + U_3'''x_3 = o, \quad T^{IV} \equiv U_1^{IV}x_1 + U_2^{IV}x_2 + U_3^{IV}x_3 = o,$

wenn das Symbol $U_i(\varrho)$ definiert ist durch $U_i(\varrho) = a_{i,1}x_1(\varrho) + a_{i,2}x_2(\varrho) + a_{i,3}x_3(\varrho)$, und weil M''' und M^{IV} auch Punkte der Polaren (P') sind, so unterliegen nach Gl. (375) dieses Paragraphen deren Coordinaten x_i''' und x_i^{IV} den beiden Relationen

$U_1'''x_1' + U_2'''x_2' + U_3'''x_3' = o,$
$U_1^{IV}x_1' + U_2^{IV}x_2' + U_3^{IV}x_3' = o,$

welche im Vereine mit den beiden obigen Gleichungen aussagen, dass M' ein gemeinsamer Punkt der Geraden (T''') und (T^{IV}) ist, und hieraus folgt, dass die Polare (P') des Punktes M' identisch ist mit der Berührungssehne des aus diesem Punkte an die Curve $U = o$ gelegten Tangentenpaars.

lauten nach (353) in § 58 die Gleichungen der Berührungspunkte M''' und M^{IV}:

$M''' = \Sigma_1'''u_1 + \Sigma_2'''u_2 + \Sigma_3'''u_3 = o, \quad M^{IV} \equiv \Sigma_1^{IV}u_1 + \Sigma_2^{IV}u_2 + \Sigma_3^{IV}u_3 = o,$

wenn das Symbol $\Sigma_i(\varrho)$ definiert ist durch $\Sigma_i(\varrho) = \alpha_{i,1}u_1(\varrho) + \alpha_{i,2}u_2(\varrho) + \alpha_{i,3}u_3(\varrho)$, und weil M''' und M^{IV} gleichzeitig Punkte von (L') sind, so müssen die Coordinaten u_i' dieser Geraden den beiden obigen Gleichungen genügen, d. h. die Relationen bestehen

$\Sigma_1'''u_1' + \Sigma_2'''u_2' + \Sigma_3'''u_3' = o,$
$\Sigma_1^{IV}u_1' + \Sigma_2^{IV}u_2' + \Sigma_3^{IV}u_3' = o,$

woraus nach Gl. (376) dieses Paragraphen folgt, dass M' ein gemeinsamer Punkt der Tangenten (T''') und (T^{IV}) ist, und hieraus ersieht man wieder, dass der Pol M' der Geraden (L') identisch erscheint mit jenem Punkte, in welchem die beiden Tangenten sich durchschneiden, die man in den Schnittpunkten von (L') mit der Curve an letztere legen kann.

Gestützt auf die eben angestellten Betrachtungen und in Anbetracht, dass eigentliche Curven 2. Ordnung gleichzeitig Curven 2. Classe sind, die wir mit dem gemeinsamen Namen der Kegelschnitte belegten, gelangt man sonach zu dem folgenden Ergebnisse. Ist nämlich (P') die Polare des Punktes M' in Bezug auf den Kegelschnitt

$$U \equiv a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o,$$

so ist umgekehrt M' der Pol der Geraden (P') in Bezug auf denselben Kegelschnitt. Irgend ein durch M' gelegter Strahl (L) durchschneidet die (P') in einem Punkte M, dagegen den Kegelschnitt (U) in zwei Punkten K', K'', welche die Strecke $M' M$ harmonisch theilen, und umgekehrt theilen wieder M' und M die Strecke $K' K''$ harmonisch; ferner hat der Punkt M, in welchem der aus M' gelegte Strahl (L) die (P') trifft, noch eine solche Lage, dass das aus ihm an den Kegelschnitt (U) gelegte Tangentenpaar (T'), (T'') den Winkel (P', L) harmonisch theilt, während wieder umgekehrt (P') und (L) den Winkel $(T' T'')$ harmonisch theilen. Nachdem endlich die Gleichung des Kegelschnittes (U) in trigonalen Liniencoordinaten lautet:

$$\Sigma \equiv A_{1,1} u_1^2 + 2 A_{1,2} u_1 u_2 + A_{2,2} u_2^2 + 2 A_{1,3} u_1 u_3 + 2 A_{2,3} u_2 u_3 + A_{3,3} u_3^2 = o,$$

so ist nach (373)

$$P' \equiv (a_{1,1} x_1' + a_{1,2} x_2' + a_{1,3} x_3') x_1 + (a_{1,2} x_1' + a_{2,2} x_2' + a_{2,3} x_3') x_2 + (a_{1,3} x_1' + a_{2,3} x_2' + a_{3,3} x_3') x_3 = o \tag{377}$$

die Gleichung der Polaren (P') des Punktes M' von den trimetrischen Coordinaten x_i' bezüglich des Kegelschnittes (U), während umgekehrt, wenn u_i' die trigonalen Coordinaten von (P') sind, nach (374)

$$M' \equiv (A_{1,1} u_1' + A_{1,2} u_2' + A_{1,3} u_3') u_1 + (A_{1,2} u_1' + A_{2,2} u_2' + A_{2,3} u_3') u_2 + (A_{1,3} u_1' + A_{2,3} u_2' + A_{3,3} u_3') u_3 = o \tag{378}$$

die Gleichung des Pols von (P') darstellt.

Wie man sieht, stimmen die Gleichungen (373) bis (376) mit den früher gefundenen (352) bis (355) vollkommen überein, nur haben hier x_i', beziehungsweise u_i', eine andere Bedeutung, u. zw. sind in den vier ersten Gleichungen x_i' die trimetrischen Coordinaten des Pols und u_i' die trigonalen Coordinaten der Polaren, während in den vier letzten Gleichungen die Coordinaten x_i' dem Berührungspunkte, jene u_i' aber der Tangente angehören. Daraus folgt aber auch gleichzeitig, dass die Polare eines Punktes M' des Kegelschnittes (U) bezüglich des letzteren dargestellt wird durch die Tangente, gelegt in diesem Punkte an die Curve, und dass der Pol einer Tangente (T') des Kegelschnittes (U) be-

züglich des letzteren identisch erscheint mit dem Berührungspunkte von (T') mit der Curve. Ferner ist auch klar, dass unter Zugrundelegung von gebräuchlichen Punkt- und Liniencoordinaten x, y, respective u, v, die Gleichungen (352) bis (355) zu ersetzen wären durch jene (358) bis (361), und ist sonach (358) oder (360) die Gleichung der Polaren eines Punktes M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 bezüglich der Curve 2. Ordnung $U \equiv a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} x y + \ldots + a_{3,3} = o$ und (359) oder (361) die Gleichung des Pols einer Geraden (L_1) von den Coordinaten u_1, v_1, bezüglich der Curve 2. Classe $\Sigma \equiv \alpha_{1,2} u^2 + 2 \alpha_{1,2} u v + \ldots + \alpha_{3,3} = o$.

§ 63. Sätze über Pol und Polare.

Satz. Ist die Discriminante A der ternären Form $U = S\, a_{i,k} x_i x_k$ von null verschieden, so ist die Polare eines jeden Punktes bezüglich der Curve $U = o$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Gleichung der Polaren eines Punktes $M^{(o)}$ von den Coordinaten $x_i^{(o)}$ bezüglich einer Curve 2. Ordnung $U = o$ lautet nach § 62
$$P^{(o)} \equiv U_1^{(o)} x_1 + U_2^{(o)} x_2 + U_3^{(o)} x_3 = o,$$

Satz. Ist die Discriminante E der ternären Form $\Sigma = S\, \alpha_{i,k} u_i u_k$ von null verschieden, so ist der Pol einer jeden Geraden bezüglich der Curve $\Sigma = o$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Gleichung des Pols einer Geraden $(L^{(o)})$ von den Coordinaten $u_i^{(o)}$ bezüglich einer Curve 2. Classe $\Sigma = o$ lautet nach § 62
$$M^{(o)} \equiv \Sigma_1^{(o)} u_1 + \Sigma_2^{(o)} u_2 + \Sigma_3^{(o)} u_3 = o,$$

und in dem speciellen Fall, wo die Discriminante $A = o$, respective $E = o$ ist, existiert stets ein Punkt $M^{(o)}$, respective eine Gerade $(L^{(o)})$, für dessen Coordinaten $x_i^{(o)}$, beziehungsweise $u_i^{(o)}$, gleichzeitig die nachfolgenden drei Gleichungen bestehen, nämlich:

$$(a) \quad \begin{aligned} a_{1,1} x_1^{(o)} + a_{1,2} x_2^{(o)} + a_{1,3} x_3^{(o)} &= o \\ a_{1,2} x_1^{(o)} + a_{2,2} x_2^{(o)} + a_{2,3} x_3^{(o)} &= o \\ a_{1,3} x_1^{(o)} + a_{2,3} x_2^{(o)} + a_{3,3} x_3^{(o)} &= o, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} u_1^{(o)} + \alpha_{1,2} u_2^{(o)} + \alpha_{1,3} u_3^{(o)} &= o \\ \alpha_{1,2} u_1^{(o)} + \alpha_{2,2} u_2^{(o)} + \alpha_{2,3} u_3^{(o)} &= o \\ \alpha_{1,3} u_1^{(o)} + \alpha_{2,3} u_2^{(o)} + \alpha_{3,3} u_3^{(o)} &= o, \end{aligned} \quad (b)$$

u. zw. ist nach der Determinantentheorie

$$(379)\quad \begin{matrix} x_1^{(o)} : x_2^{(o)} : x_3^{(o)} = \\ A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3}. \end{matrix} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \begin{matrix} u_1^{(o)} : u_2^{(o)} : u_3^{(o)} = \\ E_{i,1} : E_{i,2} : E_{i,3}. \end{matrix} \quad (380)$$

Substituiert man nun in $U_i^{(o)}$ für $x_i^{(o)}$, in $\Sigma_i^{(o)}$ für $u_i^{(o)}$, die aus den letzten Gleichungen resultierenden Werte, so wird $U_i^{(o)} = o$ und $\Sigma_i^{(o)} = o$, weshalb die Gleichungen der Polaren und des Pols übergehen in $o = o$, zum Beweise, dass die Polare des durch (379) bestimmten Punktes, sowie der Pol der durch (380) gegebenen Geraden, unbestimmt ist. Wird aber A, sowie E, nicht gleich null, so existiert auch kein Wertesystem von $x_i^{(o)}$, beziehungsweise $u_i^{(o)}$, welches den Gleichungen (a), respective (b), gleichzeitig genügt, und daher ist auch die Polare von $M^{(o)}$ eine bestimmte Gerade, sowie der Pol von $(L^{(o)})$ ein bestimmter Punkt.

Satz. Ist die Discriminante A der ternären Form $U = S a_{i,k} x_i x_k$ von null verschieden, so ist der Pol der Geraden (P') bezüglich $U = o$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist $a_1 u_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ die Gleichung der Geraden (P'), so resultieren die Coordinaten x_i' ihres Pols nach (373)

Satz. Ist die Discriminante E der ternären Form $\Sigma = S \alpha_{i,k} u_i u_k$ von null verschieden, so ist die Polare eines Punktes M' bezüglich $\Sigma = o$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = o$ die Gleichung des Punktes M', so resultieren die Coordinaten u_i' seiner Polaren nach (374)

aus den drei Gleichungen

$$\begin{matrix} a_{i,1} x_1' + a_{i,2} x_2' + \\ a_{i,3} x_3' = \varrho a_i, \end{matrix} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \begin{matrix} \alpha_{i,1} u_1' + \alpha_{i,2} u_2' + \\ \alpha_{i,3} u_3' = \varrho \alpha_i, \end{matrix}$$

in welchen ϱ einen Proportionalitätsfactor darstellt, und hieraus lassen sich, unter der ausdrücklichen Annahme, dass A und E nicht gleich null werden, die Coordinaten x_i' und und u_i' eindeutig berechnen. Es bilden somit Pol und Polare ein festes System, sobald ein irreducibler Kegelschnitt zu Grunde liegt, d. h. durch die Annahme des einen Gebildes ist das andere eindeutig bestimmt. Dieses feste System heißt das Polarsystem, und wenn daher x ein in der Ebene des Kegelschnittes $U \equiv a_{1,1} x_1^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2 +$

$2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o$ liegender Punkt ist mit den trimetrischen Coordinaten x_i, so entspricht demselben eine Gerade (u), deren Coordinaten hervorgehen aus $\varrho u_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3$, während umgekehrt einem in der Ebene der Curve $U = o$ liegenden Strahl (u) von den Coordinaten u_i ein Punkt x entspricht, dessen Coordinaten sich ergeben aus $\mu x_i = A_{i,1}u_1 + A_{i,2}u_2 + A_{i,3}u_3$, sobald man in diesen Gleichungen $i = 1, 2, 3$, $a_{i,k} = a_{k,i}$ und $A_{i,k} = A_{k,i}$ setzt. Ferner ist der geometrische Ort der Polaren sämmtlicher Punkte eines Kegelschnittes $\varphi(x_1x_2x_3) = o$ bezüglich des Kegelschnittes $U = o$ als Grundcurve oder Ordnungscurve abermals ein Kegelschnitt von der Gleichung $\varphi(A_{1,1}u_1 + A_{1,2}u_2 + A_{1,3}u_3, A_{1,2}u_1 + A_{2,2}u_2 + A_{2,3}u_3, A_{1,3}u_1 + A_{2,3}u_2 + A_{3,3}u_3) = o$, und dieser Kegelschnitt heißt die polarreciproke Curve von $\varphi(x_1x_2x_3) = o$. Wäre dagegen die Gleichung des Kegelschnittes (φ) in trimetrischen Liniencoordinaten gegeben und $\Phi(u_1u_2u_3) = o$ diese Gleichung, so hieße $\Phi(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3, a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3, a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2 + a_{3,3}x_3) = o$ die Gleichung des polarreciproken Kegelschnittes von (φ) bezüglich des Grundkegelschnittes $U = o$. Damit ist die Übereinstimmung mit demjenigen vollkommen erwiesen, was in § 53 gesagt wurde.

Satz. Ist $U = o$ die Gleichung eines Geradenpaars, so geht die Polare eines jeden Punktes bezüglich $U = o$ durch den Mittelpunkt dieses Paars.

Beweis. Wenn das geometrische Äquivalent der Gleichung $U = o$ ein Geradenpaar sein soll, so verschwindet bekanntlich die Discriminante A von U und ergeben sich nach Gl. (350) in § 57 die Coordinaten $x_i^{(o)}$ des Mittelpunktes $M^{(o)}$ dieses Paars aus

Satz. Ist $\Sigma = o$ die Gleichung eines Punktpaars, so liegt der Pol einer jeden Geraden bezüglich $\Sigma = o$ in dem Träger des Paars.

Beweis. Wenn das geometrische Äquivalent der Gleichung $\Sigma = o$ ein Punktpaar sein soll, so verschwindet bekanntlich die Discriminante E von Σ und ergeben sich nach Gl. (251) in § 57 die Coordinaten $u_i^{(o)}$ des Trägers $(L^{(o)})$ dieses Paars aus

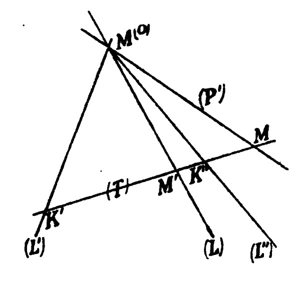


Fig. 73.

Fig. 74.

$x_1^{(o)} : x_2^{(o)} : x_3^{(o)} = A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3}$. $\quad i = 1, 2, 3$

Anderseits lautet nach (375) in § 62 die Gleichung der Polaren (P') eines Punktes M' von den Coordinaten x_i' bezüglich $U = o$:

$P' \equiv U_1 x_1' + U_2 x_1' + U_3 x_3' = o$,

und weil für $x_i = x_i^{(o)}$, wie man soeben gesehen hat, auch $U_i = U_i^{(o)} = o$ wird, so verschwindet das Gleichungspolynom obiger Gleichung für $x_i = x_i^{(o)}$, mögen hierbei die Coordinaten x_i' was immer für Werte besitzen, weshalb auch die Polare eines jeden Punktes M' durch den Mittelpunkt $M^{(o)}$ des Paars gehen muss.

Es ist nun auch leicht, die Polare (P') eines Punktes M' bezüglich eines Geradenpaars (L'), (L'') constructiv zu bestimmen. Man braucht zu diesem Zwecke bloß den Punkt M' in Fig. 73 mit dem Mittelpunkte $M^{(o)}$ des Paars durch eine Gerade (L)

$u_1^{(o)} : u_2^{(o)} : u_3^{(o)} = E_{i,1} : E_{i,2} : E_{i,3}$.

Anderseits lautet nach (376) in § 62 die Gleichung des Pols M' einer Geraden (P') von den Coordinaten u_i' bezüglich $\Sigma = o$:

$M' \equiv \Sigma_1 u_1' + \Sigma_2 u_2' + \Sigma_3 u_3' = o$,

und weil für $u_i = u_i^{(o)}$, wie man soeben gesehen hat, auch $\Sigma_i = \Sigma_i^{(o)} = o$ wird, so verschwindet das Gleichungspolynom obiger Gleichung für $u_i = u_i^{(o)}$, mögen hierbei die Coordinaten u_i' was immer für Werte besitzen, weshalb auch der Pol einer jeden Geraden (P') in der Geraden $(L^{(o)})$ liegen muss.

Es ist nun auch leicht, den Pol M' einer Geraden (P') bezüglich eines Punktpaars K', K'' constructiv zu bestimmen. Man braucht zu diesem Zwecke bloß die Gerade (P') in Fig. 74 mit dem Träger $(L^{(o)})$ des Paars zum Schnitte zu bringen, wodurch

zu verbinden und dann zu den beiden Elementen (L'), (L'') des Paars und dem Strahl (L) die vierte harmonische Linie in der in § 22 gegebenen Methode zu construieren, welche gleichzeitig die gesuchte Polare (P') darstellt. Denn legt man nun durch den Punkt M' irgend eine Transversale (T), welche die beiden Elemente des Paars in K' und K'', die Polare (P') aber in M trifft, so repräsentieren nach § 18 die Punkte K', K'' und M, M' zwei harmonische Punktpaare, und ist sonach auch M, M' ein Paar harmonischer Pole bezüglich des Geradenpaars. Nachdem nun die durch M' gelegte Transversale sonst ganz beliebig gewählt wurde, so ist auch jeder Punkt von (P') ein zugeordneter harmonischer Pol von M', was die Richtigkeit der Construction nach der Definition der Polaren beweiset. Fällt M' mit $M^{(o)}$ zusammen, so führt diese Construction nicht mehr zum Ziel und ist die Polare dann unbestimmt. (Siehe § 19.)

Satz. Ist (P') die Polare des Punktes M', (P'') jene eines anderen M'', beide be-

der Punkt M sich ergibt, und hierauf zu den Punkten K', K'' und M den vierten harmonischen Punkt nach der in § 22 bereits gegebenen Methode zeichnerisch zu ermitteln, welcher zugleich den gesuchten Pol M' von (P') repräsentiert. Denn legt man durch den Punkt M' irgend eine Gerade (L), welche die (P') in dem Punkte T trifft, und verbindet letzteren durch die Strahlen (L') und (L'') mit K' und K'', so repräsentieren nach § 18 die Strahlen (L'), (L'') und (L), (P') zwei harmonische Geradenpaare, und ist sonach auch (L), (P') ein Paar harmonischer Polaren bezüglich des Punktpaars, indem die aus T an K' und K'' gelegten Tangenten mit (L') und (L'') identisch sind. Nachdem aber die durch M' gelegte Gerade (L) sonst ganz beliebig gewählt wurde, ist ein jeder durch M' gelegte Strahl eine zugeordnete harmonische Polare von (P'), was die Richtigkeit der Construction nach der Definition des Pols constatiert. Fällt (P') mit $(L^{(o)})$ zusammen, so ist der Pol unbestimmt. (Siehe § 19.)

Satz. Ist M' der Pol der Geraden (P') und M'' jener einer anderen (P''), beide

zogen auf einen Kegelschnitt $U = o$, und ist M' ein Punkt von (P''), so ist umgekehrt auch M'' ein Punkt von (P').

bezogen auf einen Kegelschnitt $\Sigma = o$, und geht (P') durch M'', so geht umgekehrt auch (P'') durch M'.

Beweis. Die Gleichungen der Polaren (P') und (P'') sind nach (373) in § 62, wenn x_i' und x_i'' die Coordinaten von M' und M'' bedeuten,

$$P' \equiv U_1'x_1 + U_2'x_2 + U_3'x_3 = o$$
$$P'' \equiv U_1''x_1 + U_2''x_2 + U''_3x_3 = o,$$

Beweis. Die Gleichungen der Pole M' und M'' sind nach (374) in § 62, wenn u_i' und u_i'' die Coordinaten von (P') und (P'') bedeuten,

$$M' \equiv \Sigma_1'u_1 + \Sigma_2'u_2 + \Sigma_3'u_3 = o$$
$$M'' \equiv \Sigma_1''u_1 + \Sigma_2''u_2 + \Sigma_3''u_3 = o,$$

und weil zufolge der hier gemachten Annahme

der Punkt M' in der Geraden (P'') liegt, so ist

$$U_1''x_1' + U_2''x_2' + U_3''x_3' = o,$$

die Gerade (P') durch den Punkt M'' geht, so ist

$$\Sigma_1''u_1' + \Sigma_2''u_2' + \Sigma_3''u_3' = o,$$

woraus nach den in § 54 bereits gegebenen Identitäten

$$S\,U_i''x_i' = S\,U_i'x_i'' \text{ und } S\,\Sigma_i''u_i'' = S\,\Sigma_i'u_i'' \text{ folgt:}$$

$$U_1'x_1'' + U_2'x_2'' + U_3'x_3'' = o, \quad | \quad \Sigma_1'u_1'' + \Sigma_2'u_2'' + \Sigma_3'u_3'' = o,$$

zum Beweise, dass der Punkt M'' in der Polare (P') liegt, respective (P'') durch M' geht, und hieraus folgt nun der weitere

Satz: Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich die Polare dieses Punktes um den Pol der Geraden.

Satz: Dreht sich eine Gerade um einen in ihr liegenden Punkt, so beschreibt der Pol der Geraden die Polare des Punktes.

Sind daher M' und M'' zwei Punkte einer Geraden (P), (P') und (P'') die Polaren der letzteren bezüglich eines Kegelschnittes (U), so ist der Schnittpunkt der Strahlen (P') und (P'') der Pol M von (P) bezüglich dieses Kegelschnittes, und umgekehrt, repräsentieren (P') und (P'') zwei durch den Punkt M gehende Strahlen, M' und M'' die Pole derselben bezüglich eines Kegelschnittes, so ist die Verbindungsgerade dieser Punkte gleichzeitig die Polare von M bezüglich dieser Curve. Diese Eigenschaften des Pols und der Polaren ermöglichen es nun, die Polare eines Punktes M

bezüglich eines Kegelschnittes zu construieren, wenn das aus M an die Curve gelegte Tangentenpaar imaginär erscheint, sowie den Pol einer Geraden zu finden, sobald die Schnittpunkte der letzteren mit dem Kegelschnitte ebenfalls imaginär sind.

Satz. Ist ein Kegelschnitt einem Viereck umgeschrieben, so ist in dem Diagonaldreieck des letzteren jede Seite die Polare der Gegenecke.

Beweis. Sind M', M'', M''' und M^{IV} in Fig. 75 die vier Ecken des der Curve eingeschriebenen Vierecks, sowie M^V, M^{VI} und M^{VII} die drei Ecken des Diagonaldreiecks vorliegenden Vierecks, so repräsentieren nach § 22 die Strahlen, welche die Ecke M^V mit den Punkten M', M^{IV} M^{VI}, M^{VII} verbinden, einen harmonischen Strahlenbüschel, und daher ist auch, zufolge des bereits vielfach angewendeten Satzes von Pappus, wenn man die Schnittpunkte der Dreiecksseite $M^V M^{VII}$ mit den Strahlen $M^{VI} M^{IV}$ und $M^{VI} M''$ mit M_1 und M_2 bezeichnet, $(M' M^{IV} M^{VI} M_1) = (M''' M'' M^{VI} M_2) = -1$, d. h. M_1 und M^{VI}, sowie M_2 und M^{VI}, repräsentieren je ein Paar harmonischer Pole bezüglich eines jeden dem Viereck umgeschriebenen Kegelschnittes, weshalb auch die

Satz. Ist ein Kegelschnitt einem Vierseit eingeschrieben, so ist in dem Diagonaldreiseit des letzteren jede Ecke der Pol der Gegenseite.

Beweis. Es seien wieder (L'), (L''), (L''') und (L^{IV}) in Fig. 76 die vier Seiten des der Curve umgeschriebenen Vierseits, sowie (L^V), (L^{VI}) und (L^{VII}) die Seiten des Diagonaldreiseits dieses Vierseits. Alsdann sind nach § 22 (L'), (L'') und (L^{VII}), (L_1), sowie (L'''), (L^{IV}) und (L^{VII}), (L_2) harmonisch, sobald noch die Strahlen, welche die Punkte M_1 und M_2 mit dem Schnittpunkte der Seiten (L^V) und (L^{VI}) des Diagonaldreiseits verbinden, mit (L_1) und (L_2) bezeichnet werden. Aus diesem Grunde stellen aber auch (L_1) und (L^{VII}), sowie (L_2) und (L^{VII}), je ein Paar harmonischer Polaren dar bezüglich eines jeden Kegelschnittes, welcher diesem Vierseit eingeschrieben erscheint, und ist daher der Schnittpunkt von (L_1) mit (L_2), oder was dasselbe ist, der Schnittpunkt der beiden

Verbindungsgeraden $M^{V} M^{VII}$ die Polare von M^{VI} bezüglich einer jeden dieser Curven darstellt.

Strahlen (L^{V}) und (L^{VI}) der Pol von (L^{VII}).

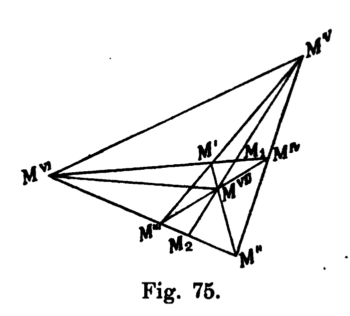


Fig. 75.

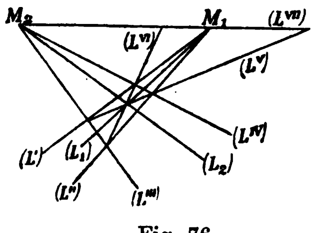


Fig. 76.

Es wird hier noch bemerkt, dass der erste der beiden eben bewiesenen Sätze die Möglichkeit bietet, die Polare eines Punktes bezüglich eines Kegelschnittes constructiv zu bestimmen, ohne das Tangentenpaar aus dem Punkte an die Curve zu verzeichnen. Man lege nämlich durch den Punkt M^{V} in Fig. 75, dessen Polare z. B. bestimmt werden soll, zwei Strahlen, welche den Kegelschnitt in den Punkten M', M''' und M'', M^{IV} treffen, ziehe hierauf die Strahlen $M' M^{IV}$ und $M'' M'''$, welche im Punkte M^{VI} sich treffen, sowie jene $M' M''$ und $M''' M^{IV}$, die in M^{VII} sich durchschneiden, worauf man endlich M^{VI} mit M^{VII} durch eine Gerade verbindet, die zugleich die gesuchte Polare ist.

Satz. Sind M', M'' und M''', M^{IV} zwei Paare harmonischer Pole bezüglich eines Kegelschnittes, so repräsentieren auch die Schnittpunkte M^{V}, M^{VI} der Verbindungsgeraden $M' M'''$ und $M'' M^{IV}$, $M' M^{IV}$ und $M'' M'''$ ein Paar solcher Pole.

Beweis. Bei der Begründung dieses Satzes setze

Satz. Sind (L'), (L'') und (L'''), (L^{IV}) zwei Paare harmonischer Polaren bezüglich eines Kegelschnittes, so repräsentieren die Verbindungsgeraden (L^{V}), (L^{VI}) der Punkte $\overline{(L')(L''')}$ und $\overline{(L'')(L^{IV})}$, $\overline{(L')(L^{IV})}$ und $\overline{(L'')(L''')}$ ein Paar solcher Polaren.

Beweis. Bei der Begründung dieses Satzes setze

man der Einfachheit wegen die Gleichung des Kegelschnittes oder der Curve 2. Ordnung in der Form voraus

$$U \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = o,$$

man der Einfachheit wegen die Gleichung des Kegelschnittes oder der Curve 2. Classe in der Form voraus

$$\Sigma \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = o,$$

was nach den in dem folgenden Paragraphen angestellten Betrachtungen immer thunlich ist. Nachdem nun hier $U_i = 2 a_i x_i$ und $\Sigma_i = 2 \alpha_i u_i$ wird, erhält man für die Gleichungen der

Polaren (P') und (P''') der Punkte M' und M''' | Pole M' und M''' der Geraden (L') und (L''')

die Formen, u. zw.

$P' \equiv a_1 x_1' x_1 + a_2 x_2' x_2 + a_3 x_3' x_3 = o$, $P''' \equiv a_1 x_1''' x_1 + a_2 x_2''' x_2 + a_3 x_3''' x_3 = o$; | $M' \equiv \alpha_1 u_1' u_1 + \alpha_2 u_2' u_2 + \alpha_3 u_3' u_3 = o$, $M''' \equiv \alpha_1 u''' u_1 + \alpha_2 u_2''' u_2 + \alpha_3 u_3''' u_3 = o$;

es müssen sonach die Coordinaten

x_i', x_i'' und $x_i''' x_i^{IV}$ der Polenpaare M', M'' und $M''' M^{IV}$ | u_i', u_i'' und $u_i''' u_i^{IV}$ der Polarenpaare $(L'), (L'')$ und $(L''') (L^{IV})$

den beiden Gleichungen genügen

$$(a)\ S a_i x_i' x_i'' = o,\ S a_i x_i''' x_i^{IV} = o, \quad | \quad S \alpha_i u_i' u_i'' = o,\ S \alpha_i u_i''' u_i^{IV} = o,\ (b)$$

und ist daher der Beweis erbracht, sobald es gelingt nachzuweisen, dass zwischen den Coordinaten

x_i^V und x_i^{VI} der vorhin definierten Punkte M^V und M^{VI} dieselbe Relation besteht. | u_i^V und u_i^{VI} der vorhin definierten Strahlen (L^V) und (L^{VI}) dieselbe Relation besteht.

Zu diesem Zwecke führe man vier Coefficienten k', k'', k''' und k^{IV} ein, für welche die Identität gilt

$$(c)\quad k'M' + k''M'' + k'''M''' + k^{IV} M^{IV} \equiv o, \quad | \quad k' L' + k'' L'' + k''' L''' + k^{IV} L^{IV} \equiv o, \quad (d)$$

wenn

$$M(\varrho) = x_1(\varrho) u_1 + x_2(\varrho) u_2 + x_3(\varrho) u_3 \quad | \quad L(\varrho) = u_1(\varrho) x_1 + u_2(\varrho) x_2 + u_3(\varrho) x_3$$

ist, d. h. also, welche hervorgehen aus den drei Gleichungen

$$(e)\quad k' x_i' + k'' x_i'' + k''' x_i''' + k^{IV} x_i^{IV} = o, \quad i = 1, 2, 3 \quad k' u_i' + k'' u_i'' + k''' u_i''' + k^{IV} u_i^{IV} = o, \quad (f)$$

und ist dadurch zunächst in der Lage, auf die Gleichungen und Coordinaten der

Punkte M^V und M^{IV} zu schließen. Nach Gl. (c) repräsentieren nämlich die Gleichungen $k' M' + k''' M''' = o$ und $k'' M'' + k^{IV} M^{IV} = o$ einen und denselben Punkt, nämlich den Schnittpunkt der Geraden $M'M'''$ und $M''M^{IV}$, sowie auch die beiden Gleichungen $k' M' + k^{IV} M^{IV} = o$ und $k'' M'' + k''' M''' = o$ einen und denselben Punkt darstellen, u. zw. den Schnittpunkt der Geraden $M' M^{IV}$ und $M'' M'''$. Nachdem nun diese Schnittpunkte mit M^V und M^{IV} bezeichnet wurden, sind somit die Gleichungen der letzteren

$$M^V \equiv k' M' + k''' M''' = o,$$
$$M^{VI} \equiv k'' M'' + k''' M''' = o,$$

Strahlen (L^V) und (L^{VI}) zu schließen. Nach Gl. (d) repräsentieren nämlich die Gleichungen $k' L' + k''' L''' = o$ und $k'' L'' + k^{IV} L^{IV} = o$ einen und denselben Strahl, nämlich die Verbindungsgerade der Punkte $\overline{(L')(L''')}$ und $(L'')(L^{IV})$, sowie auch die beiden Gleichungen $k' L' + k^{IV} L^{IV} = o$ und $k'' L'' + k''' L''' = o$ einer und derselben Geraden, u. zw. der Verbindungsgeraden der Punkte $(L')(L^{IV})$ und $\overline{(L'')(L''')}$ angehören. Nachdem nun diese Verbindungsgeraden mit (L^V) und (L^{VI}) bezeichnet wurden, sind sonach die Gleichungen der letzteren

$$L^V \equiv k' L' + k''' L''' = o,$$
$$L^{VI} \equiv k'' L'' + k''' L''' = o,$$

während deren Coordinaten sich ergeben aus

$$(g)\ldots \quad x_i^V = k' x_i' + k''' x_i''', \quad x_i^{VI} = k'' x_i'' + k''' x_i''', \qquad\Big|\qquad u_i^V = k' u_i' + k''' u_i''', \quad u_i^{VI} = k'' u_i'' + k''' u_i''', \quad \ldots(h)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Mittelst der eben gefundenen Gleichungen für die Coordinaten von M^V, M^{VI}, respective (L^V), (L^{VI}), lassen sich nun auch die Producte $x_i^V\, x_i^{VI}$ und $u_i^V\, u_i^{VI}$ berechnen, u. zw. findet man unter gleichzeitiger Berücksichtigung der früher gefundenen Relationen (e) und (f)

$$x_i^V\, x_i^{VI} = k' k'' x_i' x_i'' - k''' . k^{IV} x_i''' . x_i^{IV} \qquad\Big|\qquad u_i^V\, u_i^{VI} = k' k'' u_i' u_i - k''' . k^{IV} u_i''' . u_i^{IV}$$

und hieraus zufolge der Gleichungen (a) und (b)

$$(i)\ldots \quad S\, a_i\, x_i^V x_i^{VI} = o, \qquad\Big|\qquad S\, \alpha_i\, u_i^V u_i^{VI} = o, \quad \ldots(k)$$

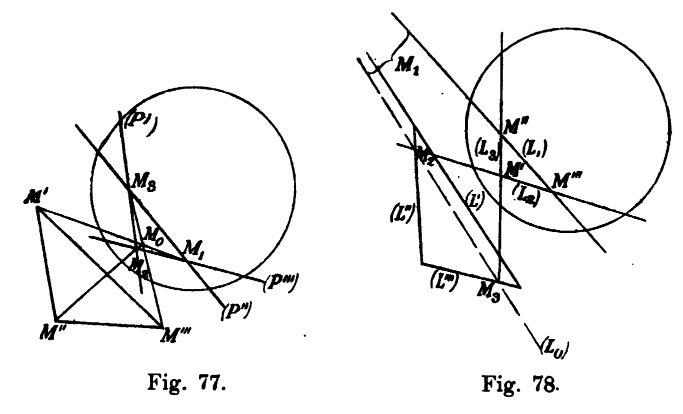


Fig. 77. Fig. 78.

zum Beweise, dass auch

M^{V} und M^{VI} ein Paar harmonischer Pole bezüglich $U = o$ darstellen.

Satz. Sind M', M'', M''' drei Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes $U = o$ und (P'), (P''), (P''') die Polaren obiger Punkt bezüglich dieser Curve, so bilden die letzteren ein Dreieck (Dreiseit), welches zu dem Dreieck $M' M'' M'''$ central collinear ist.

Beweis. Die Gleichungen der Polaren $(P(\varrho))$ der Punkte $M(\varrho)$ von den Coordinaten $x(\varrho)$ bezüglich der Curve $U = o$ sind nach (373) in § 62

$$P' \equiv S\, U_i'\, x_i = o,$$
$$P'' \equiv S\, U_i''\, x_i = o,$$
$$P''' \equiv S\, U_i'''\, x_i = o,$$

und es bilden dieselben ein

(L^{V}) und (L^{VI}) ein Paar harmonischer Polaren bezüglich $\Sigma = o$ darstellen.

Satz. Sind (L'), (L''), (L''') drei Strahlen in der Ebene eines Kegelschnittes $\Sigma = o$ und M', M'', M''' die Pole obiger Strahlen bezüglich dieser Curve, so sind die letzteren die Ecken eines Dreiseits, welches zu dem von den Strahlen (L'), (L''), (L''') gebildeten Dreieck (Dreiseit) central collinear ist.

Beweis. Die Gleichungen der Pole $M(\varrho)$ der Strahlen $(L(\varrho))$ von den Coordinaten $u_i(\varrho)$ bezüglich der Curve $\Sigma = o$ sind nach (374) in § 62

$$M' \equiv S\, \Sigma_i'\, u_i = o,$$
$$M'' \equiv S\, \Sigma_i''\, u_i = o,$$
$$M''' \equiv S\, \Sigma_i'''\, u_i = o,$$

und es repräsentieren diesel-

Dreieck (Dreiseit), welches dem Dreieck $M' M'' M'''$ conjugiert ist und auch das dem letzteren entsprechende Polardreieck heißt. Nennt man (Fig. 77) die Ecken des von den drei Polaren $(P(\varrho))$ gebildeten Dreiecks M_1, M_2 und M_3, so lässt sich nun nachweisen, dass die drei Verbindungsgeraden $M' M_1$, $M'' M_2$ und $M''' M_3$, welche wir kurz mit (L'), (L'') und (L''') bezeichnen, in einem und demselben Punkte M_0 sich durchschneiden. Nach Gl. (82) in § 14 sind nämlich die Gleichungen dieser drei Strahlen

$$L' \equiv \frac{P''}{SU_i'' x_i'} - \frac{P'''}{SU_i''' x_i'} = o$$

$$L'' \equiv \frac{P'''}{SU_i''' x_i''} - \frac{P'}{SU_i' x_i''} = o$$

$$L''' \equiv \frac{P'}{SU_i' x_i'''} - \frac{P''}{SU_i'' x_i'''} = o,$$

ben die Ecken eines Dreiecks, welches dem Dreieck von den Seiten $(L(\varrho))$ conjugiert ist und auch das dem letzteren entsprechende Polardreieck heißt. Nennt man (Fig. 78) die Seiten des durch die Punkte $M(\varrho)$ bestimmten Dreiecks (L_1), (L_2) und (L_3), so lässt sich nun nachweisen, dass die Schnittpunkte der Geraden (L') und (L_1), (L'') und (L_2), (L''') und (L_3), welche wir kurz mit M_1, M_2, M_3 bezeichnen, in einer und derselben Geraden (L_o) liegen. Nach Gl. (81) in § 14 sind nämlich die Gleichungen dieser drei Punkte

$$M_1 \equiv \frac{M''}{S\Sigma_i'' u_i'} - \frac{M'''}{S\Sigma_i''' u_i'} = o$$

$$M_2 \equiv \frac{M'''}{S\Sigma_i''' u_i''} - \frac{M'}{S\Sigma_i' u_i''} = o$$

$$M_3 \equiv \frac{M'}{S\Sigma_i' u_i'''} - \frac{M''}{S\Sigma_i'' u_i'''} = o,$$

und hieraus ergibt sich nach Wegschaffung der Brüche wegen der bekannten Relation

$$S\, U_i(\varrho)\, x_i^{(k)} = S\, U_i^{(k)}\, x_i(\varrho) \quad | \quad S\, \Sigma_i(\varrho)\, u_i^{(k)} = S\, \Sigma_i^{(k)}\, u_i(\varrho)$$

die Identität

$$L' + L'' + L''' \equiv o, \quad | \quad M_1 + M_2 + M_3 \equiv o,$$

welche nach den Gleichungen (53) und (54) in § 11 aussagt, dass die

drei Strahlen (L'), (L'') und (L''') in einem und demselben Punkte M_o sich durchschneiden, weshalb die in Fig. 77 verzeichneten zwei Dreiecke nach § 50 auch central col-

drei Punkte M_1, M_2 und M_3 in einer und derselben Geraden (L_o) zu liegen kommen, weshalb die in Fig. 78 gegebenen zwei Dreiecke nach § 50 auch central collinear

linear sind. Der Punkt M_0 ist wieder das Centrum der Collineation.

Satz. Sind $M' \ldots . M^{IV}$ vier Punkte einer Punktreihe und $(P') \ldots . (P^{IV})$ deren Polaren bezüglich eines Kegelschnittes $U = o$, so bilden die letzteren einen Strahlenbüschel vom Doppelverhältnisse gleich jenem der Punktreihe.

Beweis. Nachdem die vier Punkte $M(\varrho)$ in einer und derselben Geraden liegen, sind ihre trimetrischen Coordinaten nach Gl. (181) in § 30

$$x_i' = y_i - \lambda' z_i,$$
$$x_i'' = y_i - \lambda'' z_i,$$
$$x_i''' = y_i - \lambda''' z_i,$$
$$x_i^{IV} = y_i - \lambda^{IV} z_i,$$

$i = 1, 2, 3,$

wenn y_i und z_i die trimetrischen Coordinaten zweier Punkte y und z des Trägers der Punktreihe darstellen. Setzt man jetzt noch

$$V = U_1 y_1 + U_2 y_2 + U_3 y_3,$$
$$W = U_1 z_1 + U_2 z_2 + U_3 z_3,$$

so lauten nach (375) in § 62 die Gleichungen der Polaren $(P(\varrho))$ der Punkte $M(\varrho)$ bezüglich des Kegelschnittes $U = o$:

$$P' \equiv V - \lambda' \, W = o,$$
$$P'' \equiv V - \lambda'' \, W = o,$$
$$P''' \equiv V - \lambda''' \, W = o,$$
$$P^{IV} \equiv V - \lambda^{IV} \, W = o,$$

sind. Die **Gerade** (L_0) ist **wieder die Achse der Collineation.**

Satz. Sind $(L') \ldots (L^{IV})$ vier Strahlen eines Strahlenbüschels und $M' \ldots \ldots M^{IV}$ deren Pole bezüglich eines Kegelschnittes $\Sigma = o$, so bilden die letzteren eine Punktreihe vom Doppelverhältnisse gleich jenem des Büschels.

Beweis. Nachdem die vier Strahlen $(L(\varrho))$ in einem und demselben Punkte sich durchschneiden, sind ihre trigonalen Coordinaten nach Gl. (182) in § 30

$$u_i' = v_i - \lambda' w_i,$$
$$u_i'' = v_i - \lambda'' w_i,$$
$$u_i''' = v_i - \lambda''' w_i,$$
$$u_i^{IV} = v_i - \lambda^{IV} w_i,$$

wenn v_i und w_i die trigonalen Coordinaten zweier durch den Mittelpunkt des Büschels gelegten Strahlen (v), (w) sind. Setzt man jetzt noch

$$V = \Sigma_1 v_1 + \Sigma_2 v_2 + \Sigma_3 v_3,$$
$$W = \Sigma_1 w_1 + \Sigma_2 w_2 + \Sigma_3 w_3,$$

so lauten nach (376) in § 62 die Gleichungen der Pole $M(\varrho)$ der Strahlen $(L(\varrho))$ bezüglich des Kegelschnittes $\Sigma = o$:

$$M' \equiv V - \lambda' \, W = o,$$
$$M'' \equiv V - \lambda'' \, W = o,$$
$$M''' \equiv V - \lambda''' \, W = o,$$
$$M^{IV} \equiv V - \lambda^{IV} \, W = o,$$

weshalb nach dem in § 30 bereits Gesagten auch

$(M' M'' M''' M^{IV}) =$ $(P' P'' P''' P^{IV})$ | $(L' L'' L''' L^{IV}) =$ $(M' M'' M''' M^{IV})$

sein muss, was zu beweisen war.

Aus den beiden soeben bewiesenen Sätzen folgt nun eine Reihe anderer Sätze, u. zw.:

Die Polaren von zwei harmonischen Punktpaaren sind zwei harmonische Strahlenpaare.

Die Polaren von zwei involutorischen Punktreihen bilden zwei involutorische Strahlenbüschel.

Die Polaren einer Punktreihe sind ein zu dieser Reihe projectivischer Strahlenbüschel.

Die Polaren von zwei projectivischen Punktreihen sind zwei projectivische Strahlenbüschel.

Die Pole von zwei harmonischen Strahlenpaaren sind zwei harmonische Punktpaare.

Die Pole von zwei involutorischen Strahlenbüscheln bilden zwei involutorische Punktreihen.

Die Pole eines Strahlenbüschels sind eine zu diesem Büschel projectivische Punktreihe.

Die Pole von zwei projectivischen Strahlenbüscheln sind zwei projectivische Punktreihen.

§ 64. Das sich selbst conjugierte Dreieck und Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein solches Dreieck.

Es sei M_1 irgend ein beliebig gewählter Punkt in der Ebene des Kegelschnittes (U) und (P_1) die Polare von M_1, ferner M_2 ein in der Geraden (P_1) ebenfalls willkürlich angenommener Punkt und (P_2) dessen Polare, wobei (P_1) und (P_2) selbstverständlich auf den Kegelschnitt (U) sich beziehen und nach § 63 die Polare (P_2) durch den Punkt M_1 gehen muss. Nun verbinde man (Fig. 79) die Punkte M_1 und M_2 durch eine Gerade und erhält so eine dritte Polare, nämlich die Polare (P_3) des-

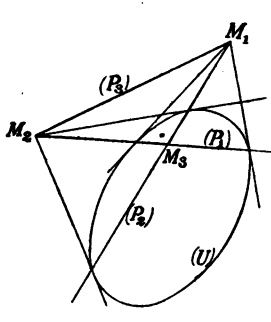


Fig. 79.

jenigen Punktes M_3, in welchem sich die (P_1) und (P_2) durchschneiden, weshalb auch M_1, M_2 und M_3 die Ecken eines Dreiecks (Dreiseits) repräsentieren, welches die specielle Eigenschaft besitzt, dass nämlich jede Seite desselben die Polare der Gegenecke und umgekehrt jede Ecke den Pol der Gegenseite darstellt. Ebenso klar ist auch, dass zwei Ecken ein Paar harmonischer Pole und zwei Seiten ein Paar harmonischer Polaren bezüglich (U) sind. Dieses durch die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 bestimmte Dreieck, oder durch die drei Strahlen (P_1), (P_2) und (P_3) gegebene Dreiseit, ist daher sein eigenes Polardreieck oder sich selbst conjugiert, und gelangt man sonach zur Erkenntnis, dass in einem jeden sich selbst conjugierten Dreieck die Seiten die Polaren der Gegenecken sind und umgekehrt; ferner je zwei Ecken ein Paar harmonischer Pole und je zwei Seiten ein Paar harmonischer Polaren angeben. Selbstverständlich kann man bei einem und demselben Kegelschnitte unendlich viele Dreiecke angeben, welche sich selbst conjugiert sind, und sei hier gleichzeitig erwähnt, dass die drei Ecken eines solchen Dreiecks ein Tripel harmonischer Pole und die drei Seiten desselben ein Tripel harmonischer Polaren heißen.

Zufolge des eben Vorausgeschickten sieht man wohl ein, dass bei allen sich selbst conjugierten Dreiecken, welche eine gemeinsame Ecke M_1 besitzen, die beiden anderen Ecken M_2 und M_3 in einer und derselben Geraden liegen, der Polaren (P_1) von M_1, und gleichzeitig alle in der letzteren liegenden Paare harmonischen Pole darstellen, während die beiden nicht in (P_1) hineinfallenden Seiten durch M_1 gehen und alle durch diesen Punkt gehenden Paare harmonischer Polaren repräsentieren. Ebenso haben alle sich selbst conjugierten Dreiecke, deren Seiten in eine und dieselbe Gerade (P_1) hineinfallen, eine gemeinschaftliche Ecke, und das ist der Pol M_1 von (P_1) etc. etc.

In dem vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks oder das Diagonaldreiseit eines einer solchen Curve umgeschriebenen Vierseits die Eigenschaft besitzt, dass jede

Seite dieses Dreiecks (Dreiseits) die Polare der Gegenecke ist, und daher gilt der

Satz: Das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks ist sich selbst conjugiert.

Satz: Das Diagonaldreiseit eines einem Kegelschnitte umgeschriebenenen Vierseits ist sich selbst conjugiert.

Bei den später folgenden Untersuchungen erscheint es oft vortheilhaft, die Gleichung eines Kegelschnittes auf ein sich selbst conjugiertes Dreieck zu beziehen, und deshalb wird noch zum Schlusse dieses Paragraphen die Gleichung eines Kegelschnittes bei dieser Wahl des Coordinatendreiecks vorgeführt. Es lässt sich nun ohneweiters der Nachweis erbringen, dass in dem Fall, wo die Ecken M_1, M_2, M_3 des Coordinatendreiecks die Pole ihrer Gegenseiten (x_1), (x_2), (x_3) bezüglich eines Kegelschnittes (U) darstellen, die Gleichung des letzteren die Form haben muss

$$(381)\ldots \quad U \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = o$$

in trimetrischen Punkt-Coordinaten.

$$\Sigma \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = o \quad \ldots (382)$$

in trigonalen Linien-Coordinaten.

Man kann sich von der Wahrheit dieser Behauptung überzeugen, wenn man die Gleichung

der Polaren eines Punktes M' bezüglich der Curve $U = o$ bestimmt und aus dieser Gleichung die Polaren der Ecken M_i des Coordinatendreiecks herleitet. Nachdem nun hier $U_i = 2 a_i x_i$ ist, lautet die Gleichung der Polaren eines Punktes M' von den Coordinaten x_i'

$$P' \equiv a_1 x_1' x_1 + a_2 x_2' x_2 + a_3 x_3' x_3 = o.$$

Nun ist aber, sobald M' mit der Ecke M_i des Coordinatendreiecks zusammenfällt, $x_k' = x_l' = o$, wenn k und l

des Pols einer Geraden (L') bezüglich der Curve $\Sigma = o$ bestimmt und aus dieser Gleichung die Pole der Seiten des Coordinatendreiecks herleitet. Nachdem nun hier $\Sigma_i = 2 \alpha_i u_i$ ist, lautet die Gleichung des Pols der Geraden (L') von den Coordinaten u_i'

$$M' \equiv \alpha_1 u_1' u_1 + \alpha_2 u_2' u_2 + \alpha_3 u_3' u_3 = o.$$

Nun ist aber, sobald (L') mit der Seite (x_i) des Coordinatendreiecks zusammenfällt, $u_k' = u_l' = o$, wenn k und l

zwei von i verschiedene Zahlen darstellen und beide sowie i entnommen sind der Zahlenreihe 1, 2, 3, und repräsentiert daher $a_i x_i' x_i = o$, oder $x_i = o$ die Gleichung der Polaren von M_i, d. h. die Polare der Ecke M_i ist die im Coordinatendreieck gegenüberliegende Seite (x_i), wie es sein muss, wenn das Coordinatendreieck ein sich selbst conjugiertes Dreieck bezüglich des Kegelschnittes $U = o$ darstellt.

zwei von i verschiedene Zahlen darstellen und beide sowie i entnommen sind der Zahlenreihe 1, 2, 3, und repräsentiert daher $\alpha_i u_i' u_i = o$, oder $u_i = o$ die Gleichung des Pols der Seite (x_i), d. h. der Pol der Seite (x_i) ist die im Coordinatendreieck gegenüberliegende Ecke M_i, wie es sein muss, wenn das Coordinatendreieck ein sich selbst conjugiertes Dreieck bezüglich des Kegelschnittes $\Sigma = o$ sein soll.

Aufgabe. Es ist die Gleichung eines Kegelschnittes gegeben in der Form (381), man bestimme die reciproke Gleichung.

Aufgabe. Es ist die Gleichung eines Kegelschnittes gegeben in der Form (382), man bestimme die reciproke Gleichung.

Nachdem in dem hier vorliegenden Fall

$$a_{1,1} = a_1, \quad a_{2,2} = a_2, \quad a_{3,3} = a_3, \quad a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3} = o$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_1, \quad \alpha_{2,2} = \alpha_2, \quad \alpha_{3,3} = \alpha_3, \quad \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,3} = o$$

ist, so wird die Discriminante des Gleichungspolynoms

$$A = \begin{vmatrix} a_1, & o, & o \\ o, & a_2, & o \\ o, & o, & a_3 \end{vmatrix} = a_1 . a_2 . a_3 \qquad E = \begin{vmatrix} \alpha_1, & o, & o \\ o, & \alpha_2, & o \\ o, & o, & \alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3$$

und daher auch

$$A_{1,1} = a_2 . a_3, \quad A_{2,2} = a_3 . a_1, \quad A_{3,3} = a_1 . a_2, \quad A_{1,2} = A_{1,3} = A_{2,3} = o.$$

$$E_{1,1} = \alpha_2 \alpha_3, \quad E_{2,2} = \alpha_3 \alpha_1, \quad E_{3,3} = \alpha_1 \alpha_2, \quad E_{1,2} = E_{1,3} = E_{2,3} = o.$$

Die gesuchte reciproke Gleichung ist folglich

$$\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} = o$$

und stimmt der Form nach mit Gl. (382) überein, wie es sein muss.

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3} = o$$

und stimmt der Form nach mit Gl. (381) überein, wie es sein muss.

§ 65. Besondere Formen der Gleichung eines Kegelschnittes. — Sätze.

Durch passende Wahl des Coordinatendreiecks, ohne dass dieses gerade ein sich selbst conjugiertes Dreieck darstellt, kann die Gleichung eines Kegelschnittes bedeutend vereinfacht werden, gleichgiltig ob dieselbe in trimetrischen Punktcoordinaten oder in trigonalen Liniencoordinaten gegeben wird. Wir werden uns daher in diesem Paragraphen mit solchen einfachen Formen der Kegelschnittsgleichung beschäftigen und machen zu diesem Zwecke vorläufig die specielle Annahme, dass

die Ecke M_1 des Coordinatendreiecks ein Punkt der Curve zweiter Ordnung sei. Nun hat der Punkt M_1 die Coordinaten $x_2 = x_3 = o$, während x_1 von null verschieden ist; es muss folglich die Gleichung (342) befriedigt werden für $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_1} = o$, was $a_{1,1} = o$ bedingt, und deshalb wird die Gleichung der Curve 2. Ordnung bei dieser Wahl des Coordinatendreiecks:

$$a_{2,2}\, x_2{}^2 + 2\, a_{1,2}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{1,3}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{2,3}\, x_2\, x_3 + a_{3,3}\, x_3{}^2 = o.$$

die Seite (x_1) des Coordinatendreiecks eine Tangente der Curve zweiter Classe sei. Nun hat die Gerade (x_1) die Coordinaten $u_2 = u_3 = o$, während u_1 von null verschieden ist; es muss folglich die Gleichung (343) befriedigt werden für $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_1} = o$, was $\alpha_{1,1} = o$ bedingt, und deshalb wird die Gleichung der Curve 2. Classe bei dieser Wahl des Coordinatendreiecks:

$$\alpha_{2,2}\, u_2{}^2 + 2\, \alpha_{1,2}\, u_1\, u_2 + 2\, \alpha_{1,3}\, u_1\, u_3 + 2\, \alpha_{2,3}\, u_{2\,3} + \alpha_{3,3}\, u_3{}^2 = o.$$

Diese einfachen Untersuchungen bieten uns die Möglichkeit, sofort die Gleichung einer Curve 2. Ordnung oder einer Curve 2. Classe anzugeben, wenn das Coordinatendreieck eine solche Lage hat, dass zwei oder drei Ecken Curvenpunkte, respective zwei oder drei Seiten Tangenten der Curve sind, und zwar lautet die Gleichung einer Curve

2. Ordnung, wenn die Ecken M_1 und M_2 des Coordinatendreiecks in der Curve liegen

2. Classe, wenn die Seiten (x_1) und (x_2) des Coordinatendreiecks die Curve berühren

$2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o$; sind dagegen alle drei Ecken Punkte der Curve, so ist auch noch $a_{3,3} = o$ und demnach ist

$$2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 = o \tag{383}$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in trimetrischen Punktcoordinaten, wenn die Curve dem Coordinatendreieck umgeschrieben ist.

$2\alpha_{1,2}u_1u_2 + 2\alpha_{1,3}u_1u_3 + 2\alpha_{2,3}u_2u_3 + \alpha_{3,3}u_3^2 = o$; sind dagegen alle drei Seiten Tangenten der Curve, so ist auch noch $\alpha_{3,3} = o$ und demnach ist

$$2\alpha_{1,2}u_1u_2 + 2\alpha_{1,3}u_1u_3 + 2\alpha_{2,3}u_2u_3 = o \tag{384}$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in trigonalen Liniencoordinaten, wenn die Curve dem Coordinatendreieck eingeschrieben ist.

In Anbetracht der später folgenden Aufgaben und Sätze ist es nothwendig, auch die reciproken Gleichungen von (383) und (384) zu bestimmen. Man hat nun, weil die Discriminante des in

(383) vorkommenden Gleichungspolynoms wegen $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = o$ gleich ist

$$A = \begin{vmatrix} o, & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & o & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & o \end{vmatrix},$$

$$A_{1,1} = -a_{2,3}^2,\quad A_{2,2} = -a_{1,3}^2,\quad A_{3,3} = -a_{1,2}^2,$$
$$A_{1,2} = a_{1,3}a_{2,3},\quad A_{1,3} = a_{1,2}a_{2,3},\quad A_{2,3} = a_{1,2}a_{1,3},$$

(384) vorkommenden Gleichungspolynoms wegen $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,3} = o$ gleich ist

$$E = \begin{vmatrix} o, & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{1,2} & o & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & o \end{vmatrix}$$

$$E_{1,1} = -\alpha_{2,3}^2,\quad E_{2,2} = -\alpha_{1,3}^2,\quad E_{3,3} = -\alpha_{1,2}^2,$$
$$E_{1,2} = \alpha_{1,3}\alpha_{2,3},\quad E_{1,3} = \alpha_{1,2}\alpha_{2,3},\quad E_{2,3} = \alpha_{1,2}\alpha_{1,3},$$

und daher ist

$$a_{2,3}^2u_1^2 - 2a_{1,3}a_{2,3}u_1u_2 + a_{1,3}^2u_2^2 - 2a_{1,2}a_{2,3}u_1u_3 - 2a_{1,2}a_{1,3}u_2u_3 + a_{1,2}^2u_3^2 = o \tag{385}$$

$$\alpha_{2,3}^2x_1^2 - 2\alpha_{1,3}\alpha_{2,3}x_1x_2 + \alpha_{1,3}^2x_2^2 - 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}x_1x_3 - 2\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}x_2x_3 + \alpha_{1,2}^2x_3^2 = o \tag{386}$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in trigonalen Liniencoordinaten, wenn die Curve dem Coordinatendreieck umgeschrieben erscheint.

die Gleichung eines Kegelschnittes in trimetrischen Punktcoordinaten, wenn die Curve dem Coordinatendreieck eingeschrieben erscheint.

Eine jede der eben entwickelten Gleichungen kann noch auf eine interessante Form gebracht werden, und ich betrachte zur Ergründung derselben zunächst die Gleichung

$$(a) \ldots \quad \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 = o,$$

welche, sobald man zu beiden Seiten das Product $4\xi_1\xi_2$ hinzufügt, übergeht in die folgende

$$\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 = 4\xi_1\xi_2,$$

aus welcher sich, wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht, ergibt $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = -2\sqrt{\xi_1\xi_2}$, oder $(\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2})^2 = \xi_3$. Zieht man endlich noch einmal auf beiden Seiten der Gleichung die Qnadratwurzel aus, so findet man $\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} = -\sqrt{\xi_3}$ und hieraus endlich

$$(b) \ldots \quad \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3} = o.$$

Die Gleichung (a) kann somit auf die Form (b) gebracht werden und aus diesem Grunde ist es auch gestattet, die obigen Gleichungen (385) und (386) zu ersetzen durch die folgenden

$$(387) \quad (a_{2,3}\,u_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{1,3}\,u_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{1,2}\,u_3)^{\frac{1}{2}} = o.$$

$$(\alpha_{2,3}\,x_1)^{\frac{1}{2}} + (\alpha_{1,3}\,x_2)^{\frac{1}{2}} + (\alpha_{1,2}\,x_3)^{\frac{1}{2}} = o. \quad (388)$$

Übergehend auf weitere einfache Formen der Gleichung der Kegelschnitte, mache man die specielle Annahme, dass in dem Coordinatendreieck die Seite (x_3) die Polare der gegenüber liegenden Ecke M_3, d. h. M_3 der Pol von (x_3) bezüglich des betreffenden Kegelschnittes sei. Nun lautet aber die Gleichung

der Polaren der Ecke M_3 des Coordinatendreiecks in Bezug auf die durch Gl. (342) gegegebenen Curve 2. Ordnung

$$a_{1,3}\,x_1 + a_{2,3}\,x_2 + a_{3,3}\,x_3 = o,$$

des Pols der Seite (x_3) des Coordinatendreiecks in Bezug auf die durch Gl. (343) bestimmten Curve 2. Classe

$$\alpha_{1,3}\,u_1 + \alpha_{2,3}\,u_2 + \alpha_{3,3}\,u_3 = o,$$

wie man aus den früher entwickelten Gleichungen (375) und (376) findet, wenn man nämlich in der ersteren $x_1' = x_2' = o$, in der letzteren aber $u_1' = u_2' = o$ setzt, und weil

die Polare von M_3 mit der Seite (x_3) des Coordinatendreiecks identisch sein soll, so müssen die Coefficienten $a_{1,3}$ und $a_{2,3}$ verschwinden, wodurch die Gleichung der Curve 2. Ordnung die Form annimmt:

$$(389) \quad a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + a_{3,3}x_3^2 = o.$$

der Pol von (x_3) mit der Ecke M_3 des Coordinatendreiecks identisch sein soll, so müssen die Coefficienten $\alpha_{1,3}$ und $\alpha_{2,3}$ verschwinden, wodurch die Gleichung der Curve 2. Classe die Form annimmt:

$$\alpha_{1,1}u_1^2 + 2\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,2}u_2^2 + \alpha_{3,3}u_3^2 = o. \quad (390)$$

Nimmt man noch überdies an, dass die Seiten (x_1) und (x_2) des Coordinatendreiecks die Curve in den Ecken M_2 und M_1 dieses Dreiecks berühren, so muss Gl. (389) befriedigt werden für $x_1 = x_3 = o$ und $x_2 = x_3 = o$, was $a_{1,1} = a_{2,2} = o$ bedingt, dagegen müssen in Gl. (390) die Coordinaten $u_1 = u_3 = o$ und $u_2 = u_3 = o$ der Gleichung genügen, und dies erfordert, dass $\alpha_{1,1}$ und $\alpha_{2,2}$ gleichzeitig verschwinden, weshalb dann die obigen Gleichungen die noch einfacheren Formen annehmen werden:

$$(391) \;.\;. \quad 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{3,3}x_3^2 = o, \qquad\qquad 2\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{3,3}u_3^2 = o, \quad .\;.\; (392)$$

und es ist sonach (391) die Gleichung eines Kegelschnittes in trimetrischen Punktcoordinaten und (392) in trigonalen Liniencoordinaten, wenn das Coordinatendreieck $M_1 M_2 M_3$ in Bezug auf die Curve eine solche Lage besitzt, dass die Seiten (x_1) und (x_2) dieses Dreiecks den Kegelschnitt in den Punkten M_2 und M_1 berühren, somit die dritte Seite (x_3) die Polare der gegenüber liegenden Ecke darstellt. Bestimmt man übrigens die reciproke Gleichung von (391), so muss dieselbe in der Form selbstverständlich mit (392) übereinstimmen. Denn, nachdem die Discriminante des Gleichungspolynoms von (391) gleich

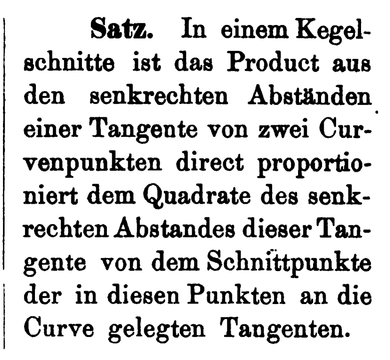
$$A = \begin{vmatrix} o, & a_{1,2} & o \\ a_{1,2} & o & o \\ o & o & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

ist, so wird $A_{1,2} = -a_{1,2}\,a_{3,3}$ und $A_{3,3} = -a_{1,2}^{\,2}$, während alle übrigen Coefficienten $A_{i,k}$ verschwinden, weshalb die reciproke Gleichung von (391) lautet

$$2\,a_{3,3}\,u_1\,u_2 + a_{1,2}\,u_3^{\,2} = o.$$

Zum Schlusse dieses Paragraphen mögen noch einige Anwendungen der eben gewonnenen Formen für die Gleichung eines Kegelschnittes folgen, und beweisen wir zu diesem Zwecke noch mehrere Sätze über Pol und Polare der Kegelschnitte.

Satz. In einem Kegelschnitte ist das Product aus den senkrechten Abständen zweier Tangenten von einem Curvenpunkte direct proportional dem Quadrate des senkrechten Abstandes der Berührungssehne von diesem Punkte.



Satz. In einem Kegelschnitte ist das Product aus den senkrechten Abständen einer Tangente von zwei Curvenpunkten direct proportioniert dem Quadrate des senkrechten Abstandes dieser Tangente von dem Schnittpunkte der in diesen Punkten an die Curve gelegten Tangenten.

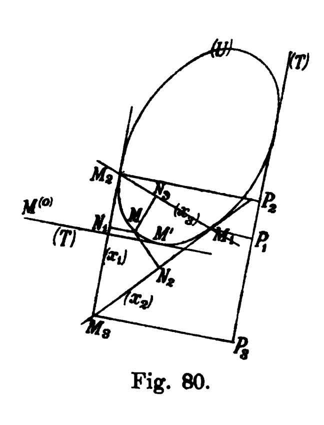


Fig. 80.

Diese beiden Sätze können mittelst der zwei letzten Gleichungen sogleich bewiesen werden. Nimmt man nämlich an, dass in der ersten dieser Gleichungen die Coordinaten x_i' die Normaldistanzen $N_i\,M$ (Fig. 80) der drei Seiten (x_i) des Coordinatendreiecks von einem Punkte M des Kegelschnittes bedeuten, was nach dem in Cap. V über homogene Coordinaten bereits Vorgeführten statthaft erscheint, und ersetzt in dieser Gleichung den Quotienten $-\dfrac{a_{3,3}}{2\,a_{1,2}}$ durch den Buchstaben λ, so folgt unmittelbar

$$N_1\,M\,.\,N_2\,M = \lambda\,.\,\overline{N_3\,M}^2$$

und hieraus auch der erste Satz. Macht man nun in analoger Weise die Annahme, dass in Gl. (392) die Coordinaten

u_i ebenfalls die Normaldistanzen $P_i M_i$ der Curventangente (T) von den drei Ecken M_i des Coordinatendreiecks repräsentieren (Fig. 80) und ersetzt in dieser Gleichung den Quotienten $-\frac{\alpha_{3,3}}{2\alpha_{1,2}}$ durch den Buchstaben μ, so erhält man

$$P_1 M_1 . P_2 M_2 = \mu . \overline{P_3 M_3}^2,$$

und damit erscheint auch der andere Satz erwiesen.

Satz. Legt man aus einem Punkte $M^{(o)}$ Tangenten an sämmtliche Kegelschnitte, welche die Geraden (x_1) und (x_2) in den gegebenen Punkten M_2 und M_1 berühren, so liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten in einem durch die Punkte M_1, M_2, M_3 und $M^{(o)}$ gehenden Kegelschnitte, wenn M_3 den Pol der Verbindungsgeraden $M_1 M_2$ bezüglich dieser Kegelschnitte darstellt.

Beweis. Betrachtet man die Geraden (x_1), (x_2) und $M_1 M_2 = (x_3)$ als die Seiten des Coordinatendreiecks und versteht unter λ einen veränderlichen Parameter, so sind die hier vorliegenden Kegelschnitte insgesammt ausgedrückt durch die Gleichung

$$x_1 . x_2 - \lambda . x_3^2 = o;$$

denkt man sich dagegen unter λ einen constanten Coefficienten, so repräsentiert obige Gleichung einen bestimmten Kegelschnitt (U), welcher (x_1) in M_2 und (x_2) in M_1 berührt. Aus $M^{(o)}$ kann man nun zwei Tangenten an (U) legen, und es sei in Fig. 80 die mit (T) bezeichnete Gerade die eine dieser Tangenten und M' ihr Berührungspunkt mit der Curve. Da nun hier $U_1 = x_2$, $U_2 = x_1$ und $U_3 = -2\lambda x_3$ ist, so lautet nach Gl. (354) in § 58 die Gleichung der Tangente (T), wenn noch x_i' die Coordinaten des Berührungspunktes M' sind,

$$x_2' x_1 + x_1' x_2 - 2\lambda x_3' x_3 = o.$$

Nun ist aber $M^{(o)}$ ein Punkt von (T) und daher müssen seine Coordinaten $x_i^{(o)}$ der letzten Gleichung genügen, d. h. es muss sein

$$x_2' x_1^{(o)} + x_1' x_2^{(o)} - 2\lambda x_3' x_3^{(o)} = o.$$

Zu dieser Gleichung gesellt sich aber noch jene

$$x_1' x_2' - \lambda . x_3'^2 = o,$$

indem der Punkt M' auf dem Kegelschnitte liegt, und man hat sonach zwei Gleichungen, denen die Coordinaten x_i' des Punktes M' unterworfen sind. Eliminiert man daher schließlich den Parameter λ aus diesen Gleichungen und ersetzt unter einem die Coordinaten x_i' durch x_i, so erhält man die Gleichung des fraglichen geometrischen Ortes, und dieselbe ist sonach:

$$x_1^{(o)} x_2 x_3 + x_2^{(o)} x_1 x_3 - 2 x_3^{(o)} x_1 x_2 = o.$$

Nachdem nun die eben gewonnene Gleichung, wie ein Blick auf (383) dieses Paragraphen zeigt, einen Kegelschnitt repräsentiert, der dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ umgeschrieben ist, ferner besagte Gleichung auch befriedigt wird für $x_i = x_i^{(o)}$, so erscheint die Richtigkeit vorliegenden Satzes erwiesen.

Satz. Sind zwei Dreiecke (Dreiseite) für einen und denselben Kegelschnitt sich selbst conjugiert, so existiert stets ein Kegelschnitt, welcher diesen beiden Dreiecken umgeschrieben ist.

Satz. Sind zwei Dreiecke (Dreiseite) für einen und denselben Kegelschnitt sich selbst conjugiert, so existiert stets ein Kegelschnitt, welcher diesen beiden Dreiecken eingeschrieben ist.

Beweis. Die Ecken der beiden Dreiecke seien M_1, M_2, M_3 und M', M'', M''', deren Seiten (x_1), (x_2), (x_3) und (P'), (P''), (P'''). Von diesen Dreiecken wähle man nun das erste zum Coordinatendreieck und nenne $x_i(\varrho)$ die trimetrischen Coordinaten der Ecken $M(\varrho)$, $u_i(\varrho)$ die trigonalen Coordinaten der Seiten $(P(\varrho))$ des zweiten Dreiecks, bezogen auf das erste. Die Gleichung eines Kegelschnittes (U), für welchen das erste Dreieck sich selbst conjugiert ist, ist nun nach § 64 in

trimetrischen Punktcoordinaten:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = o,$$

in trigonalen Liniencoordinaten:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = o,$$

und unsere Aufgabe muss somit zunächst dahin gerichtet sein, die Bedingung aufzufinden, welcher die Coordinaten $x_i(\varrho)$, respective $u_i(\varrho)$, unterworfen sind, damit auch das zweite Dreieck für den Kegelschnitt (U) sich selbst conjugiert er-

scheint. Zu diesem Zwecke wird bemerkt, dass hier M', M'' und M''' die Pole der Verbindungsgeraden $M'' M'''$, $M''' M'$ und $M' M''$ sein müssen, und weil

$$P(\varrho) \equiv a_1 x_1(\varrho) x_1 + a_2 x_2(\varrho) x_2 + a_3 x_3(\varrho) x_3 = o \qquad M(\varrho) \equiv \alpha_1 u_1(\varrho) u_1 + \alpha_2 u_2(\varrho) u_2 + \alpha_3 u_3(\varrho) u_3 = o$$

die Gleichung der Polaren des Punktes $M(\varrho)$, respective des Pols der Geraden $(P(\varrho))$, beide bezüglich des Kegelschnittes (U), repräsentiert, so müssen, wenn auch $M' M'' M'''$ für den Kegelschnitt (U) ein sich selbst conjugiertes Dreieck darstellt, die Coordinaten x_i', beziehungsweise u_i', gleichzeitig den drei Gleichungen genügen, u. zw.:

$$a_1 x_1'' x_1''' + a_2 x_2'' x_2''' + a_3 x_3'' x_3''' = o \qquad \alpha_1 u_1'' u_1''' + \alpha_2 u_2'' u_2''' + \alpha_3 u_3'' u_3''' = o$$

$$a_1 x_1''' x_1' + a_2 x_2''' x_2' + a_3 x_3''' x_3' = o \qquad \alpha_1 u_1''' u_1' + \alpha_2 u_2''' u_2' + \alpha_3 u_3''' u_3' = o$$

$$a_1 x_1' x_1'' + a_2 x_2' x_2'' + a_3 x_3' x_3'' = o, \qquad \alpha_1 u_1' u_1'' + \alpha_2 u_2' u_2'' + \alpha_3 u_3' u_3'' = o,$$

und aus diesen folgt durch die Elimination von a_1 a_2, a_3, respective α_1, α_2, α_3,

$$(a) \begin{vmatrix} x_1'' x_1''', & x_2'' x_2''', & x_3'' x_3''' \\ x_1''' x_1', & x_2''' x_2', & x_3''' x_3' \\ x_1' x_1'', & x_2' x_2'', & x_3' x_3'' \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} u_1'' u_1''', & u_2'' u_2''', & u_3'' u_3''' \\ u_1''' u_1', & u_2''' u_2', & u_3''' u_3' \\ u_1' u_1'', & u_2' u_2'', & u_3' u_4'' \end{vmatrix} = o, \; (b)$$

und damit erscheint die gesuchte Bedingung gefunden. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass

die sechs Punkte M_1, M_2, M_3 und M', M'', M''' in einem Kegelschnitte (V) liegen, sobald die Bedingung (a) erfüllt ist.

die sechs Geraden (x_1), (x_2), (x_3) und (P'), (P''), (P''') einen Kegelschnitt (W) berühren, sobald die Bedingung (b) erfüllt ist.

Nach dem in diesem Paragraphen bereits Vorgeführten ist nämlich (283) die Gleichung eines dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ umgeschriebenen und (384) die Gleichung eines diesem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes (V), respective (W). Diese beiden Gleichungen können aber, wenn man sie durch das Product $2 x_1 x_2 x_3$, respective $2 u_1 u_2 u_3$, dividiert, auf die Form gebracht werden

$$\frac{a_{2,3}}{x_1}+\frac{a_{1,3}}{x_2}+\frac{a_{1,2}}{x_3}=o, \qquad \frac{\alpha_{2,3}}{u_1}+\frac{\alpha_{1,3}}{u_2}+\frac{\alpha_{1,2}}{u_3}=o,$$

und es müssen demnach, sobald das zweite Dreieck $M' M'' M'''$, respective (P') (P'') (P'''), dem Kegelschnitte (V) eingeschrieben ist, die Coordinaten $x_i(\varrho)$ der drei Punkte $M(\varrho)$ noch den drei Gleichungen genügen: | (W) umschrieben ist, die Coordinaten $u_i(\varrho)$ der drei Strahlen $(P(\varrho))$ noch den drei Gleichungen:

$$\frac{a_{2,3}}{x_1'}+\frac{a_{1,3}}{x_2'}+\frac{a_{1,2}}{x_3'}=o \qquad \frac{\alpha_{2,3}}{u_1'}+\frac{\alpha_{1,3}}{u_2'}+\frac{\alpha_{1,2}}{u_3'}=o$$

$$\frac{a_{2,3}}{x_1''}+\frac{a_{1,3}}{x_2''}+\frac{a_{1,2}}{x_3''}=o \qquad \frac{\alpha_{2,3}}{u_1''}+\frac{\alpha_{1,3}}{u_2''}+\frac{\alpha_{1,2}}{u^{3''}}=o$$

$$\frac{a_{2,3}}{x_1'''}+\frac{a_{1,3}}{x_2'''}+\frac{a_{1,3}}{x_3'''}=o, \qquad \frac{\alpha_{2,3}}{u_1'''}+\frac{\alpha_{1,3}}{u_2'''}+\frac{\alpha_{1,2}}{u_3'''}=o,$$

aus welchen durch die Elimination der Coefficienten $a_{i,k}$, beziehungsweise $\alpha_{i,k}$, sich ergibt:

$$(c)\,..\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1'} & \frac{1}{x_2'} & \frac{1}{x_3'}\\ \frac{1}{x_1''} & \frac{1}{x_2''} & \frac{1}{x_3''}\\ \frac{1}{x_1'''} & \frac{1}{x_2'''} & \frac{1}{x_3'''}\end{vmatrix}=o, \qquad \begin{vmatrix}\frac{1}{u_1'} & \frac{1}{u_2'} & \frac{1}{u_3'}\\ \frac{1}{u_1''} & \frac{1}{u_2''} & \frac{1}{u_3''}\\ \frac{1}{u_1'''} & \frac{1}{u_2'''} & \frac{1}{u_3'''}\end{vmatrix}=o, \,..(d)$$

welche Bedingung demnach erfüllt sein muss, sobald die beiden Dreiecke $M_1 M_2 M_3$ und $M' M'' M'''$ einem Kegelschnitte (V) eingeschrieben, beziehungsweise einem Kegelschnitte (W) umgeschrieben sein sollen. Nun geht aber Gl. (c) sofort in Gl. (a), respective Gl. (d) in (b) über, sobald man die erste, zweite und dritte Colonne der in (c), beziehungsweise (d), vorkommenden Determinante der Reihe nach mit $x_1' x_1'' x_1'''$, $x_2' x_2'' x_2'''$, $x_3' x_3'' x_3'''$, respective $u_1' u_1'' u_1'''$, $u_2' u_2'' u_2'''$, $u_3' u_3'' u_3'''$, multipliciert, und aus diesem Grunde drückt gleichzeitig (a) die Bedingung aus, unter welcher die sechs Punkte M_1, M_2, M_3 und M', M'', M''' auf einem und demselben Kegelschnitte (V) liegen, dagegen (b) jene, unter welcher die sechs Geraden (x_1), (x_2), (x_3) und (P'), (P''), (P''') einen und denselben Kegelschnitt (W) berühren, womit die beiden eben aufgestellten Sätze erwiesen sind. Die Gleichungen der Kegelschnitte (V) und (W) sind noch

$$(e)..\ V \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{x_1'} & \frac{1}{x_2'} & \frac{1}{x_3'} \\ \frac{1}{x_1''} & \frac{1}{x_2''} & \frac{1}{x_3''} \end{vmatrix} = o. \qquad W \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_2} & \frac{1}{u_3} \\ \frac{1}{u_1'} & \frac{1}{u_2'} & \frac{1}{u_3'} \\ \frac{1}{u_1''} & \frac{1}{u_2''} & \frac{1}{u_3''} \end{vmatrix} = o.\ (f)$$

In analoger Weise kann man nun auch die beiden Sätze beweisen:

Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben, so existiert auch stets ein Kegelschnitt, für welchen diese beiden Dreiecke sich selbst conjugiert sind,

Sind zwei Dreiecke (Dreiseite) einem Kegelschnitte umgeschrieben, so existiert auch stets ein Kegelschnitt, für welchen beide Dreiecke sich selbst conjugiert erscheinen,

und aus den eben vorgeführten Sätzen ergeben sich schließlich noch die beiden Sätze:

Erscheinen zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben, so sind dieselben stets einem zweiten Kegelschnitte umgeschrieben.

Erscheinen zwei Dreiseite einem Kegelschnitte umgeschrieben, so sind dieselben stets einem zweiten Kegelschnitte eingeschrieben.

Capitel XII.

Mittelpunkt, Asymptoten, Durchmesser.

§ 66. Mittelpunkt und Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte.

Unter dem Mittelpunkte oder dem Centrum eines Kegelschnittes versteht man denjenigen in der Ebene des letzteren liegenden Punkt, welcher eine jede durch ihn gelegte Sehne dieser Curve halbiert. Es sei nun M_o der Mittelpunkt eines Kegelschnittes (U), und werde noch angenommen, dass die beiden Sehnen $M'M''$ und $M'''M^{IV}$ den Punkt M_o enthalten, weshalb nach der eben gegebenen Definition des Punktes M_o auch $M'M_o = M_oM''$ und $M'''M_o = M_oM^{IV}$, oder $(M'M''M_o) = (M'''M^{IV}M_o) = -1$ sein muss. Sind daher M'_∞ und M''_∞ die unendlich fernen Punkte derjenigen durch den Punkt M_o gehenden Strahlen (L') und (L''), auf welchen die beiden Strecken $M'M''$ und $M'''M^{IV}$ zu liegen kommen, so ist auch $(M'M''M_oM'_\infty) = (M'''M^{IV}M_oM''_\infty) = -1$ und repräsentieren aus diesem Grunde nach § 62 die Punkte M_o, M'_∞, sowie M_o, M''_∞, je ein Paar harmonischer Pole bezüglich des Kegelschnittes (U); folglich ist auch die Verbindungsgerade der beiden unendlich fernen Punkte M'_∞ und M''_∞, d. i. die unendlich ferne Gerade (L_∞) der Ebene des Kegelschnittes, die Polare des Punktes M_o sowie umgekehrt M_o den Pol von (L_∞) darstellt. Dadurch gelangt man zu den nachfolgenden wichtigen Sätzen, und zwar:

Die Polare des Mittelpunktes eines Kegelschnittes in Bezug auf letzteren ist die unendlich ferne Gerade der Ebene dieser Curve.

Der Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene eines Kegelschnittes in Bezug auf letzteren ist das Centrum dieser Curve.

Diese Sätze setzen uns nun gleichzeitig in den Stand, die Coordinaten x_o, y_o des Mittelpunktes eines durch die Gleichung

$$(340)\ \ldots\quad U \equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = o$$

gegebenen Kegelschnittes zu berechnen. Die Gleichung dieses Kegelschnittes lautet nämlich in den einfachsten homogenen Liniencoordinaten (Siehe § 59)

$$A_{1,1}u^2 + 2A_{1,2}uv + A_{2,2}v^2 + 2A_{1,3}uw + 2A_{2,3}vw + A_{3,3}w^2 = o,$$

und daher ist auch nach (378) in § 62 die Gleichung des Pols der Geraden (L_o) von den einfachsten homogenen Coordinaten u_o, v_o, w_o:

$$(A_{1,1}u_o + A_{1,2}v_o + A_{1,3}w_o)u + (A_{1,2}u_o + A_{2,2}v_o + A_{2,3}w_o)v + (A_{1,3}u_o + A_{2,3}v_o + A_{3,3}w_o)w = o,$$

woraus sich ergibt, weil für die unendlich ferne Gerade nach § 28 bekanntlich $u_o = v_o = o$ ist,

$$(393)\ \ldots\quad M_o \equiv A_{1,3}u + A_{2,3}v + A_{3,3} = o$$

als Gleichung des Mittelpunktes M_o des durch (340) bestimmten Kegelschnittes. Die fraglichen Coordinaten x_o, y_o des Centrums M_o unseres Kegelschnittes sind daher in Anbetracht, dass die Determinante A, aus welcher die Coefficienten $A_{i,k}$ in der bekannten Weise hervorgehen, symmetrisch ist:

$$(394)\ \ldots\quad x_o = \frac{A_{1,3}}{A_{3,3}} = \frac{A_{3,1}}{A_{3,3}}, \qquad y_o = \frac{A_{2,3}}{A_{3,3}} = \frac{A_{3,2}}{A_{3,3}},$$

und hieraus folgt, sobald man für die Symbole $A_{i,k}$ die diesbezüglichen Werte einführt,

$$(395)\quad y_o = \frac{a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}, \qquad y_o = \frac{a_{1,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{2,3}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2},$$

womit das Centrum M_o des durch Gl. (340) gegebenen Kegelschnittes (U) bestimmt erscheint.

Nun transformiere man die Gleichung des Kegelschnittes (U) auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkte M_o von (U) zusammenfällt, dessen Achsen (x') und (y') aber parallel gerichtet sind zu den Achsen (x) und

(y) desjenigen rechtwinkeligen Coordinatensystems, auf welches die Gleichung (340) sich bezieht. Nachdem die Transformationsformeln (Siehe § 13) in dem hier vorliegenden Fall lauten: $x = x_o + x'$ und $y = y_o + y'$, so nimmt die transformierte Gleichung von (U) zunächst die Gestalt an

$$a_{1,1}(x' + x_o)^2 + 2\,a_{1,2}(x' + x_o)(y' + y_o) + a_{2,2}(y' + y_o)^2 + 2\,a_{1,3}(x' + x_o) + 2\,a_{2,3}(y' + y_o) + a_{3,3} = o,$$

und hieraus folgt nach einigen einfachen abgebraischen Operationen

$$a_{1,1}x'^2 + 2\,a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 + g_o x' + h_o y' + U_o = o,$$

wenn, wie in § 58, Gl. 356

$$g_o = 2\,(a_{1,1}x_o + a_{1,2}y_o + a_{1,3}),\ h_o = 2\,(a_{1,2}x_o + a_{2,2}y_o + a_{2,3}),$$
$$i_o = 2\,(a_{1,3}x_o + a_{2,3}y_o + a_{3,3})$$

gesetzt wird und

$$U_o = a_{1,1}x_o^2 + 2\,a_{1,2}x_o y_o + \ldots + a_{3,3} = \frac{1}{2}(g_o x_o + h_o y_o + i_o)$$

ist. Selbstverständlich hat man noch in den Ausdrücken für g_o, h_o und i_o die oben in (394) gegebenen Werte für x_o und y_o zu substituieren, wodurch man erhält: $g_o = h_o = o$ und $U_o = \frac{1}{2} i_o = a_{1,3}\frac{A_{1,3}}{A_{3,3}} + a_{2,3}\frac{A_{2,3}}{A_{3,3}} + a_{3,3} = \frac{A}{A_{3,3}}$, weshalb die Mittelpunktsgleichung des Kegelschnittes (U) die Form annimmt:

$$(396) \quad a_{1,1}x'^2 + 2\,a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 + \frac{A}{A_{3,3}} = o,$$

und man ersieht sonach, dass bei dieser Transformation die Coefficienten der drei ersten Glieder nicht geändert werden, während die Glieder mit x' und y' entfallen, und dass ferner die Werte der Mittelpunktscoordinaten x_o und y_o sich ergeben, sobald man die beiden linearen Gleichungen

$$(397) \quad \begin{aligned} \frac{g}{2} &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3} = o, \\ \frac{h}{2} &= a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3} = o, \end{aligned}$$

von welchen eine jede eine Gerade darstellt, nach x und y auflöst.

Specielle Fälle. Ist $A = o$ und $A_{3,3}$ von null verschieden, so geht die eben gefundene Gleichung (396) über in

$$a_{1,1}x'^2 + 2a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 = o,$$

und weil diese Gleichung immer in zwei lineare Factoren zerlegt werden kann, ist auch das geometrische Äquivalent derselben ein Geradenpaar vom Mittelpunkte M_o. (Übereinstimmung mit § 57.) Dass die beiden Elemente des Paars reell und gesondert, reell und zusammenfallend, oder endlich imaginär und gesondert sein können, ist an sich klar. Ferner lehren die früher gewonnenen Gleichungen (394), dass immer ein Mittelpunkt existiert, sobald

$$A_{3,3} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2$$

von null verschieden ist. In dem speciellen Fall jedoch, wo $A_{3,3} = o$ wird, dagegen die Zähler $A_{1,3} = A_{3,1}$ und $A_{2,3} = A_{3,2}$ nicht verschwinden, ist nach Gl. (394) offenbar $\frac{1}{x_o} = o$ und $\frac{1}{y_o} = o$, mithin $x_o = \infty$ und $y_o = \infty$, d. h. hier liegt der Mittelpunkt in unendlicher Ferne oder es hat die Curve keinen Mittelpunkt. Jetzt verbleibt nur noch der specielle Fall zu untersuchen, wo $A_{1,3} = A_{2,3} = A_{3,3} = o$ wird und daher die Ausdrücke für x_o und y_o die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Dies tritt aber dann ein, wenn in der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

die Elemente der einen Zeile von den correspondierenden der anderen bloß durch einen Factor ϱ verschieden sind, oder das Gleichungspolynom $a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3} = \varrho \cdot (a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3})$ wird, d. h. die durch die beiden Gleichungen (397) gegebenen Geraden zusammenfallen. Dann hat man aber unendlich viele Mittelpunkte und ihr geometrischer Ort ist eine Gerade von der Gleichung

(398) . . . $C \equiv a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3} = o,$

während das geometrische Äquivalent von $U = o$ selbst ein Geradenpaar ist, dessen Elemente zur Geraden $C = o$ parallel gerichtet sind; und es ist selbstverständlich, dass hier, wegen $A = a_{1,3}A_{1,3} + a_{2,3}A_{2,3} + a_{3,3}A_{3,3}$, auch $A = o$ sein wird. Freilich ist hierbei noch möglich, dass die beiden Elemente des Paars zusammenfallen, oder die Gleichung $U = o$ eine

doppelt zu zählende Gerade, eine Doppelgerade, darstellt, in welchem Fall das Gleichungspolynom U stets auf die Form gebracht werden kann: $(ax + by + c)^2$. Da nun hier $a_{1,1} = a^2$, $a_{1,2} = a \cdot b$, $a_{2,2} = b^2$, $a_{1,3} = a \cdot c$, $a_{2,3} = b \cdot c$ und $a_{3,3} = c^2$ ist, so wird nicht nur $A = A_{1,3} = A_{2,3} = A_{3,3} = o$, sondern überdies auch $A_{1,1} = A_{2,2} = o$, womit die einzelnen speciellen Fälle erschöpft erscheinen.

Die Kegelschnitte werden sonach unterschieden in solche, welche einen Mittelpunkt besitzen und daher centrale Kegelschnitte heißen, und in solche ohne Mittelpunkt. Bei den ersteren ist $A_{3,3} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}{}^2$ von null verschieden und überdies, sobald eine eigentliche oder irreduzible Curve 2. Ordnung (Ellipse oder Hyperbel) vorliegt, auch die Discriminante A von U nicht gleich null. Soll $A_{3,3}$ von null verschieden und A gleich null werden, so ist der centrale Kegelschnitt degeneriert, d. h. ein Geradenpaar. Bei den Kegelschnitten ohne Mittelpunkt (Parabel) ist dagegen $A_{3,3} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}{}^2 = o$, während A von null verschieden ist.

§ 67. Ort des Scheitels eines dem Kegelschnitte $U = o$ umschriebenen Winkels δ.

Nach Gl. (371) in § 60 lautet die Gleichung des aus dem Punkte M_1 an den Kegelschnitt $U = o$ gelegten Tangentenpaars (T'), (T''):

$$(g_1 x + h_1 y + i_1)^2 - 4\, U_1 U = o,$$

und daher ist, zufolge des in dem vorigen Paragraphen bereits Vorgeführten, die Mittelpunktsgleichung dieses Tangentenpaars, d. h. die Gleichung des letzteren, bezogen auf ein anderes Coordinatensystem, dessen Ursprung mit M_1 zusammenfällt und dessen Achsen (x') und (y') die Richtungen des alten Coordinatensystems beibehalten:

$$(a) \quad (g_1{}^2 - 4\, a_{1,1} U_1) x'^2 + 2 (g_1 h_1 - 4\, a_{1,2} U_1) x'y' + (h_1{}^2 - 4\, a_{2,2}\, U_1) y'^2 = o.$$

Mittelst dieser Gleichung ist man aber auch gleichzeitig in der Lage, den Winkel δ zu bestimmen, welchen die aus M_1 an den Kegelschnitt $U = o$ gelegten Tangenten (T') und

(T'') mit einander einschließen; man braucht ja zu diesem Zwecke bloß die in § 45 gegebene Gleichung (301) zu benützen und daselbst für a, b und c die aus obiger Gleichung (a) zu entnehmenden Werte zu substituieren, wodurch man erhält, sobald man noch die Gleichung (301) in der Form $(a+c)^2 - 4(b^2 - ac)\operatorname{cotg}^2\delta = o$ benützt und für g_1 und h_1 die in § 58 gegebenen Werte einführt:

$$(390)\quad [(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}y_1 + a_{1,3})^2 + (a_{1,2}x_1 + a_{2,2}y_1 + a_{2,3})^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\,U_1]^2$$
$$-4\,.\{[(a_{1,1}x_1 + a_{1,3}y_1 + a_{1,3})(a_{1,2}x_1 + a_{2,2}y_1 + a_{2,3}) - a_{1,2}U_1]^2 - [(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}y_1 + a_{1,3})^2 - a_{1,1}U_1]\,[(a_{1,2}x_1 + a_{2,2}y_1 + a_{2,3})^2 - a_{2,2}U_1]\}\operatorname{cotg}^2\delta = o,$$

und hieraus folgt der zu suchende Winkel δ, wenn der Punkt M_1 durch seine Coordinaten x_1, y_1 gegeben erscheint. Umgekehrt kann aber die soeben gefundene Gleichung auch noch dazu benützt werden, um den geometrischen Ort des Scheitels eines dem Kegelschnitte $U = o$ umgeschriebenen Winkels δ ausfindig zu machen, indem zur Lösung dieses Problems bloß erforderlich ist, in (399) die Coordinaten x_1, y_1 durch die veränderlichen Punktcoordinaten x, y zu ersetzen, wodurch man nach zweckdienlicher Umformung des zweiten Klammerausdruckes erhält:

$$(400)\quad [(a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3})^2 + (a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3})^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\,U]^2$$
$$-4\,.\,\{[a_{1,1}(a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3})^2 + a_{2,2}(a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3})^2 - 2\,a_{1,2}(a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3})(a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3})]\,.\,U - (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)\,U^2\}\operatorname{cotg}^2\delta = o,$$

und diese Gleichung bestimmt den fraglichen geometrischen Ort und letzterer ist somit eine algebraische Curve 4. Ordnung. Ist nun der dem Kegelschnitte $U = o$ umgeschriebene Winkel ein rechter, so wird $\operatorname{cotg}\delta = o$ und nimmt die letzte Gleichung die einfachere Gestalt an

$$(a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3})^2 + (a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3})^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\,U = o,$$

und hieraus folgt, sobald wieder A die Discriminante des Gleichungspolynoms U bedeutet und $A_{i,k}$ in der schon mehrfach angegebenen Beziehung zu A steht,

(401) $A_{3,3}(x^2+y^2)-2A_{1,3}x-2A_{2,3}y+(A_{1,1}+A_{2,2})=o.$
Die hier vorkommende Größe $A_{3,3}=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}{}^2$ ist jedoch, wie in dem vorangegangenen Paragraphen gezeigt wurde, nur dann von der null verschieden, sobald der Kegelschnitt $U=o$ central ist, während sie bei einem Kegelschnitte ohne Centrum bekanntlich verschwindet. Der geometrische Ort des Scheitels eines einem centralen Kegelschnitte (Ellipse oder Hyperbel) umgeschriebenen rechten Winkels ist somit ein Kreis, bestimmt durch die soeben gefundene Gleichung (401), während bei einem Kegelschnitte ohne Mittelpunkt (Parabel) dieser Ort eine Gerade ist (Leitlinie der Parabel), und diese Gerade hat die Gleichung:
(402) . . $2A_{1,3}x+2A_{2,3}y-(A_{1,1}+A_{2,2})=o.$

1. Beispiel. Die Gleichung des Kegelschnittes sei $U\equiv\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1=o.$ Nachdem in diesem speciellen Fall $a_{1,1}=\frac{1}{a^2}$, $a_{2,2}=\pm\frac{1}{b^2}$ und $a_{3,3}=-1$ ist, während die übrigen drei Coefficienten $a_{i,k}$ verschwinden, so nimmt Gl. (401) die Form an: $x^2+y^2-(a^2\pm b^2)=o$, und d. i. die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser $r=\sqrt{a^2\pm b^2}$.

2. Beispiel. Die Gleichung des Kegelschnittes wäre $U\equiv\frac{y^2}{p}-x=o.$ Hier ist $a_{2,2}=\frac{1}{p}$ und $a_{1,3}=-\frac{1}{2}$, während die übrigen Coefficienten $a_{i,k}$ wieder gleich null sind. Durch Einführung dieser Werte von $a_{i,k}$ in Gl. (402) erhält man dann $\frac{x}{2p}+\frac{1}{8}=o$ oder $x=-\frac{p}{4}$, und d. i. die Gleichung einer Geraden, welche im Abstande $-\frac{p}{4}$ vom Ursprunge parallel gerichtet ist zur Achse der y.

§ 68. **Radien der centralen Kegelschnitte.**

Unter einem Radius eines centralen Kegelschnittes versteht man die Länge derjenigen Geraden, welche einen Punkt M dieser Curve mit ihrem Mittelpunkte M_o verbindet. Wir bezeichnen in Hinkunft die Strecke M_oM mit r und nennen α denjenigen Winkel (Siehe Fig. 81), unter welchem

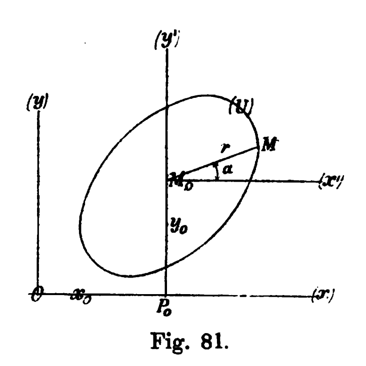


Fig. 81.

die durch die Punkte M_0 und M gegebene Gerade gegen die Achse der x geneigt erscheint. Durch den Winkel α ist nun der Radius r eindeutig bestimmt, und hat man behufs Berechnung von r aus α in der Mittelpunktsgleichung (396) der Kegelschnitte bloß $x' = r \cos \alpha$ und $y' = r \sin \alpha$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$(403)\quad (a_{1,1} \cos^2 \alpha + 2\, a_{1,2} \cos \alpha \sin \alpha + a_{2,2} \sin^2 \alpha) \,.\, r^2 + \frac{A}{A_{3,3}} = o,$$

oder

$$(404)\quad r = \sqrt{\frac{-\dfrac{A}{A_{3,3}}}{a_{1,1} \cos^2 \alpha + 2\, a_{1,2} \cos \alpha \sin \alpha + a_{2,2} \sin^2 \alpha}},$$

und aus dieser Formel ersieht man sofort, dass unter der Annahme $\frac{A}{A_{3,3}} < o$ der Radius r reell oder imaginär erscheint, je nachdem der Nenner $a_{1,1} \cos^2 \alpha + 2\, a_{1,2} \cos \alpha \sin \alpha + a_{2,2} \sin^2 \alpha$ positiv oder negativ ausfällt. Ist dagegen dieser Nenner gleich null, d. h. ist $\alpha = \alpha_1$ oder $\alpha = \alpha_2$, wobei α_1 und α_2 Winkel sind, die aus Gleichung $a_{2,2} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\, a_{1,2} \operatorname{tg} \alpha + a_{1,1} = o$ hervorgehen, wenn man dieselbe nach $\operatorname{tg} \alpha$ auflöst, also

$$(405)\quad . \; . \; . \quad \begin{matrix} \operatorname{tg} \alpha_1 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 \end{matrix} = \left\{ \frac{a_{1,2} \pm \sqrt{a_{1,2}^{\,2} - a_{1,1} a_{2,2}}}{a_{2,2}}, \right.$$

so wird $\frac{1}{r} = o$, oder $r = \infty$, d. h. die durch M_0 gehenden und gegen die Achse der x unter den Winkeln α_1 und α_2 geneigten Geraden (A_1) und (A_2) haben mit dem Kegelschnitte $U = o$ diejenigen Punkte $M_{1,\infty}$ und $M_{2,\infty}$ gemein, in welchen dieser von der unendlich fernen Geraden (L_∞) der Ebene vorliegender Curve geschnitten wird. Selbstverständlich gilt dies auch noch von allen jenen Strahlen, die zu den eben angeführten Geraden (A_1) und (A_2) parallel ge-

richtet sind. Nachdem übrigens (A_1) mit dem Kegelschnitte nur den Punkt $M_{1,\infty}$ gemein hat, jede Gerade aber einen Kegelschnitt in zwei Punkten durchschneidet, so muss (A_1) die Curve in $M_{1,\infty}$ berühren, und ganz dasselbe gilt natürlich auch von (A_2) und $M_{2,\infty}$; es stellen sonach (A_1) und (A_2) gleichzeitig die zwei Tangenten dar, welche den Kegelschnitt in seinen beiden unendlich fernen Punkten berühren, oder (A_1) und (A_2) sind die beiden Asymptoten der Curve. Es ist klar, dass ein jeder Kegelschnitt zwei Asymptoten haben muss, die im allgemeinen reell und gesondert, reell und zusammenfallend, oder endlich imaginär und gesondert sind, je nachdem nämlich das in Gl. (405) unter dem Wurzelzeichen vorkommende Binom: $a_{1,2}{}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = - A_{3,3}$ positiv, null oder endlich negativ wird, und damit gelangt man zur Erkenntnis, dass das Asymptotenpaar des durch Gl. (340) gegebenen Kegelschnittes $U = o$ reell und gesondert, reell und zusammenfallend, oder gesondert und imaginär ist, je nachdem

$$(406) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A_{3,3} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}{}^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} o$$

wird. Nun ist aber $A_{3,3}$ von null nur dann verschieden, (§ 66), sobald der Kegelschnitt central ist, und haben somit die centralen Kegelschnitte zwei gesonderte Asymptoten, die gleichzeitig imaginär (bei der Ellipse) oder gleichzeitig reell (bei der Hyperbel) sind, während bei den Kegelschnitten ohne Centrum (bei der Parabel) die Größe $A_{3,3} = o$ wird, also beide Asymptoten wohl reell sind, aber zusammenfallen. Es ist an sich klar, dass diese doppelt zählende Asymptote die unendlich ferne Gerade (L_∞) der Ebene des Kegelschnittes sein muss, indem ja für $A_{3,3} = o$ das Centrum des Kegelschnittes in unendlicher Ferne liegt, und dass die beiden unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes hier zusammenfallen.

§ 69. Über die Asymptoten der Kegelschnitte.

Die Gleichung eines Kegelschnittes in den einfachsten homogenen Punktcoordinaten ist nach § 25 und 54

$$U \equiv a_{1,1}\, x^2 + 2\, a_{1,2}\, xy + \ldots . + 2\, a_{2,3}\, yz + a_{3,3}\, z^2 = o;$$

setzt man jetzt noch $L_i = A_i x + B_i y + C_i$ und versteht unter λ einen veränderlichen Parameter, so ist das geometrische Äquivalent der Gleichung

(a) . . . . $U - \lambda L_1 L_2 = o$

der Inbegriff aller derjenigen Kegelschnitte, welche man durch die vier Schnittpunkte der beiden Geraden $L_1 = o$ und $L_2 = o$ mit dem Kegelschnitte $U = o$ legen kann. Fallen nun diese beiden Geraden zusammen, wodurch dann die obige Gleichung übergeht in

(b) . . . . $U - \lambda . L_1^2 = o,$

so fallen auch von den Schnittpunkten je zwei davon zusammen, und repräsentiert demnach Gl. (b) alle jene Kegelschnitte, welche den Kegelschnitt $U = o$ in jenen Punkten zweipunktig oder nach der ersten Ordnung berühren, wo dieser von der Geraden $L_1 = o$ geschnitten wird, weshalb

$$U - \lambda . z^2 = o,$$

nachdem $z = o$ (Siehe § 28, Gl. 169) die Gleichung der unendlich fernen Geraden in den einfachsten homogenen Punktcoordinaten darstellt, der Inbegriff aller Kegelschnitte ist, welche den Kegelschnitt $U = o$ in seinen beiden unendlich fernen Punkten nach der ersten Ordnung berühren. Die letzte Gleichung kann aber, sobald man die Differenz $a_{3,3} - \lambda$ durch $a_{3,3}'$ ersetzt, auch so gegeben werden:

(c) $a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} xy + \ldots . + 2 a_{2,3} yz + a'_{3,3} z^2 = o,$

und sind daher, sobald unter $a'_{3,3}$ ein veränderlicher Parameter gedacht wird, in der letzten Gleichung alle Kegelschnitte enthalten, die den Kegelschnitt $U = o$ in seinen beiden unendlich fernen Punkten nach der ersten Ordnung berühren. Zu diesen Kegelschnitten gehört aber auch das Asymptotenpaar von $U = o$, indem nach der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Erklärung darunter die beiden Tangenten zu verstehen sind, welche den Kegelschnitt $U = o$ in jenen Punkten berühren, wo derselbe von der unendlich fernen Geraden (L_∞) geschnitten wird. Es stellt somit (c) die Gleichung des besagten Asymptotenpaars dar, sobald man darin den veränderlichen Parameter $a'_{3,3}$ durch einen solchen constanten Coefficienten ersetzt,

für welchen die Discriminante des Gleichungspolynoms von (c) verschwindet, für welchen also die Determinante

$$(d) \ldots \ldots \quad A' \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3}' \end{vmatrix} = o$$

wird, und weil aus dieser Gleichung folgt, sobald wieder A die Discriminante des Gleichungspolynoms U repräsentiert, $a_{1,3}A_{1,3} + a_{2,3}A_{2,3} + a_{3,3}'A_{3,3} = o$, oder $a_{3,3}' = -a_{1,3}\frac{A_{1,3}}{A_{3,3}} - a_{2,3}\frac{A_{2,3}}{A_{3,3}}$, $a_{3,3}' = a_{3,3} - \frac{A}{A_{3,3}}$, so ist schließlich

$$(407) \ldots \ldots \quad U - \frac{A}{A_{3,3}} z^2 = o$$

die Gleichung des Asymptotenpaars des Kegelschnittes $U \equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + \ldots + a_{3,3}z^2 = o$, u. zw. in den einfachsten homogenen Punktcoordinaten. Selbstverständlich ist diese Gleichung durch

$$(408) \ldots \ldots \ldots \quad U - \frac{A}{A_{3,3}} = o$$

zu ersetzen, sobald man die Cartesischen Punktcoordinaten der Untersuchung zu Grunde legt. Es ist daher auch klar, dass alle Kegelschnitte, deren Gleichungen nur durch das letzte Glied sich unterscheiden, ein gemeinschaftliches Asymptotenpaar besitzen müssen.

Nachdem wir nun die Gleichung des Asymptotenpaars eines Kegelschnittes $U = o$ bestimmt haben, beschäftigen wir uns noch mit der Aufsuchung der Gleichung ihrer beiden Winkelhalbierungslinien, sowie mit der Bestimmung der Coordinaten und des Neigungswinkels dieser Asymptoten selbst. Die Lösung der ersten der zuletzt gestellten Aufgaben erfordert aber die Transformation der Gl. (408) auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkte des Asymptotenpaars oder, was dasselbe ist, mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes $U = o$ identisch ist, während dessen Achsen (x') und (y') die Richtungen der früheren Achsen (x) und (y) beibehalten. Diese transformirte Gleichung kann man jedoch nach den in den Paragraphen 66 und 68 angestellten Betrachtungen ohneweiters angeben, und es lautet dieselbe

$$a_{1,1}x'^2 + 2a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 = o,$$

weshalb nach Gl. (302) in § 45 auch

(409) . $a_{1,2}x'^2 + (a_{2,2} - a_{1,1})x'y' - a_{1,2}y'^2 = o$

die Mittelpunktsgleichung der beiden Winkelhalbierungslinien des Asymptotenpaars von dem Kegelschnitte $U \equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + \ldots + a_{3,3} = o$ ist.

Die homogenen Coordinaten u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2, einfachster Art, der beiden Asymptoten des Kegelschnittes $U = o$ können nun ebenfalls mittelst der eben gewonnenen Gleichung (408) und den früheren Gleichungen (348) in § 57 gefunden werden. Nach diesen ist nämlich, wenn A' die in (*d*) angegebene Bedeutung hat,

$$(e)\quad \begin{aligned} u_1 : v_1 : w_1 &= a_{1,1} : (a_{1,2} - \sqrt{-A_{3,3}'}) : (a_{1,3} + \sqrt{-A_{2,2}'}),\\ u_2 : v_2 : w_2 &= a_{1,1} : (a_{1,2} + \sqrt{-A_{3,3}'}) : (a_{1,3} - \sqrt{-A_{2,2}'}),\end{aligned}$$

wenn die hier vorkommenden Symbole $A'_{i,k}$ definiert sind durch $A'_{2,2} = a_{1,1}a_{3,3}' - a_{1,3}^2$ und $A'_{3,3} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2$. Anderseits ist aber der Coefficient $a_{3,3}' = a_{33} - \dfrac{A}{A_{3,3}}$, und durch Einführung dieses Wertes von $a_{3,3}'$ in den eben gegebenen Ausdruck für $A_{2,2}'$ erhält man hierauf, wenn gleichzeitig auch für die Discriminante A der bekannte Wert substituiert wird, $A_{2,2}' = \dfrac{(a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3})^2}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}$ und diese Werte von $A_{2,2}'$ und $A_{3,3}'$ liefern durch Einführung in (*e*) für die fraglichen Coordinaten der beiden Asymptoten die Proportionen:

$$(410)\quad \begin{aligned} &u_1 : v_1 : w_1 = a_{1,1} : (a_{1,2} - \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}) : \\ &\left(a_{1,3} + \frac{a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3}}{\sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}}\right), \quad u_2 : v_2 : w_2 = a_{1,1} : \\ &(a_{1,2} + \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}) : \left(a_{1,3} - \frac{a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3}}{\sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}}\right),\end{aligned}$$

während die Gleichungen der beiden Asymptoten lauten:

$$(411)\quad \begin{aligned} &A_1 \equiv a_{1,1}x + (a_{1,2} - \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}) \cdot y + \\ &\left(a_{1,3} + \frac{a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3}}{\sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}}\right) = o, \quad A_2 \equiv a_{1,1}x + \\ &(a_{1,2} + \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}})y + \left(a_{1,3} - \frac{a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3}}{\sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}}\right) = o,\end{aligned}$$

und diese ermöglichen es nun auch, den Neigungswinkel der Asymptoten (A_1) und (A_2) ausfindig zu machen. Zu diesem Zwecke benütze man die bekannte Gleichung

$$\operatorname{tg}(A_1, A_2) = \frac{\operatorname{tg}(x, A_2) - \operatorname{tg}(x, A_1)}{1 + \operatorname{tg}(x, A_1) \cdot \operatorname{tg}(x, A_2)}$$

und setze in derselben, im Sinne der eben gewonnenen Gleichungen (411), $\operatorname{tg}(x, A_1) = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2} - \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2}}}$, $\operatorname{tg}(x, A_2) = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2} + \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2}}}$, wodurch man erhält

$$(412) \quad \ldots \quad \operatorname{tg}(A_1, A_2) = \frac{2\sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2}}}{a_{1,1} + a_{2,2}},$$

und hieraus erkennt man, dass dieser Winkel ein rechter ist, sobald $a_{1,1} + a_{2,2} = o$, oder $a_{2,2} = -a_{1,1}$ ist (gleichseitige Hyperbel).

1. Beispiel. Man bestimme die Gleichung des Asymptotenpaars des Kegelschnittes $U \equiv \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$. Hier ist die Discriminante $A = \mp \frac{1}{a^2 b^2}$, daher $A_{3,3} = \pm \frac{1}{a^2 b^2}$ und folglich $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = o$ die zu suchende Gleichung des Asymptotenpaars. Die Gleichungen der beiden Asymptoten sind demnach $y = i \frac{b}{a} x$ und $y = -i \frac{b}{a} x$, beziehungsweise $y = \frac{b}{a} x$ und $y = -\frac{b}{a} x$, wenn $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bedeutet. Die Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ erscheinen demnach reell, jene der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ aber imaginär, und für beide Curven sind die Asymptoten gesondert. Für den Kreis ist $a = b = r$ und daher $x^2 + y^2 = o$ die Gleichung des Asymptotenpaars, und man erkennt daraus, dass die Elemente des letzteren nach den beiden imaginären Kreispunkten gehen. (Siehe § 40.)

2. Beispiel. Die Gleichung des Asymptotenpaars des Kegelschnittes (Parabel) $U \equiv \frac{y^2}{p} - x = o$ ist zu ermitteln. Nachdem hier $A_{3,3} = o$ ist, lautet die gesuchte Gleichung $A \cdot z^2 = o$, oder $z^2 = o$, d. h. die unendlich ferne Gerade der Ebene der Parabel ist die Asymptote der letzteren. Hierbei ist die unendlich ferne Gerade doppelt zu zählen.

§ 70. Durchmesser der Kegelschnitte.

Unter einem Durchmesser eines Kegelschnittes versteht man den geometrischen Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Sehnen dieser Curve. Der Durchmesser und die von ihm halbierten Sehnen sind einander conjugiert. Es lässt sich nun aus dieser Definition eines Diameters ohneweiters eine andere ableiten, mittelst welcher man auch gleichzeitig im Stande ist, die Gleichung desselben zu bestimmen, sobald der Winkel α gegeben erscheint, unter welchem die conjugierten Sehnen gegen die Achse der x geneigt sind. Bezeichnen nämlich in Fig. 82 $M'M''$ und $M'''M^{IV}$ zwei zu einander parallele Sehnen des Kegelschnittes $U = o$ und ist M_∞ der unendlich ferne Punkt derjenigen Strahlen, auf welchen die Strecken $M'M''$ und $M'''M^{IV}$ zu liegen kommen, so ist, wenn noch M und N die

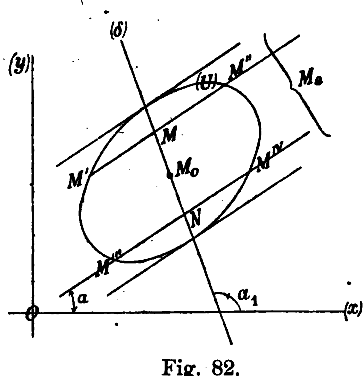


Fig. 82.

Mittelpunkte der letzteren bezeichnen, nach § 19 offenbar $(M'M''MM_\infty) = (M'''M^{IV}NM_\infty) = -1$, d. h. es sind M, M_∞ und N, M_∞ Paare harmonischer Pole bezüglich des Kegelschnittes $U = o$. Die Mittelpunkte M und N der Strecken $M'M''$ und $M'''M^{IV}$ repräsentieren somit beigeordnete harmonische Pole zu dem Punkte M_∞, und weil dies von dem Mittelpunkte einer jeden zur Sehne $M'M''$ parallelen Sehne des Kegelschnittes $U = o$ gilt, so erkennt man nach der eben gegebenen Definition eines Durchmessers und dem in

§ 62 bereits Gesagten, dass der Durchmesser (δ), welcher den Sehnen $M'M''$, $M'''M^{IV}$... conjugiert erscheint, identisch ist mit der Polaren ihres unendlich fernen Punktes M_∞ bezüglich $U = o$, und hieraus folgt der

Satz: Der einem System paralleler Sehnen eines Kegelschnittes conjugierte Durchmesser oder Diameter ist die Polare des unendlich fernen Punktes dieser Sehnen bezüglich des Kegelschnittes.

Es ist daher auch klar, dass der Durchmesser (δ) den Kegelschnitt $U = o$ in denjenigen Punkten durchschneidet, in welchen vorliegende Curve von dem zu den conjugierten Sehnen parallelen Tangentenpaar berührt wird, und dass jeder Durchmesser eine durch den Mittelpunkt M_o des Kegelschnittes gehende Gerade darstellt. Nimmt man ferner an, dass der Winkel α der Sehnen alle Werte durchläuft von o bis 2π, so wird auch der Winkel α_1, unter welchem der Diameter (δ) gegen die Achse der x geneigt erscheint, alle Werte annehmen von o bis 2π, weshalb sämmtliche Durchmesser eines Kegelschnittes einen Strahlenbüschel 1. Ordnung repräsentieren, dessen Centrum mit dem Mittelpunkte M_o des Kegelschnittes identisch ist, und umgekehrt eine jede durch M_o gelegte Gerade einen Diameter dieser Curve darstellt. Damit ist aber auch gleichzeitig der Beweis erbracht, dass alle Durchmesser eines Kegelschnittes ohne Mittelpunkt einerlei Richtung besitzen müssen.

Übergehend auf die Gleichung eines Durchmessers, bestimme man vorerst die Gleichung der Polaren eines Punktes M_1, dessen Polarcoordinaten R und α seien, d. h. dessen rechtwinkelige Coordinaten x_1 und y_1 sich ergeben aus: $x_1 = R\cos\alpha$ und $y_1 = R \,.\, \sin\alpha$. Nach § 62 lautet nun diese Gleichung:

$$g\cos\alpha + h\sin\alpha + \frac{i}{R} = o.$$

Lässt man jetzt R unendlich groß werden, so geht obige Gleichung über in die einfachere

$$(413) \quad . \; . \; . \qquad \delta \equiv g\cos\alpha + h\sin\alpha = o,$$

und diese bestimmt die Polare von dem unendlich fernen

Punkte des durch den Winkel α gegebenen Parallelstrahlenbüschels oder denjenigen Durchmesser (δ), dessen conjugierte Sehnen mit der Achse der x den Winkel α bilden. Substituiert man endlich für die Symbole g und h die in § 58 gegebenen Werte und fasst die Glieder mit x und y zusammen, so nimmt (413) die Form an

$$(414)\quad \begin{aligned}(a_{1,1}\cos\alpha + a_{1,2}\sin\alpha)\,x + (a_{1,2}\cos\alpha + a_{2,2}\sin\alpha)\,y +\\ (a_{1,3}\cos\alpha + a_{2,3}\sin\alpha) = o\end{aligned}$$

und hieraus folgt, sobald man die letzte Gleichung nach y auflöst,

$$(415)\qquad y = -\frac{a_{1,1} + a_{1,2}\operatorname{tg}\alpha}{a_{1,2} + a_{2,2}\operatorname{tg}\alpha}\cdot x - \frac{a_{1,3} + a_{2,3}\operatorname{tg}\alpha}{a_{1,2} + a_{2,2}\operatorname{tg}\alpha}.$$

Eine jede der drei letzten Gleichungen ist demnach die Gleichung eines Durchmessers des Kegelschnittes $U \equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + \ldots + a_{3,3} = o$, wenn noch α den Richtungswinkel der diesem Diameter conjugierten Sehnen repräsentiert, und weil der Coefficient von x in der letzten Gleichung gleichzeitig die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels α_1 angibt, den die Achse der x mit dem Diameter (δ) bildet, so besteht noch gleichzeitig die Rel.

$$(416)\ \ldots\quad \operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{a_{1,1} + a_{1,2}\operatorname{tg}\alpha}{a_{1,2} + a_{2,2}\operatorname{tg}\alpha}.$$

Die Gleichung (413) wird befriedigt, sobald man dort x und y durch die Mittelpunktscoordinaten x_o und y_o ersetzt, indem für diese nach Gl. (397) in § 66 die mit g und h bezeichneten Größen gleichzeitig verschwinden, und damit ist auch analytisch der Nachweis erbracht, dass ein jeder Durchmesser des Kegelschnittes durch dessen Mittelpunkt geht. Ferner folgt aus (413), dass für $\alpha = o$, $g = o$; für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ aber $h = o$ die Gleichung des Durchmessers repräsentiert. Was noch insbesondere die Diameter der nicht centralen Kegelschnitte anbelangt, so muss bei denselben nach den vorhergegangenen Erklärungen der Winkel α_1 für alle Werte von α einen und denselben Wert besitzen. Dies trifft nun hier zu; denn ersetzt man in Gleichung (416) den Coefficienten $a_{2,2}$ durch den Bruch $\frac{a_{1,2}^2}{a_{1,1}}$,

was nach § 66 bei den Kegelschnitten ohne Mittelpunkt gestattet ist, so wird in der That

$$(417) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}} = -\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}},$$

also constant und unabhängig von dem Richtungswinkel α der conjugierten Sehnen. Die Gleichung des Durchmessers selbst ist nun hier:

$$(418) \quad . \quad . \quad . \quad y = -\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}x - \frac{a_{1,3} + a_{2,3}\operatorname{tg}\alpha}{a_{1,2} + a_{2,2}\operatorname{tg}\alpha}.$$

Satz. Verbindet man durch eine Gerade den Mittelpunkt M der Sehne $M'M''$ eines Kegelschnittes $U = o$ mit ihrem Pol M_1 bezüglich $U = o$, so ist der Mittelpunkt M_o von $U = o$ ein Punkt der Verbindungsgeraden M_1M.

Beweis. Um die Richtigkeit dieses Satzes zu constatieren, bestimme man vorerst den geometrischen Ort der Pole der einzelnen Elemente eines Parallelstrahlenbüschels bezüglich des Kegelschnittes $U = o$. Die Gleichung des Parallelstrahlenbüschels sei $Ax + By + C = o$, wenn A und B Constanten bezeichnen, bestimmend die Richtung der einzelnen Elemente des Büschels, während C ein veränderlicher Parameter ist; ferner seien noch x_1 und y_1 die rechtwinkligen Coordinaten des Pols irgend eines Elementes des Büschels. Nachdem nun $(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}y_1 + a_{1,3})x + (a_{1,2}x_1 + a_{2,2}y_1 + a_{2,3})y + (a_{1,3}x_1 + a_{2,3}y_1 + a_{3,3}) = o$ die Gleichung der Polaren des Punktes M_1 in Bezug auf $U = o$ repräsentiert, müssen die beiden Relationen bestehen:

$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}y_1 + a_{1,3} = \varrho \,.\, A,\quad a_{1,2}x_1 + a_{2,2}y_1 + a_{2,3} = \varrho \,.\, B,$

wenn noch ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, und aus denselben folgt durch die Elimination von ϱ

$B \,.\, (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}y_1 + a_{1,3}) - A \,.\, (a_{1,2}x_1 + a_{2,2}y_1 + a_{2,3}) = o;$

es ist demnach der geometrische Ort der Pole sämmtlicher Elemente des hier vorliegenden Parallelstrahlenbüschels eine Gerade von der Gleichung

$G \equiv B \,.\, (a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}) - A \,.\, (a_{1,2}x + a_{2,2}y + a_{2,3}) = o,$

und diese enthält den Mittelpunkt, indem nach § 66, Gl. (397), ein jeder der in obiger Gleichung vorkommenden Klammerausdrücke gleich null wird, sobald man dort x und y ersetzt durch die Coordinaten x_o, y_o des Mittelpunktes

des Kegelschnittes $U = o$. Es ist klar, dass die Gerade $G = o$ auch durch die Punkte M''' und M^{IV} (Fig. 83) gehen muss, in welchen nämlich der Kegelschnitt $U = o$ von den beiden Elementen (T''') und (T^{IV}) des Parallelstrahlenbüschels berührt wird, denn M''' und M^{IV} sind ja die Pole von (T''') und (T^{IV}). Die Gerade $M_1 M_o$ in Fig. 83 ist somit identisch mit der Geraden $M''' M^{IV}$ oder mit dem conjugierten Durchmesser aller zur Geraden $Ax + By = o$ parallelen Sehnen des Kegelschnittes. Nun ist aber $M' M''$ eine solche Sehne und daher ist auch der Mittelpunkt M von $M' M''$ ein Punkt von der Geraden $M''' M^{IV}$ oder der Geraden $M_1 M_o$.

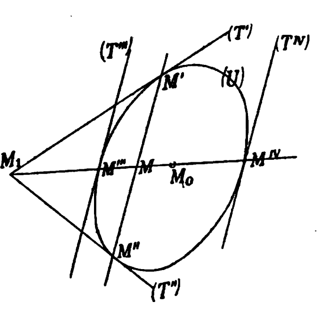


Fig 83.

§ 71. Conjugierte Durchmesser der centralen Kegelschnitte.

Es sei (δ_1) ein Durchmesser des Kegelschnittes $U = o$ und (S_1) dasjenige System paralleler Sehnen, welches dem Durchmesser (δ_1) conjugirt ist; ferner α der Winkel, den die Achse der x mit den einzelnen Sehnen des Systems (S_1) bildet, und endlich α_1 der Richtungswinkel (x, δ_1). Dann besteht zwischen $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha_1$ die in dem vorigen Paragraphen gefundene Beziehung, u. zw.

$$(416) \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{a_{1,2}\operatorname{tg}\alpha + a_{1,1}}{a_{2,2}\operatorname{tg}\alpha + a_{1,2}}.$$

Denkt man sich nun ein zweites System (S_2) paralleler Sehnen und nimmt dabei noch an, dass die einzelnen Elemente von (S_2) zu dem Durchmesser (δ_1) parallel gerichtet erscheinen, nennt wieder (δ_2) den zu (S_2) conjugierten Diameter des Kegelschnittes und $(x, \delta_2) = \alpha_2$ den Winkel, welchen die Achse der x mit (δ_2) bildet, so besteht nach (416) die analoge Relation

$$(a) \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{a_{1,2}\operatorname{tg}\alpha_1 + a_{1,1}}{a_{2,2}\operatorname{tg}\alpha_1 + a_{1,2}},$$

und weil, sobald man Gl. (416) nach $\operatorname{tg}\alpha$ auflöst, sich ergibt

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_{1,2} \operatorname{tg} \alpha_1 + a_{1,1}}{a_{2,2} \operatorname{tg} \alpha_1 + a_{1,2}},$$

so ist $\alpha_2 = \alpha$ und somit der zweite Durchmesser (δ_2) parallel gerichtet zu den Sehnen des Systems (S_1). Aus dieser Betrachtung ergibt sich demnach der

Satz: Sind (S_1) und (S_2) zwei Systeme paralleler Sehnen eines centralen Kegelschnittes, (δ_1) und (δ_2) ihre conjugierten Durchmesser, und erscheinen die Sehnen des Systems (S_1) parallel gerichtet zu (δ_2), so sind umgekehrt die Sehnen des Systems (S_2) parallel zu dem anderen Durchmesser (δ_1).

Man nennt nun zwei solche Durchmesser eines centralen Kegelschnittes, von welchen ein jeder diejenigen Sehnen halbiert, die zu dem anderen Durchmesser parallel laufen, ein Paar conjugierter Diameter dieses Kegelschnittes, und es ist an sich klar, dass jeder centrale Kegelschnitt unendlich viele Paare solcher Durchmesser besitzt.

Übergehend auf die Gleichung eines Paars conjugierter Durchmesser, verlege man den Ursprung des Coordinatensystems nach dem Mittelpunkte M_o des Kegelschnittes, in welchem Fall dann die Gleichung des letzteren nach § 66, Gl. (396), die Gestalt annimmt:

$$a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} x y + a_{2,2} y^2 + \frac{A}{A_{3,3}} = o.$$

Da nun jeder Durchmesser eines centralen Kegelschnittes eine durch den Mittelpunkt des letzteren gehende Gerade ist, so lautet die Gleichung eines Durchmessers (δ_1), welcher den Curvenpunkt M_1 (Fig. 84) enthält,

$$\delta_1 \equiv y_1 x - x_1 y = o,$$

sobald x_1, y_1 die Coordinaten dieses Punktes angeben. Nun erscheinen aber die Sehnen des zu (δ_1) conjugierten Diameters (δ_2) nach dem letzten Satze parallel zu (δ_1) und daher ist, zufolge Gl. (413) in § 70, wenn noch $(x, \delta_1) = \alpha_1$ gesetzt wird, $\delta_2 \equiv g \cos \alpha_1 + h \sin \alpha_1 = o$ die Gleichung von (δ_2). Nun ist aber hier speciell $\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$, $\sin \alpha_1 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ und daher kann die letzte Gleichung

auch ersetzt werden durch

(420) . . . $\delta_1 \equiv g\,x_1 + h\,y_1 = o.$

Die in der letzten Gleichung in Anwendung kommenden Symbole g und h werden aber nach § 58 hier definiert durch $g = 2\,(a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y)$, $h = 2\,(a_{1,2}\,x + a_{2,2}\,y)$, und daher ist auch $g\,x_1 + h\,y_1 = 2\,(a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y)\,x_1 + 2\,(a_{1,2}\,x + a_{2,2}\,y)\,y_1 = 2\,(a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,y_1)\,x + 2\,(a_{1,2}\,x_1 + a_{2,2}\,y_1)\,y = g_1\,x + h_1\,y$, weshalb Gl. (420) übergeht in

(421) . . . $\delta_2 \equiv g_1\,x + h_1\,y = o,$

und hieraus ersieht man, dass die im Punkte M_1 an den Kegelschnitt gelegte Tangente (T_1) parallel gerichtet erscheint zu dem Durchmesser (δ_2), indem ja die Gleichung der Tangente (T_1) nach § 58 ist: $T_1 \equiv g_1\,x + h_1\,y + i_1 = o.$ In gleicher Weise lässt sich aber auch der Nachweis liefern, dass (T_1') parallel zu (δ_2), sowie (T_2) und (T_2') parallel zu (δ_1) sein müssen, und daher bilden die in den vier conjugierten Punkten M_1, M_1', M_2 und M_2' an den Kegelschnitt gelegten Tangenten ein dem letzteren umgeschriebenes Parallelogramm.

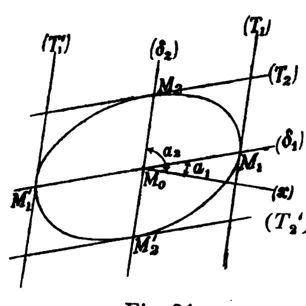


Fig. 84.

Satz. Ein Paar conjugierter Diameter eines centralen Kegelschnittes und die beiden Asymptoten des letzteren sind harmonisch.

Beweis. Nach den in § 69 angestellten Betrachtungen ist die Mittelpunktsgleichung des Asymptotenpaars eines durch Gl. (340) gegebenen centralen Kegelschnittes

(a) . . . $a_{1,1}\,x^2 + 2\,a_{1,2}\,x\,y + a_{2,2}\,y^2 = o$

und $(y - x \,.\, \operatorname{tg}\alpha_1)\,(y - x\,\operatorname{tg}\alpha_2) = o$, oder

(b). $\operatorname{tg}\alpha_1 \,.\, \operatorname{tg}\alpha_2 \,.\, x^2 - (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)\,x\,y + y^2 = o$

die Gleichung eines Paars conjugierter Diameter dieser Curve, sobald α_1 und α_2 die in Fig. 84 angegebene Bedeutung haben und der Relation genügen: $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\dfrac{a_{1,2}\,\operatorname{tg}\alpha_1 + a_{1,1}}{a_{2,2}\,\operatorname{tg}\alpha_1 + a_{1,2}}$,

welche auch so gegeben werden kann

(c) $a_{2,2} \operatorname{tg} \alpha_1 \, . \operatorname{tg} \alpha_2 + a_{1,2} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) + a_{1,1} = o.$

In § 45 wurde aber gezeigt, dass die durch die beiden Gleichungen $a x^2 + 2 b x y + c y^2 = o$ und $a' x^2 + 2 b' x y + c' y^2 = o$ gegebenen Strahlenpaare harmonisch sind, sobald die hier vorkommenden sechs Coefficienten der Bedingung genügen $a\,c' - 2\,b\,b' + a'\,c = o$, und weil diesmal $a = a_{1,1}$, $b = a_{1,2}$, $c = a_{2,2}$ und $a' = \operatorname{tg} \alpha_1 \, . \operatorname{tg} \alpha_2$, $b' = -\frac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)$, $c' = 1$ ist, so können die beidem Asymptoten des Kegelschnittes und die conjugierten Durchmesser (δ_1), (δ_2) nur dann einen harmonischen Strahlenbüschel bilden, sobald

(d). $a_{1,1} + a_{1,2} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) + a_{2,2} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = o$

ist. Nun stimmen aber die Gleichungen (c) und (d) vollkommen überein und folglich erscheint auch diese Bedingung in der That erfüllt, daher etc. etc. Von selbst ergibt sich jetzt noch der weitere

Satz: Sämmtliche Paare conjugierter Diameter eines centralen Kegelschnittes bilden eine quadratische Strahleninvolution, und die beiden tautologen Strahlen des letzteren sind die Asymptoten des Kegelschnittes.

§ 72. Das Problem der Hauptachsen.

Hauptachsen der centralen Kegelschnitte. Unter einem Hauptdurchmesser oder einer Hauptachse eines Kegelschnittes versteht man einen solchen Durchmesser dieser Curve, welcher seine conjugierten Sehnen rechtwinkelig durchschneidet. Die Hauptdurchmesser der Kegelschnitte sind somit auch Symmetrieachsen. Behufs Bestimmung der Hauptachsen überhaupt, sei α in Fig. 85 derjenige Winkel, den die conjugierten Sehnen (S) eines Hauptdurchmessers (λ) mit der Achse der x bilden, und $d = NO$ die Normaldistanz der Geraden (λ) vom Ursprunge O desjenigen Coordinatensystems, auf welches die Gleichung (340) des Kegelschnittes (U) sich bezieht. Dann wird nach Gl. (24) in § 9 und Gl. (414) in § 70 sowohl

$$(a_{1,1} \cos \alpha + a_{1,2} \sin \alpha)\, x + (a_{1,2} \cos \alpha + a_{2,2} \sin \alpha)\, y + (a_{1,3} \cos \alpha + a_{2,3} \sin \alpha) = o$$

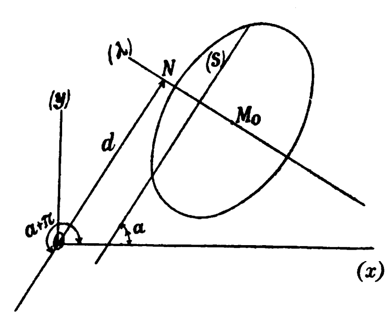


Fig. 85.

als auch

$$x \cos(\pi + \alpha) + y \sin(\pi + \alpha) + d = o$$

die Gleichung von (λ) darstellen, und weil die beiden obigen Gleichungen ein und dasselbe geometrische Äquivalent besitzen, so können deren Gleichungspolynome nur durch einen Factor sich unterscheiden, d. h. es existiert immer ein Factor λ, mit welchem das zweite Gleichungspolynom multipliciert, in das erste übergeht. Nachdem man nun die zweite obiger Gleichungen auch so geben kann

$$(a) \ldots \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = o,$$

so muss nach dem bereits Gesagten

$$(b) \ldots \quad \begin{aligned} a_{1,1} \cos \alpha + a_{1,2} \sin \alpha &= \lambda . \cos \alpha, \\ a_{1,2} \cos \alpha + a_{2,2} \sin \alpha &= \lambda \sin \alpha, \\ a_{1,3} \cos \alpha + a_{2,3} \sin \alpha &= -\lambda d \end{aligned}$$

werden, und aus der dritten dieser drei Relationen folgt zunächst

$$(c) \ldots \quad d = -\frac{a_{1,3} \cos \alpha + a_{2,3} \sin \alpha}{\lambda}.$$

Die Gleichung eines Hauptdurchmessers ist folglich nach (a), (b) und (c):

$$(d) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{a_{1,3} \cos \alpha + a_{2,3} \sin \alpha}{\lambda} = o,$$

wenn die hierin vorkommenden Größen α und λ bestimmt werden aus den beiden ersten der Gleichungen (b) oder den hieraus folgenden

$$(e) \ldots \quad \begin{aligned} (a_{1,1} - \lambda) + a_{1,2} \operatorname{tg} \alpha &= o \\ a_{1,2} + (a_{2,2} - \lambda) \operatorname{tg} \alpha &= o. \end{aligned}$$

Nun folgt aber aus (e) durch die Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$,

$$(f)\ldots\ \lambda^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\,\lambda+(a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}{}^2)=o,$$

und diese Gleichung ist in λ vom zweiten Grade, hat also zwei Wurzeln, und zwar:

$$(422).\quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(a_{1,1}+a_{2,2})+\sqrt{(a_{1,1}-a_{2,2})^2+4\,a_{1,2}{}^2}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{(a_{1,1}+a_{2,2})-\sqrt{(a_{1,1}-a_{2,2})^2+4\,a_{1,2}{}^2}}{2}, \end{aligned}$$

welche beide reell sind, weshalb auch die centralen Kegelschnitte zwei Hauptachsen (λ_1) und (λ_2) besitzen. Die Richtungswinkel α_1 und α_2 der diesen Diametern conjugierten Sehnen können jetzt aus einer der beiden Gleichungen (e) bestimmt werden, wenn man nämlich selbe nach $\operatorname{tg}\alpha$ auflöst und hierauf für λ die obigen Werte substituiert, wodurch man erhält:

$$(423).\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{a_{2,2}-a_{1,1}+\sqrt{(a_{1,1}-a_{2,2})^2+4\,a_{1,2}{}^2}}{2\,a_{1,2}}, \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{a_{2,2}-a_{1,1}-\sqrt{(a_{1,1}-a_{2,2})^2+4\,a_{1,2}{}^2}}{2\,a_{1,2}}, \end{aligned}$$

und weil hieraus folgt: $\operatorname{tg}\alpha_1 \,.\, \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$, so erkennt man den wichtigen

Satz: Die centralen Kegelschnitte haben zwei Hauptachsen oder Symmetrieachsen und dieselben stehen auf einander senkrecht.

Die Gleichungen dieser beiden Hauptachsen selbst sind nun:

$$(424).\quad \begin{aligned} x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+\frac{a_{1,3}\cos\alpha_1+a_{2,3}\sin\alpha_1}{\lambda_1} &= o, \\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2+\frac{a_{1,3}\cos\alpha_2+a_{2,3}\sin\alpha_2}{\lambda_2} &= o, \end{aligned}$$

und die hier vorkommenden Größen α_i und λ_i fließen aus den vorher gefundenen Relationen (422) und (423), und erscheinen somit die Hauptdurchmesser der centralen Kegelschnitte bestimmt.

Nicht ohne Interesse ist hier noch der specielle Fall $a_{1,1}=a_{2,2}$ und $a_{1,2}=o$, wo die Gleichung (340) des Kegelschnittes die Form annimmt:

(425) $U \equiv a_{1,1}(x^2+y^2)+2a_{1,3}x+2a_{2,3}y+a_{3,3}=o.$

Da nämlich hier $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{o}{o}$ wird, so existieren unendlich viele Symmetrieachsen oder ist eine jede durch den Mittelpunkt dieses Kegelschnittes gelegte Gerade ein Hauptdurchmesser. Ferner nimmt die früher in § 68 gegebene Gleichung (404) in diesem speciellen Fall die Gestalt an:

$$(426) \ldots \qquad r = \sqrt{-\frac{A}{a_{1,1}A_{3,3}}},$$

d. h. r ist constant und unabhängig von dem Winkel α, welche Eigenschaft aber bekanntlich nur dem Kreise zukommt, weshalb man zur Erkenntnis gelangt, dass die durch Gleichung (425) gegebene Curve ein Kreis ist, dessen Halbmesser r durch Gleichung (426) bestimmt erscheint, während seine Mittelpunktscoordinaten a und b aus den früher gefundenen Gleichungen (395) hervorgehen, und zwar findet man, wenn man darin $a_{2,2} = a_{1,1}$ und $a_{1,2} = o$ setzt,

$$(427) \ldots \quad a = -\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}, \qquad b = -\frac{a_{2,3}}{a_{1,1}}.$$

Es ist klar, dass der durch Gl. (425) bestimmte Kreis auch imaginär sein kann, und wird noch gleichzeitig darauf hingewiesen, dass die Gl. (426) zur Berechnung des Halbmessers r, sobald man in derselben A und $A_{3,3}$ durch die Coefficienten $a_{i,k}$ ausdrückt, übergeht in

$$(428) \ldots \quad r^2 = \frac{a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 - a_{1,1}a_{3,3}}{a_{1,1}^2}.$$

Hauptachsen der nicht centralen Kegelschnitte. Setzt man in der zweiten der Gleichungen (422) die Wurzelgröße $\lambda_2 = o$, so folgt nach einigen algebraischen Operationen $a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = o$, und weil nach § 66, sobald die drei ersten Coefficienten der Gl. (340) dieser Bedingung genügen, selbe einen Kegelschnitt ohne Centrum darstellt, so verschwindet demnach bei den nicht centralen Kegelschnitten die eine Wurzel λ_2 der Gl. (f), während die andere λ_1 gleich der Summe $a_{1,1}+a_{2,2}$ wird. Was ferner die zur Berechnung von α_1 und α_2 dienenden Gleichungen (423) anbelangt, so vereinfachen auch diese sich bedeutend,

und zwar wird, wenn man in denselben $a_{1,2}{}^2 = a_{1,1}\, a_{2,2}$ setzt, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} = \frac{a_{1,2}{}^2}{a_{1,1}\, a_{1,2}} = \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}} = -\frac{a_{1,2}{}^2}{a_{1,2}\, a_{2,2}} = -\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}$; es ist somit bei den Kegelschnitten ohne Centrum

$$(429)\ldots \quad \lambda_1 = a_{1,1} + a_{2,2} \qquad \lambda_2 = o,$$

$$(430) \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} = \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}} = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}},$$

und weil $\lambda_2 = o$ ist, so liegt nach Gl. (d) die zweite Hauptachse in unendlicher Ferne. Die Kegelschnitte ohne Centrum besitzen demnach bloß eine Hauptachse oder Symmetrieachse.

Gleichung der centralen Kegelschnitte, bezogen auf die Hauptachsen. Die Gleichung des Kegelschnittes

$$(340)\ldots \quad U \equiv a_{1,1}\, x^2 + 2\, a_{1,2}\, x y + a_{2,2}\, y^2 + 2\, a_{1,3}\, x + 2\, a_{2,3}\, y + a_{3,3} = o,$$

bezogen auf ein anderes rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit dem Centrum M_o dieses Kegelschnittes zusammenfällt und dessen Achsen (x') und (y') zu jenen (x) und (y) des ursprünglichen Coordinatensystems, auf welches (340) sich bezieht, parallel gerichtet erscheinen, ist nach § 66:

$$(396)\ldots \quad a_{1,1}\, x'^2 + 2\, a_{1,2}\, x' y' + a_{2,2}\, y'^2 + \frac{A}{A_{3,3}} = o.$$

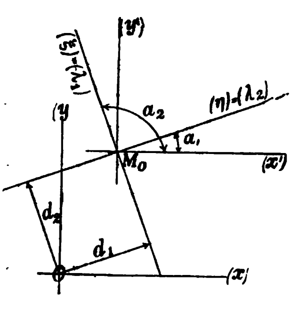


Fig. 86.

Nun kann aber die Gleichung des Kegelschnittes noch weiter vereinfacht werden, sobald man sie auf die beiden Hauptachsen bezieht, und wir wählen deshalb (Fig. 86) die Hauptachsen (λ_1) und (λ_2) des Kegelschnittes als Achsen (ξ) und (η) eines neuen rechtwinkeligen Coordinatensystems. Die diesbezüglichen hier in Anwendung kommenden Transformationsgleichungen sind daher nach § 13, Gl. (72):

$$(g)\ldots \quad x' = \xi \cos\alpha_2 + \eta \cos\alpha_1 \qquad y' = \xi \sin\alpha_2 + \eta \sin\alpha_1,$$

und somit wird zunächst

$$a_{1,1}\,x' + a_{1,2}\,y' = (a_{1,1}\cos\alpha_2 + a_{1,2}\sin\alpha_2)\,\xi + (a_{1,1}\cos\alpha_1 + a_{1,2}\sin\alpha_1)\,\eta,$$
$$a_{1,2}\,x' + a_{2,2}\,y' = (a_{1,2}\cos\alpha_2 + a_{2,2}\sin\alpha_2)\,\xi + (a_{2,2}\cos\alpha_1 + a_{2,2}\sin\alpha_1)\,\eta,$$

oder nach den beiden ersten der Gleichungen (b) dieses Paragraphen, wenn man daselbst einmal $\alpha = \alpha_1$ und $\lambda = \lambda_1$, hierauf $\alpha = \alpha_2$ und $\lambda = \lambda_2$ setzt,

$$(h)\ldots\quad \begin{aligned} a_{1,1}\,x' + a_{1,2}\,y' &= \lambda_2\cos\alpha_2\,\xi + \lambda_1\cos\alpha_1\,\eta, \\ a_{1,2}\,x' + a_{2,2}\,y' &= \lambda_2\sin\alpha_2\,.\,\xi + \lambda_1\sin\alpha_1\,.\,\eta. \end{aligned}$$

Noch besteht aber die Beziehung:

$$a_{1,1}\,x'^2 + 2\,a_{1,2}\,x'\,y' + a_{2,2}\,y'^2 = (a_{1,1}\,x' + a_{1,2}\,y')\,x' + (a_{1,2}\,x' + a_{2,2}\,y')\,y',$$

und aus dieser und den beiden soeben gefundenen Gleichungen (h) folgt demnach, weil $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ ist,

$$a_{1,1}\,x'^2 + 2\,a_{1,2}\,x'\,y' + a_{2,2}\,y'^2 = \lambda_2\,\xi^2 + \lambda_2\,\eta^2.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes $U = o$, bezogen auf seine beiden Hauptachsen als Coordinatenachsen, lautet folglich:

$$(431)\ldots\qquad \lambda_2\,\xi^2 + \lambda_1\,\eta^2 + \frac{A}{A_{3,3}} = o,$$

sobald man darin für die Coefficienten λ_1 und λ_2 die in (422) gegebenen Werte substituiert.

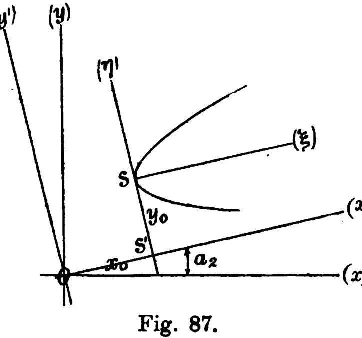


Fig. 87.

Scheitelgleichung der nicht centralen Kegelschnitte. Wir nehmen nun an, dass der durch die Gleichung (340) gegebene Kegelschnitt nicht central ist, in welchem Fall bekanntlich nur eine Hauptachse existiert, und diese wählen wir zur Achse der ξ, dagegen die im Punkte S (Fig. 87), wo die letztere die Curve durchschneidet, auf die (ξ) errichtete Senkrechte zur Achse der η. Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Gleichung des Kegelschnittes $U = o$, bezogen auf das Coordinatensystem von den Achsen (ξ) und (η), d. h. die Scheitelgleichung vorliegender Curve

ausfindig zu machen, und wird hier gleichzeitig bemerkt, dass man jeden Punkt, in welchem der Kegelschnitt von den Hauptachsen geschnitten wird, einen Scheitelpunkt der Curve nennt; es ist daher auch klar, dass hier nur von einem einzigen Scheitelpunkte die Rede sein kann, indem die zweite Hauptachse (λ_2) im Unendlichen liegt und der zweite Schnittpunkt des Kegelschnittes mit der anderen Hauptachse (λ_1) der unendlich ferne Punkt dieser Geraden sein muss. Um aber die hier gestellte Aufgabe zu erleichtern, beziehe man die Gleichung des Kegelschnittes zunächst auf das in Figur 87 noch angegebene Coordinatensystem, dessen Achsen (x') und (y') zu jenen (ξ) und (η) parallel laufen, dessen Ursprung aber in O liegt. Die hier in Anwendung kommenden Transformationsgleichungen sind nun nach § 13, Gl. (76):

$$x = x' \cos \alpha_2 - y' \sin \alpha_2, \qquad y = x' \sin \alpha_2 + y' \cos \alpha_2,$$

oder weil bei den Kegelschnitten ohne Mittelpunkt nach Gl. (430) einfach $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}$ ist,

$$(h) \ldots \quad x = \frac{a_{1,2}\, x' + a_{1,1}\, y'}{\sqrt{a_{1,1}{}^2 + a_{1,2}{}^2}}, \qquad y = \frac{-a_{1,1}\, x' + a_{1,2}\, y'}{\sqrt{a_{1,1}{}^2 + a_{1,2}{}^2}},$$

und damit wird nun, wenn man noch bedenkt, dass bei den Kegelschnitten ohne Mittelpunkt $a_{1,1}\, a_{2,2} = a_{1,2}{}^2$ ist, das Gleichungspolynom

$$a_{1,1}\, x^2 + 2\, a_{1,2}\, x\, y + a_{2,2}\, y^2 + 2\, a_{1,3}\, x + 2\, a_{2,3}\, y + a_{3,3} = b_{2,2}\, y'^2 + 2\, b_{1,3}\, x' + 2\, b_{2,3}\, y' + b_{3,3},$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$b_{2,2} = a_{1,1} + a_{2,2}, \qquad b_{1,3} = \frac{a_{1,2}\, a_{1,3} - a_{1,1}\, a_{2,3}}{\sqrt{a_{1,1}{}^2 + a_{1,2}{}^2}}$$

$$b_{2,3} = \frac{a_{1,1}\, a_{1,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}}{\sqrt{a_{1,1}{}^2 + a_{1,2}{}^2}}, \qquad b_{3,3} = a_{3,3}.$$

Die auf das zweite Coordinatensystem von den Achsen (x') und (y') bezogene Gleichung des Kegelschnittes lautet somit

$$(i) \ldots \quad b_{2,2}\, y'^2 + 2\, b_{1,3}\, x' + 2\, b_{2,3}\, y' + b_{3,3} = o.$$

Jetzt ist es aber auch leicht, die Scheitelgleichung des Kegelschnittes selbst zu finden, und weil die hierzu verwendeten Transformationsformeln sind

$$x' = x_0 + \xi, \qquad y' = y_0 + \eta,$$

wenn x_0, y_0 die noch zu bestimmenden Coordinaten des Scheitelpunktes S, bezogen auf das Coordinatensystem von den Achsen (x') und (y') repräsentieren, so lautet diese Gleichung, nachdem aus nahe liegenden Gründen offenbar $b_{2,2}\, y_0^2 + 2\, b_{1,3}\, x_0 + 2\, b_{2,3}\, y_0 + b_{3,3} = o$ sein muss,

$$b_{2,2}\, \eta^2 + 2\,(b_{2,2}\, y_0 + b_{2,3})\, \eta + 2\, b_{1,3}\, \xi = o.$$

Nun ist aber die Achse der ξ eine Symmetrieachse der Curve und deshalb müssen einem jeden Werte von ξ zwei Werte von η entsprechen, die einander entgegengesetzt gleich sind, was $b_{2,2}\, y_0 + b_{2,3} = o$, oder

$$(k)\,..\quad y_0 = -\frac{b_{2,3}}{b_{2,2}} = -\frac{a_{1,1}\, a_{1,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}}{(a_{1,1} + a_{2,2})\sqrt{a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2}}$$

bedingt. Die Scheitelgleichung der nicht centralen Kegelschnitte ist mithin:

$$(432)\,...\qquad \eta^2 = \pm p \cdot \xi,$$

wenn noch $\pm p = -2\frac{b_{1,3}}{b_{2,2}}$, oder

$$(433)\,..\quad \pm p = -2\,\frac{a_{1,2}\, a_{1,3} - a_{1,1}\, a_{2,3}}{(a_{1,1} + a_{2,2})\sqrt{a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2}}$$

gesetzt wird, und es ist in den beiden letzten Gleichungen das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem der rechts vom Gleichheitszeichen in (433) vorkommende Ausdruck positiv oder negativ erscheint.

§ 73. Classification der Kegelschnitte.

Die in § 66 angestellten Betrachtungen haben gezeigt, dass sämmtliche Kegelschnitte oder Curven 2. Ordnung in zwei Gruppen zusammengefasst werden können, u. zw. in Kegelschnitte mit einem Mittelpunkte und in solche, welche kein Centrum besitzen. Bei den ersteren ist bekanntlich $A_{3,3} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}^2$ von null verschieden, bei den letzteren aber diese Größe gleich null. Wir betrachten nun zunächst die centralen Kegelschnitte und machen demgemäß die Annahme, dass in der Gl. (340) die Coefficienten $a_{i,k}$ der Bedingung genügen

$$A_{3,3} \gtrless o,$$

in welchem Fall diese Gleichung, wenn man sie auf die beiden Hauptachsen des betreffenden Kegelschnittes bezieht, zufolge § 72, Gl. (431), die Form annimmt:

$$(a) \ldots \quad \frac{\xi^2}{-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}}} + \frac{\eta^2}{-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}}} - 1 = o,$$

sobald λ_1 und λ_2 die in den Gleichungen (422) gegebenen Werte besitzen und A wieder die Discriminante des Gleichungspolynoms von (340) repräsentiert. Es wird hier ausdrücklich noch einmal bemerkt, dass die Discriminante A nur dann gleich null wird, sobald das geometrische Äquivalent der Gleichung (340), nämlich $U \equiv a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} x y + a_{2,2} y^2 + 2 a_{1,3} x + 2 a_{2,3} y + a_{3,3} = o$, ein Geradenpaar oder eine degenerierte Curve 2. Ordnung ist, während bei den eigentlichen Curven 2. Ordnung die Größe A stets von null verschieden erscheint.

Diejenigen Punkte, in welchen der Kegelschnitt von seinen Hauptachsen geschnitten wird, heißen die Scheitelpunkte oder Scheitel desselben, und weil bei den centralen Kegelschnitten keine der beiden Hauptachsen mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, so haben diese Kegelschnitte vier Scheitelpunkte oder zwei Scheitelpaare, mit deren Auffindung wir uns nun zunächst zu beschäftigen haben. Zu diesem Zwecke setze man in obiger Gleichung (a), im Sinne der eben gegebenen Definition der Scheitelpunkte, $\eta = o$ und bestimme ξ, hierauf setze man in derselben Gleichung $\xi = o$ und berechne η, wodurch man erhält:

$$\xi = \pm\sqrt{-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}}}, \qquad \eta = \pm\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}}};$$

es ist daher, wenn die in der einen Hauptachse (ξ) liegenden Scheitelpunkte der Curve mit A_1 und A_2, die in der anderen Hauptachse (η) befindlichen Scheitelpunkte aber mit B_1 und B_2 bezeichnet werden,

$$(b) \ldots \quad \begin{aligned} O A_1 &= \sqrt{-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}}}, \quad & O A_2 &= -\sqrt{-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}}}, \\ O B_1 &= \sqrt{-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}}}, \quad & O B_2 &= -\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}}}, \end{aligned}$$

sobald noch O das Centrum des Kegelschnittes angibt.

Ist $-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}} > o$ und $-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} > o$, so sind beide Scheitelpaare reell und heißt dann der centrale Kegelschnitt eine Ellipse. Selbstverständlich ist es jetzt auch gestattet

$$(c)\ldots \qquad -\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}} = a^2, \qquad -\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} = b^2$$

zu setzen, wodurch die Gleichung (a) übergeht in die folgende

$$(434)\ldots \qquad E \equiv \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = o,$$

welche gleichzeitig die Gleichung der Ellipse in der Normalform darstellt. Die hier vorkommenden Größen a und b sind nach den Gleichungen (b) und (c) dieses Paragraphen definiert durch $OA_1 = -OA_2 = a$ und $OB_1 = -OB_2 = b$, und man nennt $A_2A_1 = 2a$ und $B_2B_1 = 2b$ die beiden Achsen der Ellipse, u. zw. sobald angenommen wird, dass $a > b$ ist, $2a$ die große, dagegen $2b$ die kleine Achse vorliegender Curve. Löst man die obige Gleichung nach η auf, so erhält man $\eta = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2}$ und erkennt hieraus, dass η nur dann reell erscheint, sobald ξ der Bedingung genügt $-a \lesseqgtr \xi \lesseqgtr a$, während für alle übrigen Werte von ξ die Ordinate η imaginär ausfällt; ebenso zeigt die Auflösung derselben Gleichung nach ξ, nämlich $\xi = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \eta^2}$, dass ξ reell erscheint, sobald $-b \lesseqgtr \eta \lesseqgtr b$ ist. Kaum nöthig ist die Bemerkung, dass für $\xi = \pm a$, $\eta = o$ und für $\eta = \pm b$, $\xi = o$ wird. Es liegt somit kein Punkt der Ellipse außerhalb desjenigen Rechteckes, welches gebildet wird von den durch die vier Punkte A_1, A_2 und B_1, B_2 zu den beiden Hauptachsen (η) und (ξ) gezogenen Parallelen. Hingegen entsprechen jedem Werte von ξ, welcher numerisch nicht größer ist als a, zwei reelle und einander entgegengesetzt gleiche Werte von η, welche numerisch abnehmen, wenn ξ numerisch zunimmt, weshalb die vorliegende Curve (Siehe Fig. 88) eine geschlossene ist. Ihren numerisch größten Wert erreicht die Ordinate η für $\xi = o$, ihren numerisch kleinsten aber für $\xi = \pm a$.

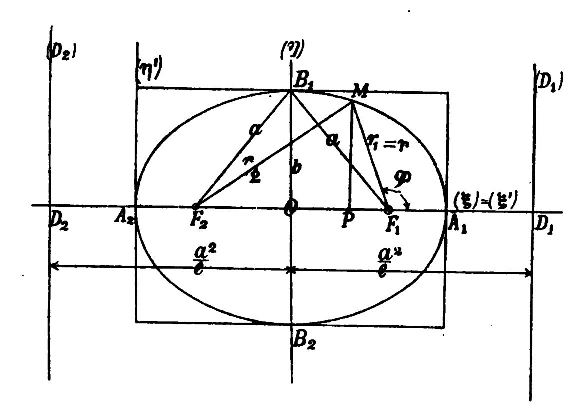


Fig. 88.

In dem speciellen Fall, wo $\lambda_1 = \lambda_2$, somit auch $a = b$ wird, geht die Gl. (434) über in

$$(434a)\ldots \quad K \equiv \xi^2 + \eta^2 - a^2 = o$$

und bestimmt dann einen Kreis vom Halbmesser a und Centrum O. Der Kreis ist sonach ein specieller Fall der Ellipse.

Erscheint $-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} > o$ und $-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} < o$, so wird nur das in der Achse der ξ liegende Scheitelpaar A_1, A_2 reell, dagegen das andere in (η) liegende imaginär und heißt dann der centrale Kegelschnitt eine Hyperbel. Man setze nun im Sinne dieser Annahme

$$(d)\ldots \quad -\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}} = a^2, \qquad \frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} = b^2,$$

wodurch die frühere Gleichung (a) die Gestalt annimmt

$$(435)\ldots \quad H \equiv \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = o,$$

und erhält so die Gleichung der Hyperbel in der Normalform. Aus dieser Gleichung findet man sofort, sobald man sie nach η, beziehungsweise ξ, auflöst, $\eta = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\xi^2 - a^2}$, $\xi = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \eta^2}$ und erkennt hieraus, dass η bloß für solche Werte von ξ reell erscheint, die der Bedingung genügen $-a \geqq \xi \geqq a$, während ξ für jeden reellen Wert von η

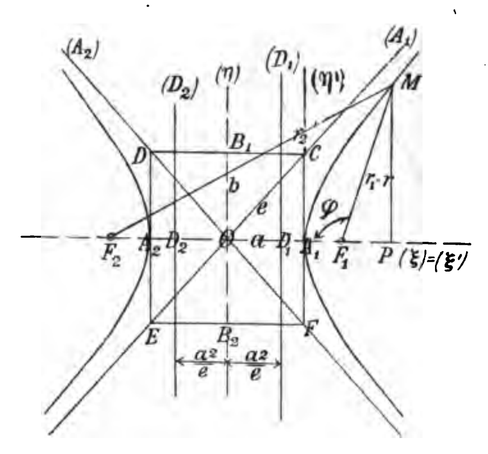


Fig. 89.

reell wird; ferner ist noch insbesondere für $\xi = \pm a$, $\eta = o$. Damit ist aber auch gleichzeitig wieder a definiert, u. zw. ist $OA_1 = -OA_2 = a$, oder $A_2A_1 = 2a$, sowie der Beweis erbracht, dass kein Punkt der Hyperbel zwischen den beiden Geraden liegt, die durch die Scheitelpunkte A_1 und A_2, parallel zur Achse der η, gelegt werden können. Endlich zeigt die erste der beiden letzten Gleichungen, dass für ξ reell und numerisch größer als a, die Ordinate η mit ξ fortwährend zunimmt und jedem solchen Werte von ξ zwei reelle Werte von η angehören, die einander entgegengesetzt gleich erscheinen. Die durch die Gleichung (435) gegebene Curve (Siehe Fig. 89) besteht demnach aus zwei getrennten Ästen, die symmetrisch zu beiden Seiten der Achse der η liegen und zu beiden Seiten der Achse der ξ ins Unendliche sich erstrecken. Die durch die reellen Scheitelpunkte A_1 und A_2 begrenzte Strecke $A_2A_1 = 2a$ heißt die reelle Achse der Hyperbel, während man, der Analogie mit der Ellipse zufolge, die Strecke $2b$ die imaginäre Achse vorliegender Curve nennt. Es ist klar, dass die Gleichung (434) in jene (435) sofort übergeht, sobald man in der ersteren b durch $b\sqrt{-1}$ ersetzt. In Figur 89 ist $OB_1 = -OB_2 = b$ und daher repräsentieren auch die Diagonalen (A_1) und (A_2) des über die Achsen $2a$ und $2b$ verzeichneten Rechtecks $CDEF$ nach § 69 die beiden

Asymptoten der Hyperbel. Ist $\lambda_2 = -\lambda_1$, so wird $a = b$ und heißt dann die Hyperbel eine gleichseitige.

Für $-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}} < o$ und $-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} > o$ ist das in der Achse der η liegende Scheitelpaar reell, das andere in (ξ) liegende aber imaginär. Die Curve ist selbstverständlich auch hier wieder eine Hyperbel, deren reelle Achse aber diesmal auf der (η) liegt.

Wird endlich $-\frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}} < o$ und $-\frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} < o$, so setze man diesmal

$$(e) \ldots \quad \frac{A}{\lambda_2 A_{3,3}} = a^2, \qquad \frac{A}{\lambda_1 A_{3,3}} = b^2$$

und erhält dann aus der früheren Gleichung

$$(436) \ldots \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + 1 = o.$$

Es ist klar, dass die eben gefundene Gleichung für kein reelles Wertesysten von ξ und η befriedigt werden kann, weshalb auch ihr geometrisches Äquivalent keine reelle Curve sein wird. Man nennt deshalb die durch die letzte Gleichung bestimmte Curve die imaginäre Ellipse, und ist also (436) die Gleichung der imaginären Ellipse in der Normalform. Damit erscheinen nun alle eigentlichen Curven 2. Ordnung, welche einen Mittelpunkt besitzen, vorgeführt, und beschäftigen wir uns zum Schlusse noch mit dem speciellen Fall, wo $A = o$, aber noch immer $A_{3,3}$ von null verschieden ist. Selbstverständlich nimmt dann die in § 72 gefundene Gleichung (431) der Centralkegelschnitte die Form an

$$\lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \eta^2 = o,$$

welche Gleichung in die beiden linearen Gleichungen $\eta = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \xi$ zerfällt und somit ein Geradenpaar darstellt, welches reell oder imaginär erscheint, je nachdem der Bruch $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ negativ oder positiv ist.

Übergehend auf die nicht centralen Kegelschnitte, wird zunächst bemerkt, dass bei denselben

$$A_{3,3} = o$$

ist und die Gleichung derselben nach § 72 stets auf eine der beiden Formen gebracht werden kann:

$$(437) \ldots \qquad P = \frac{\eta^2}{p} \mp \xi = o.$$

Diese Gleichung liefert, wenn das obere Zeichen in Kraft tritt, nur dann reelle Werte von η, wenn ξ reell und positiv ist; tritt dagegen das untere Zeichen in Kraft, so wird η bloß für negative Werte von ξ reell. Ferner wird für $\xi = o$ ebenfalls $\eta = o$ und für $\xi = \infty$, beziehungsweise $\xi = -\infty$, auch η unendlich groß. Dass ferner jedem Werte von ξ zwei Werte von η entsprechen, die einander entgegengesetzt gleich erscheinen, ist für sich klar. Die Curve $\frac{\eta^2}{p} - \xi = o$ hat somit die in Figur 90 angegebene Gestalt und heißt Parabel, während (437) die Gleichung der Parabel in der Normalform ist. Für $\frac{\eta^2}{p} + \xi = o$ liegt die Parabel auf der anderen Seite der (η). Der Punkt O, in welchem die Curve von ihrem Hauptdurchmesser (ξ) geschnitten wird, heißt der Scheitel, der Hauptdurchmesser die Achse und die Constante p der Parameter der Parabel. Es muss noch bemerkt werden, dass auch p eine geometrische Bedeutung hat, auf die wir in einem der nächsten Paragraphen zurückkommen werden.

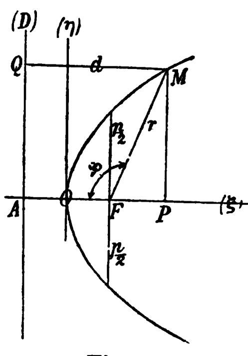


Fig. 90.

§ 74. Kriterium zur näheren Bestimmung der durch die Gleichungen (340), respective (341), dargestellten Curven.

Die in dem vorigen Paragraphen vorgeführten Untersuchungen ermöglichen es nun, sofort zu entscheiden, welche Curve 2. Ordnung durch die Gleichung (340), nämlich $U \equiv a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} xy + \ldots + a_{3,3} = o$, dargestellt wird, wenn die darin vorkommenden Coefficienten $a_{i,k}$ bestimmte Werte besitzen. Man berechne nämlich zuerst die Discriminante A des Gleichungspolynoms und die Größe $A_{3,3} =$

$a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}{}^2$ und sehe, ob A und $A_{3,3}$ von null verschieden sind oder nicht. Findet nun ersteres statt, so ist das geometrische Äquivalent vorliegender Gleichung eine eigentliche Curve 2. Ordnung mit einem Mittelpunkte, nämlich eine Ellipse oder Hyperbel, und hat man sonach nur mehr zu entscheiden, welche von den letzteren durch die Gleichung $U = o$ dargestellt wird. Die Betrachtungen im letzten Paragraphen haben aber gezeigt, dass bei der Ellipse, gleichgiltig ob diese reell oder imaginär erscheint, die Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gl. (f) in § 72 einerlei Vorzeichen besitzen müssen, während bei der Hyperbel das Gegentheil einzutreten hat. Nun haben aber, wie die Gleichung (f) erkennen lässt, λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen, sobald $a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{12}{}^2 = A_{3,3}$ positiv ausfällt, während umgekehrt $A_{3,3}$ negativ sein muss, wenn λ_1 und λ_2 entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, und deshalb gelangt man zur Erkenntnis, dass für die Ellipse

$$A \gtrless o \qquad \text{und } A_{3,3} = a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}{}^2 > o,$$

dagegen für die Hyperbel

$$A \gtrless o \qquad \text{und } A_{3,3} = a_{1,1}\,a_{22} - a_{1,2}{}^2 < o$$

sein müssen. Ist in dem ersten Fall noch überdies $\lambda_1 = \lambda_2$, was bekanntlich — Siehe Gl. (f) in § 72 — $a_{1,1} = a_{2,2}$ und $a_{1,2} = o$ bedingt, so ist die durch $U = o$ gegebene Curve ein Kreis, während in dem zweiten Fall für $\lambda_1 = -\lambda_2$ oder $\lambda_1 + \lambda_2 = o$, was nach Gl. (f) in § 72 dann zutrifft, wenn $a_{1,1} + a_{2,2} = o$ ist, die Gleichung $U = o$ eine gleichseitige Hyperbel darstellt. Damit sind aber auch alle Curven in Betracht gezogen, die in der Gleichung (340) enthalten seinen können, sobald A und $A_{3,3}$ gleichzeitig von null verschieden erscheinen.

Ist $A = o$, $A_{3,3}$ aber noch immer von null verschieden, so ist das geometrische Äquivalent der Gleichung $U = o$ ein Geradenpaar, welches reell oder imaginär erscheint, je nachdem die Wurzeln λ_1 und λ_2 entgegengesetzte Vorzeichen besitzen oder nicht, d. h. nach Gl. (f) in § 72, $A_{3,3}$ negativ oder positiv ausfällt. Für das reelle Geradenpaar muss somit

$$A = o \quad \text{und} \quad A_{3,3} = a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}{}^2 < o,$$

für das imaginäre Geradenpaar aber

$$A = o \quad \text{und} \quad A_{3,3} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}{}^2 > o$$

werden.

Wird aber die Discriminante A nicht gleich null, dafür $A_{3,3} = o$, so ist die durch Gl. $U = o$ gegebene Curve eine Parabel; man hat sonach für die Parabel

$$A \gtrless o \quad \text{und} \quad A_{3,3} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}{}^2 = o.$$

Zum Schlusse müssen wir uns noch mit jenen Fällen beschäftigen, wo die Gl. $U = o$ zwei zu einander parallele Geraden oder eine Doppelgerade darstellt. Darüber wurde aber bereits in § 66 gesprochen und dort gezeigt, dass $U = o$ dann zwei parallele Strahlen repräsentiert, wenn

$$A_{3,1} = A_{3,2} = A_{3,3} = o$$

ist, dagegen ist das geometrische Äquivalent dieser Gleichung eine Doppelgerade, wenn überdies auch

$$A_{1,1} = A_{2,2} = o$$

wird. Dass in beiden Fällen die Discriminante $A = o$ werden muss, ist selbstverständlich und folgt auch noch aus der bekannten Relation: $A = a_{3,1}\, A_{3,1} + a_{3,2}\, A_{3,2} + a_{3,3}\, A_{3,3}$.

Man ist sonach im Stande sofort anzugeben, welche Curve 2. Ordnung durch die Gleichung (340) dargestellt wird, sobald die Coefficienten $a_{i,k}$ dieser Gleichung bestimmte Werte besitzen, und beschäftigen wir uns jetzt noch in gleicher Weise mit der zweiten Gleichung (341), nämlich mit $\Sigma \equiv \alpha_{1,1} \cdot u^2 + 2\, \alpha_{1,2}\, u\, v + \ldots + \alpha_{3,3} = o$. In dieser Gleichung sind bekanntlich alle Curven 2. Classe enthalten, und weil nach § 59 alle eigentlichen Curven 2. Classe gleichzeitig Curven 2. Ordnung sind, so ist das geometrische Äquivalent der Gleichung $\Sigma = o$ ebenfalls eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, sobald noch die Discriminante E des Gleichungspolynoms Σ von null verschieden erscheint; dagegen repräsentiert für $E = o$ die Gleichung $\Sigma = o$ ein Punktpaar oder eine degenerierte Curve 2. Classe.

Erscheint nun die Discriminante E von null verschieden, so lautet nach § 59 die reciproke Gleichung von (341)

$$E_{1,1}\, x^2 + 2\, E_{1,2}\, x\, y + E_{2,2}\, y^2 + 2\, E_{1,3}\, x + 2\, E_{2,3}\, y + E_{3,3} = o,$$

und weil das Binom

$$E_{1,1} E_{2,2} - E_{1,2}^2 = (\alpha_{2,2} \alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}^2)(\alpha_{1,1} \alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}^2) - (\alpha_{1,3} \alpha_{2,3} - \alpha_{1,2} \alpha_{3,3})^2 = \alpha_{3,3} . E$$

wird, so ist nach den vorangegangenen Betrachtungen für die Ellipse

$$\alpha_{3,3} . E > o,$$

für die Hyperbel

$$\alpha_{3,3} . E < o,$$

und repräsentiert in dem ersten Fall die Gleichung $\Sigma = o$ einen Kreis, wenn $E_{1,1} = E_{2,2}$ und $E_{1,2} = o$, also $\alpha_{2,2} \alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}^2 = \alpha_{1,1} \alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}^2$ und $\alpha_{1,3} \alpha_{2,3} - \alpha_{1,2} \alpha_{3,3} = o$ wird, in dem zweiten Fall eine gleichseitige Hyperbel, wenn $E_{1,1} + E_{2,2} = o$, d. h. $\alpha_{2,2} \alpha_{3,3} + \alpha_{1,1} \alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}^2 - \alpha_{2,3}^2 = o$ ist. Für die Parabel muss aus nahe liegenden Gründen das Product $\alpha_{3,3} . E = o$ sein, und nachdem bei den eigentlichen Curven 2. Classe die Discriminante E nicht gleich null sein darf, so ist somit für die Parabel

$$\alpha_{3,3} = o.$$

Verschwindet jedoch die Discriminante E, so ist das geometrische Äquivalent der Gleichung $\Sigma = o$ nach § 57 ein Punktpaar, dessen Elemente zusammenfallen, wenn noch überdies

$$E_{1,1} = E_{2,2} = E_{3,3} = o$$

wird.

Zusatz: Es erscheint nicht uninteressant zu untersuchen, wann die Gleichung (340), nämlich $a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} x y + \ldots\ldots + a_{3,3} = o$, eine gleichseitige Hyperbel oder einen Kreis darstellt, wenn diesmal diese Gleichung auf ein schiefwinkeliges Parallel-Coordinatensystem sich bezieht.

Diese Frage kann mit Zuhilfenahme des in diesem Paragraphen bereits Gesagten leicht beantwortet werden, sobald man obige Gleichung auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem transformiert. Zu diesem Zwecke seien (x') und (y') die beiden Achsen eines solchen Coordinatensystems, dessen Ursprung noch überdies mit dem Ursprunge des schiefwinkeligen Coordinatensystems zusammenfallen soll, und $(x', x) = \alpha$, $(x', y) = \beta$ die Winkel, welche die Achse (x') des neuen Coordinatensystems mit den Achsen (x) und

(y) des alten bildet. Nach § 13, Fall 2, bestehen jetzt zwischen x, y und x', y' die Beziehungen:

$$x = \frac{x' \sin\beta - y' \cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \qquad y = \frac{y' \cos\alpha - x' \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)},$$

und mittelst diesen findet man nach einigen sehr leichten algebraischen Operationen $a_{1,1}{}^2 + 2\, a_{1,2}\, x\, y + a_{2,2}\, y^2 = a_{1,1}'\, x'^2 + 2\, a_{1,2}'\, x'\, y' + a_{2,2}'\, y'^2$, wenn die rechts vom Gleichheitszeichen vorkommenden Coefficienten $a_{i,k}'$ definiert erscheinen durch

$$a_{1,1}' = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(a_{1,1} \sin^2\beta - 2\, a_{1,2} \sin\alpha \sin\beta + a_{2,2} \sin^2\alpha\right),$$

$$a_{2,2}' = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(a_{1,1} \cos^2\beta - 2\, a_{1,2} \cos\alpha \cos\beta + a_{2,2} \cos^2\alpha\right),$$

$$a_{1,2}' = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(a_{1,2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} a_{1,1} \sin(2\beta) - \frac{1}{2} a_{2,2} \sin(2\alpha)\right)$$

und φ den Coordinatenwinkel $(x, y) = \beta - \alpha$ bezeichnet. Nun muss bei dem Kreise, wie soeben gefunden wurde, $a_{1,1}' = a_{2,2}'$ und $a_{1,2}' = o$ werden, und aus diesen beiden Relationen ergibt sich, wenn man noch für die Coefficienten $a_{i,k}$ die oben gegebenen Werte substituiert,

$$a_{1,1} \cos(2\beta) + a_{2,2} \cos(2\alpha) = 2\, a_{1,2} \cos(\alpha + \beta)$$
$$a_{1,1} \sin(2\beta) + a_{2,2} \sin(2\alpha) = 2\, a_{1,2} \sin(\alpha + \beta)$$

und hieraus wieder

$$a_{1,1} = a_{2,2}$$

als Bedingung, damit das geometrische Äquivalent der Gleichung (340) ein Kreis ist. Für die gleichseitige Hyperbel hat dagegen $a_{1,1}' + a_{2,2}' = o$ zu sein, und aus diesen Gleichungen findet man nach erfolgter Substitution der eben gefundenen Werte von $a_{1,1}'$ und $a_{2,2}'$

$$a_{1,1} + a_{2,2} - 2\, a_{1,2} \cos\varphi = o,$$

womit die hier gestellte Aufgabe gelöst erscheint.

Man kann übrigens auch leicht die Größe $A_{3,3}' = a_{1,1}'\, a_{2,2}' - a_{1,2}'^2$ aus den Coefficienten $a_{i,k}$ berechnen und dadurch entscheiden, wann die Gleichung (340) überhaupt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, wenn dieser Gleichung ein schiefwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde liegt. Durch eine einfache Rechnungsoperation

erhält man nämlich, sobald man für $a_{1,1}'$, $a_{2,2}'$, und $a_{1,2}'$ die früheren Werte benützt,

$$A_{3,3}' = \frac{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}^{\,2}}{\sin^2\varphi},$$

und ist somit das geometrische Äquivalent der Gl. (340) eine Ellipse, Hyperbel und Parabel, je nachdem das Binom $a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}^{\,2}$ positiv, negativ oder gleich null wird.

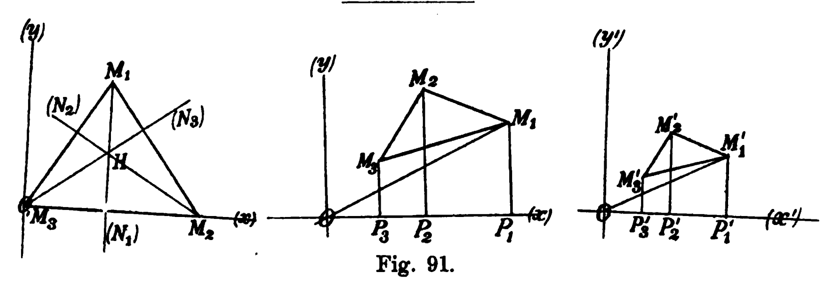


Fig. 91.

Im Anschlusse mag noch der nachfolgende Satz bewiesen werden, u. zw.: Jede durch drei Punkte M_1, M_2 und M_3 gelegte gleichseitige Hyperbel geht durch den Höhenpunkt des durch diese drei Punkte gegebenen Dreiecks und der Mittelpunkt dieser Hyperbel befindet sich auf einem Kreise, welcher die drei Seiten obigen Dreiecks halbiert.

Um diesen Satz zu beweisen, wähle man das Coordinatensystem, welches jetzt wieder ein rechtwinkeliges sein soll, der Art, dass sein Ursprung O (Fig. 91) mit der einen Ecke M_3 zusammenfällt und die Achse der x durch die Ecke M_2 des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ geht. Nachdem nun bei der gleichseitigen Hyperbel die Coefficienten von x^2 und y^2 einander entgegengesetzt gleich erscheinen, sind alle durch den Ursprung O oder die Ecke M_3 gehenden Kegelschnitte dieser Art enthalten in der Gleichung

$$x^2 - y^2 + 2\,a_{1,2}\, x\, y + 2\,a_{1,3}\, x + 2\,a_{2,3}\, y = o.$$

Nun muss aber die Curve noch die Punkte M_1 und M_2 enthalten, weshalb die in obiger Gleichung vorkommenden Coefficienten $a_{i,k}$ den beiden Bedingungen genügen müssen:

$$x_2^{\,2} + 2\,a_{1,3}\, x_2 = o,$$
$$(x_1^{\,2} - y_1^{\,2}) + 2\,a_{1,2}\, x_1\, y_1 + 2\,a_{1,3}\, x_1 + 2\,a_{2,3}\, y_1 = o,$$

und aus diesen drei Gleichungen ergibt sich durch die Elimination der Coefficienten $a_{1,3}$ und $a_{2,3}$

$$(a)\ldots \quad \begin{aligned} & x^2 - y^2 + 2\,a_{1,2}\,x\,y - x_2\,x + \\ & \left(y_1 - \frac{x_1^{\,2}}{y_1} + \frac{x_1\,x_2}{y_1} - 2\,a_{1,2}\,x_1\right) y = o. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung, in welcher $a_{i,k}$ ein veränderlicher Parameter ist, bestimmt alle gleichseitigen Hyperbeln, welche durch die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 gelegt werden können. Sie wird befriedigt für $x = x_1$ und $y = \frac{x_2 - x_1}{y_1} . x_1$, und weil diese Coordinatenwerte dem Höhenpunkte H des Dreiecks $M_1\,M_2\,M_3$ angehören, so erscheint constatiert, dass alle durch die Punkte M_1, M_2 und M_3 gelegten gleichseitigen Hyperbeln durch den Höhenpunkt H des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ gehen, womit der erste Theil des vorliegenden Satzes erwiesen erscheint. Übergehend auf den zweiten Theil dieses Satzes, bestimme man vorerst die Coordination des Mittelpunktes der durch die Gleichung (a) dargestellten Curve 2. Ordnung. Nach § 66, Gl. (397) ergeben sich nun die fraglichen Coordinaten aus:

$$x + a_{1,2}\,y - \frac{x_2}{2} = o,$$

$$\frac{1}{2}\left(y_1 - \frac{x_1^{\,2}}{y_1}\right) + \frac{x_1\,x_2}{2\,y_1} - y + a_{1,2}\,(x - x_1) = o,$$

und aus diesen folgt durch die Elimination des veränderlichen Parameters $a_{1,2}$:

$$(b)\ldots \quad \begin{aligned} & x^2 + y^2 - \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right) x - \\ & \frac{1}{2}\left(y_1 - \frac{x_1^{\,2}}{y_1} + \frac{x_1\,x_2}{y_1}\right) y + \frac{x_1\,x_2}{2} = o \end{aligned}$$

als Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller dem Dreieck $M_1\,M_2\,M_3$ umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Diese Gleichung bestimmt aber einen Kreis und wird befriedigt für $x = \frac{x_2}{2}$ und $y = o$, $x = \frac{x_1}{2}$ und $y = \frac{y_1}{2}$, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ und $y = \frac{y_1}{2}$, weshalb dieser Kreis

die drei Seiten des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ halbiert. Man nennt noch obigen Kreis den Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$.

§ 75. Brennpunkte der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Zurückkehrend zu der früher gegebenen Figur 88, seien daselbst F_1 und F_2 zwei in der großen Achse der Ellipse angenommene feste Punkte, welche in Bezug auf den Mittelpunkt O dieser Curve symmetrisch liegen und von O um $OF_1 = e$ und $OF_2 = -e$ abstehen, wenn noch e der Relation unterliegt:

$$(a) \ldots \qquad e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Entfernungen $r_1 = F_1 M$ und $r_2 = F_2 M$ irgend eines Punktes M der Ellipse von den beiden festen Punkten F_1 und F_2 resultieren nun aus den Gleichungen $r_1{}^2 = \eta^2 + (e - \xi)^2$ und $r_2{}^2 = \eta^2 + (e + \xi)^2$, wenn ξ, η die Coordinaten des Curvenpunktes M repräsentieren, oder weil bei der Ellipse $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi^2)$ ist, aus:

$$r_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi^2) + (e - \xi)^2,$$

$$r_2{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi^2) + (e + \xi)^2,$$

und hieraus ergibt sich, wenn man noch im Sinne der Gleichung (a) $b^2 = a^2 - e^2$ und überdies $\varepsilon = \frac{e}{a}$ setzt, wobei ε eine Zahl bedeutet, die zwischen o und 1 liegt,

$$(b) \ldots \quad r_1 = a - \varepsilon . \xi, \qquad r_2 = a + \varepsilon . \xi$$

und sonach

$$(c) \ldots \qquad r_1 + r_2 = 2\,a.$$

Es hat demnach die Ellipse die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen irgend eines ihrer Punkte von zwei festen Punkten constant und gleich ist der großen Achse $2\,a$ dieser Curve. Man nennt nun die beiden festen Punkte F_1 und F_2 die Brennpunkte und ihre Entfernung e vom Mittelpunkte O die lineare Excentricität der Ellipse, während der Quotient $\varepsilon = \frac{e}{a}$ die

numerische Excentricität der letzteren heißt. Ferner werden noch $F_1 M$ und $F_2 M$ die Leitstrahlen oder Brennstrahlen des Punktes M genannt. Es ist klar, dass bei dem Kreise F_1 und F_2 mit O zusammenfallen, mithin $e = o$ und $\varepsilon = o$ werden.

Eine ganz analoge Betrachtung lässt sich nun auch bei der Hyperbel anstellen, sobald man daselbst in der reellen Achse (Fig. 89) zwei feste Punkte F_1 und F_2 annimmt, welche ebenfalls symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes O der Curve liegen, und von O um $OF_1 = -OF_2 = e$ entfernt sind, wobei jedoch e diesmal folgt aus

$$(d) \quad . \quad . \quad . \qquad e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Die Entfernungen $r_1 = F_1 M$ und $r_2 = F_2 M$ des Curvenpunktes M von den beiden festen Punkten F_1 und F_2 erhält man daher in dem vorliegenden Fall, weil bei der Hyperbel $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - a^2)$ ist, aus den beiden Gleichungen

$$r_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - a^2) + (e - \xi)^2,$$

$$r_2{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - a^2) + (e + \xi)^2,$$

und aus diesen folgt, wenn man im Sinne der Gl. (d) $b^2 = e^2 - a^2$ und dann wieder $\varepsilon = \frac{e}{a}$ setzt, wobei diesmal ε eine Zahl repräsentiert, die größer als die Einheit ist,

$$(e) \quad . \quad r_1 = \varepsilon . \xi - a \qquad r_2 = a + \varepsilon \xi,$$

mithin

$$(f) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad r_2 - r_1 = 2a.$$

Die Hyperbel hat folglich die Eigenschaft, dass die Differenz der Entfernungen irgend eines Punktes von zwei festen Punkten constant und gleich ihrer reellen Achse $2a$ ist. Auch hier nennt man wieder F_1 und F_2 die Brennpunkte, $e = OF_1 = -OF_2$ die lineare und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ die numerische Excentricität der Hyperbel, sowie $F_1 M$ und $F_2 M$ die beiden Leitstrahlen oder Brennstrahlen des Punktes M. Es ist sonach bei der Ellipse $\varepsilon < +1$, bei der Hyperbel $\varepsilon > +1$

und bei dem Kreise $\varepsilon = o$. Wir gelangen folglich zu den beiden nachfolgenden **Sätzen**, u. zw.:

Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist constant und gleich der großen Achse $2a$,	Die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Hyperbel ist constant und gleich der reellen Achse $2a$,

und diese Sätze bieten zugleich die Möglichkeit, die Ellipse oder Hyperbel zu construieren, wenn die beiden Halbachsen a und b oder die Halbachse a und die lineare Excentricität e gegeben erscheinen.

Um endlich auch die Parabel in Betracht zu ziehen, sei F (Figur 90) ein in der Achse dieser Curve liegender und vom Scheitel O um die Strecke $OF = \frac{p}{4}$ abstehender fester Punkt und (D) eine feste Gerade, welche im Abstande $OA = -\frac{p}{4}$ parallel gerichtet ist zur Achse der η oder senkrecht steht auf der Achse der Parabel. Nennt man noch $d = QM$ und $r = FM$ die Entfernungen des Curvenpunktes M von der Geraden (D) und dem Punkte F, so ist, wenn ξ, η die Coordinaten von M bedeuten, wegen $\eta^2 = p\xi$

$$(g) \quad . \qquad d = \frac{p}{4} + \xi, \qquad r = \sqrt{\eta^2 + \left(\xi - \frac{p}{4}\right)^2} = \sqrt{p\xi + \left(\xi - \frac{p}{4}\right)^2} = \xi + \frac{p}{4}$$

und somit

$$(h) \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad d = r,$$

d. h. der Punkt M steht von (D) und F gleichweit ab. Man nennt nun den festen Punkt F wieder den Brennpunkt, die feste Gerade (D) aber die Leitlinie oder Directrix der Parabel und erhält sonach den

Satz: Bei der Parabel sind die Entfernungen irgend eines Punktes von dem Brennpunkte und der Leitlinie einander gleich,

und mittelst dieses einfachen Satzes ist man wieder im Stande, die Curve zu construieren, sobald der Brennpunkt F und die Directrix (D) gegeben sind. Gleichzeitig ist auch die

geometrische Bedeutung von der in Gl. (437) vorkommenden Größe p, die man bekanntlich den Parameter der Parabel nennt, gegeben, und es ist der vierfache Abstand des Brennpunktes F vom Scheitel O' der Parabel gleich p. Setzt man überdies noch in der Gleichung $\eta^2 = p\xi$ der Parabel $\xi = \frac{p}{4}$, so folgt $\eta^2 = \frac{p^2}{4}$ und hieraus $2\eta = p$, weshalb auch p die im Brennpunkte dieser Curve errichtete Doppelordinate vorstellt.

Es ist übrigens auch leicht, die lineare Excentricität eines durch die Gleichung (340) gegebenen centralen Kegelschnittes zu ermitteln. Substituiert man nämlich in den Gleichungen $e^2 = a^2 - b^2$ und $e^2 = a^2 + b^2$ für a^2 und b^2 die in § 73 gefundenen Werte, so erhält man in beiden Fällen:

$$e^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \frac{A}{A_{3,3}}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (f) in § 72

$\lambda_2 - \lambda_1 = - \sqrt{(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}^2}$ und $\lambda_1 \lambda_2 = A_{3,3}$, daher wird schließlich die lineare Excentricität

$$(438) \qquad e = \frac{\sqrt{-A\sqrt{(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4\,a_{1,2}^2}}}{A_{3,3}}.$$

§ 76. Scheitelgleichung und Focalgleichung der Kegelschnitte. Sätze.

Scheitelgleichung. Verlegt man bei der Ellipse den Ursprung des Coordinatensystems in den Scheitel A_2 (Fig. 88) und nennt (ξ') und (η') die Achsen des neuen Coordinatensystems, so nimmt die Gleichung dieser Curve, da zwischen den Coordinaten ξ, η und ξ', η' die Beziehungen bestehen: $\xi = \xi' - a$ und $\eta = \eta'$, zufolge (434) in § 73, die Gestalt an

$$\frac{(\xi' - a)^2}{a^2} + \frac{\eta'^2}{b^2} - 1 = o,$$

und hieraus folgt, wenn man obige Gleichung nach η'^2 auflöst,

$$(a) \quad \ldots \qquad \eta'^2 = \frac{2b^2}{a} \cdot \xi' - \frac{b^2}{a^2} \cdot \xi'^2.$$

Der Bruch $\frac{2\,b^2}{a}$ hat aber eine einfache geometrische Bedeutung und repräsentiert die in einem Brennpunkte der Ellipse errichtete Doppelordinate p. Denn setzt man in der zur Berechnung von η aus ξ dienenden Gleichung $\eta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2}$, im Sinne dieser Behauptung, $\xi = e$, so ergibt sich unter Berücksichtigung der bereits bekannten Beziehung $b^2 = a^2 - e^2$ in der That $\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$, oder $p = \frac{2\,b^2}{a}$.

Eine analoge Form lässt sich aber auch für die Gleichung der Hyperbel angeben, wenn man nämlich den Ursprung des Coordinatensystems nach A_1 (Fig. 89) verlegt. Nachdem diesmal die Transformationsformeln sind: $\xi = a + \xi'$ und $\eta = \eta'$, so ist nach (435) in § 73 die auf das neue Coordinatensystem von den Achsen (ξ') und (η') bezogene Gleichung der Hyperbel

$$\frac{(\xi' + a)^2}{a^2} - \frac{\eta'^2}{b^2} - 1 = o,$$

und daraus findet man

$$(b) \quad \ldots \quad \eta'^2 = \frac{2\,b^2}{a} \cdot \xi' + \frac{b^2}{a^2}\xi'^2.$$

Der Bruch $\frac{2\,b^2}{a}$ hat dieselbe Bedeutung wie bei der Ellipse und ist die in einem Brennpunkte der Hyperbel errichtete Doppelordinate p, wie man sogleich findet, sobald man in der Gleichung $\eta = \frac{b}{a}\sqrt{\xi^2 - a^2}$ einfach $\xi = e$ setzt und gleichzeitig berücksichtigt, dass $b^2 = e^2 - a^2$ ist. Die Scheitelgleichung der Kegelschnitte ist somit:

$$(439) \quad \ldots \quad \eta'^2 = p\,\xi' + q\,\xi'^2,$$

und repräsentiert in allen drei Fällen p die in einem Brennpunkte des betreffenden Kegelschnittes errichtete Doppelordinate, während q ein Coefficient ist, der negativ, positiv, oder auch gleich null ist, je nachdem obige Gleichung eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt. Die Größe p, auf welche wir bereits früher bei der Parabel gestoßen sind, heißt der Parameter (oder auch Liniarparameter) des Kegelschnittes.

Focalgleichung. Es ist bei den Kegelschnitten gebräuchlich, diejenigen Polarcoordinaten einzuführen, welche von einem Brennpunkte und der einen Hauptachse aus gezählt werden. Sind nun bei der Ellipse in Figur 88 $F_1 M = r$ und $\varphi = (\xi, F_1 M)$ die Polarcoordinaten des Curvenpunktes M, so ist nach Gl. (b) in § 75

$$r = r_1 = a - \varepsilon \,.\, \xi,$$

und weil, wie man sofort aus der Figur entnimmt, $\xi = e + r \cos\varphi$ ist, so wird nach obiger Gleichung $r = a - \varepsilon\,(e + r\cos\varphi)$, oder $r\,(1 + \varepsilon\cos\varphi) = a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ und somit

$$(440) \quad \ldots \quad r = \frac{p}{2\,(1 + \varepsilon\cos\varphi)}$$

die Focalgleichung der Ellipse. Diese Gleichung gilt aber auch für die Hyperbel, sobald r und φ die in Figur 89 gegebenen Bedeutungen haben, also $r = F_1 M$ und $\varphi = (F_1 O, F_1 M)$ ist. Denn eliminiert man abermals aus den beiden Gleichungen $r = r_1 = \varepsilon \,.\, \xi - a$ (Siehe Gl. (e) in § 75) und $\xi = e - r\cos\varphi$ die Größe ξ, berücksichtigt ferner die Relationen $b^2 = e^2 - a^2$ und $\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$, so ergibt sich die obige Gleichung (440).

Die letzte Gleichung repräsentiert aber auch gleichzeitig die Focalgleichung der Parabel, sobald man daselbst $\varepsilon = 1$ setzt und r, φ die in Figur 90 angegebenen Polarcoordinaten des Punktes M darstellen. Wie in dem vorangegangenen Paragraphen bewiesen wurde, ist nämlich bei der Parabel $FM = QM$, oder $r = d$; anderseits zeigt aber die Figur, dass $d = \frac{p}{2} - r\cos\varphi$ ist, und daher besteht zwischen r und φ die Beziehung $r = \frac{p}{2} - r\cos\varphi$, welche zur Gleichung (440) führt, wenn man in derselben $\varepsilon = 1$ annimmt. Die Gleichung (440) ist somit die Focalgleichung der Kegelschnitte, und es sind hierin r, φ die bereits definierten Polarcoordinaten irgend eines Curvenpunktes, während p den linearen Parameter und ε die numerische Excentricität des Kegelschnittes angibt. Hierbei sei noch bemerkt, dass $\varepsilon \lesseqgtr +1$ erscheint, je nachdem

nämlich der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Mittelst der eben gewonnenen Focalgleichung der Kegelschnitte lassen sich nun sofort einige interessante Sätze über die Focalsehnen dieser Curven herleiten.

Satz. Das Rechteck aus den Segmenten einer durch einen Brennpunkt eines Kegelschnittes gehenden Sehne, oder einer Focalsehne, steht zu der ganzen Sehne in einem constanten Verhältnisse.

Beweis. Es sei $M_1 M_2$ die durch den Brennpunkt F_1 des durch Gleichung (440) bestimmten Kegelschnittes gelegte Sehne und seien daher $F_1 M_1$ und $F_1 M_2$ die beiden Segmente, in welche obige Sehne durch den Brennpunkt F_1 zerfällt. Alsdann bestehen nach Gl. (440) die beiden Relationen

$$F_1 M_1 = \frac{p}{2(1+\varepsilon\cos\varphi)}, \qquad F_1 M_2 = \frac{p}{2(1-\varepsilon\cos\varphi)},$$

und weil hier $F_1 M_1$ und $F_1 M_2$ als positive Strecken anzusehen sind, so ist $M_1 M_2 = F_1 M_1 + F_1 M_2$ und wird folglich die Focalsehne

$$M_1 M_2 = \frac{p}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}.$$

Aus den drei letzten Gleichungen ergibt sich daher

$$\frac{F_1 M_1 \,.\, F_1 M_2}{M_1 M_2} = \frac{p}{4},$$

womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Satz. Die Summe der Reciproken von zwei auf einander senkrechten Focalsehnen ist constant.

Beweis. Sind $M_1 M_2$ und $N_1 N_2$ zwei solche Focalsehnen, so ist $M_1 M_2 = \frac{p}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$ und $N_1 N_2 = \frac{p}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$, mithin die Summe

$$\frac{1}{M_1 M_2} + \frac{1}{N_1 N_2} = \frac{2-\varepsilon^2}{p}$$

und unabhängig von dem Winkel φ, womit auch dieser Satz bewiesen erscheint.

Aufgabe. Es ist zu bestimmen der geometrische Ort eines Punktes M, dessen Abstände von einer festen Geraden (D) und einem festen Punkte F in dem constanten Verhältnisse stehen, wie $1 : \varepsilon$.

Lösung. Man fälle aus F in Fig. 90 eine Senkrechte auf (D), welche letztere im Punkte A trifft, und wähle hierauf F zum Pol, dagegen die Gerade FA zur Polarachse eines Polarcoordinatensystems, weshalb die Polarcoordinaten irgend eines Punktes M der fraglichen Curve sind: $r = FM$ und $\varphi = (FA, FM)$. Ferner repräsentiere O denjenigen Punkt, wo die Curve die Polarachse durchschneidet, und seien $AO = d_1$ und $OF = f$ die Abstände desselben von der Geraden (D) und dem Punkte F. Zufolge der hier gestellten Aufgabe bestehen nun die beiden Proportionen $d : r = 1 : \varepsilon$ und $d_1 : f = 1 : \varepsilon$, aus welchen sich ergibt

$$(c) \quad \ldots \quad d = \frac{r}{\varepsilon}, \qquad d_1 = \frac{f}{\varepsilon};$$

ferner entnimmt man aus der Figur die Relation

$$(d) \quad \ldots \quad d = d_1 + f - r \cdot \cos\varphi,$$

und aus den drei letzten Gleichungen folgt durch die Elimination von d und d_1, wenn man noch die dadurch zum Vorscheine kommende Gleichung nach r auflöst,

$$(e) \quad \ldots \quad r = \frac{f\,(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos\varphi},$$

aus welcher man erkennt, dass die Gerade AF eine Symmetrieachse der Curve ist. Nun bezeichne man wieder die im Punkte F errichtete Doppelordinate der fraglichen Curve mit p, setze also $r = \frac{p}{2}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und substituiere dann dieses Wertesystem von r und φ in die letzte Gleichung, wodurch man erhält $\frac{p}{2} = f\,(1 + \varepsilon)$, oder

$$(f) \quad \ldots \quad f = \frac{p}{2\,(1 + \varepsilon)},$$

während die Gleichung (e) die Form annimmt:

$$(g) \quad \ldots \quad r = \frac{p}{2\,(1 + \varepsilon \cos\varphi)},$$

und d. i. die Focalgleichung eines Kegelschnittes von dem linearen Parameter p und der numerischen Excentricität ε. Der geometrische Ort des Punktes M ist folglich ein Kegelschnitt, und erscheint damit gleichzeitig der Satz erwiesen, dass bei den Kegelschnitten die Abstände irgend eines

Curvenpunktes von einer festen Geraden, der Directrix oder Leitlinie, und einem festen Punkte, dem Brennpunkte, in einem constanten Verhältnisse stehen, welches gleich ist $1 : \varepsilon$, wenn ε die numerische Excentricität des betreffenden Kegelschnittes repräsentiert. Nachdem nun die Ellipse und Hyperbel je zwei Brennpunkte besitzen, müssen diese Curven auch zwei Leitlinien (D_1) und (D_2) haben, welche symmetrisch zu beiden Seiten ihres Mittelpunktes sich befinden, während die Parabel aus nahe liegenden Gründen nur eine solche Leitlinie hat.

Übergehend auf die Bestimmung dieser Leitlinien, ermittle man zunächst die Größe d_1 aus p und ε. Man erhält nun, wenn man in der zweiten der Gleichungen (c) für f den in Gleichung (f) gegebenen Wert substituiert,

$$(h) \quad \ldots \quad d_1 = \frac{p}{2 \cdot \varepsilon\ (1 + \varepsilon)},$$

wodurch die Entfernung der Leitlinie (D) vom Scheitel O des Kegelschnittes bestimmt erscheint. Bei der Parabel ist nun $\varepsilon = 1$, daher wird nach den Gleichungen (f) und (h) bei dieser Curve

$$d_1 = f = \frac{p}{4},$$

in Übereinstimmung mit dem in § 75 bereits Vorgeführten. Bei der Ellipse und Hyperbel ist dagegen $p = \frac{2\,b^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$, mithin wird zufolge Gl. (h) der Abstand einer Leitlinie der Ellipse oder Hyperbel von dem auf derselben Seite des Centrums der Curve liegenden Scheitel gleich

$$(k) \quad \ldots\ldots \quad d_1 = \frac{a\,b^2}{e\ (a + e)},$$

und jetzt ist man auch im Stande, die Entfernung einer Leitlinie vom Centrum der Curve zu ermitteln, und man findet für die Ellipse (Siehe (Fig. 88)

$$(l) \quad . \ . \quad O D_1 = - O D_2 = a + \frac{a\,b^2}{e\ (a + e)} = \frac{a^2}{e}$$

und für die Hyperbel (Siehe Fig. 89) ebenfalls

$$(m). \quad . \quad OD_1 = -OD_2 = a - \frac{ab^2}{e(a+e)} = \frac{a^2}{e}.$$

Nach § 62 lautet die Gleichung der Polaren eines Punktes M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 bezüglich des Kegelschnittes $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ bekanntlich: $\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} - 1 = o$, und aus dieser folgt, sobald man $x_1 = \pm e$ und $y_1 = o$: setzt, $x = \pm \frac{a^2}{e}$; dagegen ist die Gleichung der Polaren des Punktes M_1 bezüglich des Kegelschnittes $\frac{y^2}{p} - x = o$ $\frac{2 y_1 y}{p} - (x + x_1) = o$, und hieraus ergibt sich, wenn man diesmal $x_1 = \frac{p}{4}$ und $y_1 = o$ setzt, $x = -\frac{p}{4}$. Nun bestimmt aber $x = \pm \frac{a^2}{e}$ die Leitlinie der Ellipse oder Hyperbel, $x = -\frac{p}{4}$ die Leitlinie der Parabel, daher der

Satz: Die Polare eines Brennpunktes ist die zugehörige Leitlinie und der Pol einer Leitlinie der zugehörige Brennpunkt.

§ 77. Ähnliche Kegelschnitte.

Die in Figur 91 verzeichneten beiden rechtwinkeligen Dreiecke OP_1M_1 und $O'P_1'M_1'$ sind einander ähnlich, sobald die Proportion stattfindet: $\frac{O'P_1'}{OP_1} = \frac{P_1'M_1'}{P_1M_1}$, d. h., da ja $OP_1 = x_1$, $P_1M_1 = y_1$ und $O'P_1' = x_1'$, $P_1'M_1' = y_1'$ die Coordinaten der Punkte M_1 und M_1' repräsentieren, sobald

$$(a) \quad . \quad . \qquad x_1' = \varrho x_1, \qquad y_1' = \varrho y_1 \quad .$$

wird, wenn noch ϱ irgend eine Constante darstellt, die im allgemeinen jeden beliebigen Wert annehmen kann. Erscheinen hierbei noch die Achsen der beiden rechtwinkeligen Coordinatensysteme (x) und (x'), sowie (y) und (y'), zu einander parallel, so haben die vorliegenden Dreiecke überdies eine ähnliche Lage, sind also dann ähnlich und ähnlich liegend (§ 51). Sind ferner M_1, M_2, $M_3 \ldots . M_n$ die Ecken

eines einfachen n-Ecks und $M_1', M_2', M_3' \ldots M_n'$ diejenigen eines zweiten n-Ecks, welches dem ersteren ähnlich ist, so müssen zwischen den Coordinaten x_i, y_i und x_i', y_i' zweier entsprechender Ecken M_i und M_i' dieser Figuren ebenfalls die Beziehungen bestehen:

$$(b) \ldots \quad x_i' = \varrho x_i, \qquad y_i' = \varrho y_i;$$

denn dann ist, wenn $M_i M_k$ und $M_i' M_k'$ zwei einander entsprechende Seiten besagter n-Ecke repräsentieren, $M_i M_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$, $M_i' M_k' = \sqrt{(x_k' - x_i')^2 + (y_k' - y_i')^2}$ oder, wegen Gl. (b), $M_i' M_k' = \varrho \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$ und folglich wieder

$$\frac{M_i' M_k'}{M_i M_k} = \varrho,$$

wie es die Ähnlichkeit erfordert. Außerdem ist noch, sobald vorausgesetzt wird, dass die beiden in Fig. 91 verzeichneten Coordinatensysteme dieselben Achsenrichtungen besitzen und φ_i, φ_i' die Winkel versinnlichen, welche (x) mit $M_i M_k$, beziehungsweise (x') mit $M_i' M_k'$, bilden,

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_i' = \frac{y'_k - y_i'}{x_k' - x_i'},$$

und weil nach (b) offenbar $\frac{y_k' - y_i'}{x_k' - x_i'} = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}$ sein muss, so ist $\varphi_i' = \varphi_i$ und besitzen dann wieder beide Figuren auch eine ähnliche Lage. Nachdem nun jede stetige Curve angesehen werden kann als ein Vieleck mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, so gelangt man zur Erkenntnis, dass zwei Gleichungen zwischen x und y, beziehungsweise x' und y', dann zwei ähnliche Curven angeben, sobald zwischen den Coordinaten x, y und x', y' zweier entsprechender Punkte ebenfalls die Beziehungen in Kraft treten:

$$(c) \ldots \quad x' = \varrho x, \qquad y' = \varrho y,$$

und dass diese Curven überdies ähnlich liegend sind, sobald die beiden Coordinatenachsen dieselben Achsenrichtungen aufweisen.

Satz von Euler. Ist $f(x, y)$ eine homogene Function $n$ten Grades von x und y, ferner C ein willkürlicher Parameter, der wenigstens innerhalb gewisser Grenzen jeden

beliebigen Wert annehmen kann, so ist das geometrische Aquivalent der Gleichung

$$(d) \quad \ldots\ldots \qquad f(x,y) = C$$

eine Familie ähnlicher und ähnlich liegender Curven.

Beweis. Bei der Beweisführung vorliegenden Satzes gehe man von den beiden Gleichungen aus

$$(e) \quad \ldots \quad f(x,y) = a, \qquad f(x',y') = b,$$

in welchen x, y die Coordinaten irgend eines Punktes M der durch die erste dieser Gleichungen gegebenen Curve (C), dagegen x', y' die Coordinaten desjenigen Punktes M' der durch die zweite Gleichung bestimmten Curve (C') repräsentieren, welcher dem Punkte M entspricht, und a, sowie b, Constanten bezeichnen. Dabei beziehen sich x, y auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit den Achsen (x) und (y), x', y' aber auf ein solches mit den Achsen (x') und (y'). Sind nun beide Curven ähnlich, so müssen zwischen den Coordinaten von M und M' die oben aufgestellten Beziehungen (c) stattfinden und daher muss, zufolge der vorausgesetzten Homogenität der Function f, auch

$$f(x',y') = f(\varrho x, \varrho y) = \varrho^n . f(x,y)$$

werden, und hieraus folgt, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der beiden Gleichungen (e), $b = a . \varrho^n$, oder

$$(f) \quad \ldots\ldots \qquad \varrho = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Die letzte Gleichung lehrt nun, dass für jeden Wert von a und b der Factor ϱ bestimmbar ist und sonach die Gleichungen (e) zwei ähnliche Curven darstellen. Lässt man jetzt noch (x) mit (x') und (y) mit (y') zusammenfallen, so ist der in (d) vorausgesetzte Fall da. Kaum nothwendig ist noch die Bemerkung, dass ϱ imaginär ausfällt, sobald n gerade ist und die beiden Constanten a und b entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Nach diesem Satze stellen demnach die beiden Gleichangen

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = o \text{ und } \frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = o$$

zwei ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen oder Hyperbeln

dar, sobald $a' = \varrho a$ und $b' = \varrho b$, oder $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ist. Selbstverständlich ist hier $x' = \frac{a'}{a} x$ und $y' = \frac{b'}{b} y$. Auch ist nach dem Euler'schen Satze sofort klar, dass zwei Parabeln stets ähnlich sein müssen. Die Gleichungen $\frac{y^2}{x} - p = o$ und $\frac{y'^2}{x'} - p' = o$ stellen somit zwei ähnliche Curven dar, und ist hierin, wegen $\varrho = \frac{p'}{p}$, $y' = \frac{p'}{p} y$ und $x' = \frac{p'}{p} . x$.

Aufgabe. Es soll untersucht werden, wann die beiden centralen Kegelschnitte

$$(441)\quad \begin{aligned} U &\equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = o, \\ U' &\equiv a_{1,1}'x^2 + 2a_{1,2}'xy + a_{2,2}'y^2 + 2a_{1,3}'x + 2a_{2,3}'y + a_{3,3}' = o \end{aligned}$$

ähnlich sind.

Lösung. Nach § 72, Gl. (431), sind die Gleichungen dieser beiden Kegelschnitte, bezogen auf ihre beiden Hauptachsen als Coordinatenachsen

$$\lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \eta^2 + \frac{A}{A_{3,3}} = o, \quad \lambda_2' \xi^2 + \lambda_1' \eta^2 + \frac{A'}{A_{3,3}'} = o,$$

wenn noch λ_1 und λ_2 die in den Gleichungen (422) angegebenen Größen darstellen, dagegen λ_1' und λ_2' aus (422) erhalten werden, wenn man daselbst $a_{i,k}$ durch $a_{i,k}'$ ersetzt. Sollen nun beide Kegelschnitte ähnlich sein, so müssen, zufolge des eben bewiesenen Satzes von Euler, die Beziehungen stattfinden: $\lambda_2' = \varrho \lambda_2$ und $\lambda_1' = \varrho \lambda_1$, woraus wieder folgt

$$(g) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'}.$$

Aus den Gleichungen (422) folgt aber, wenn man die erste durch die zweite dividiert und hierauf den zum Vorscheine kommenden Quotienten entsprechend umformt,

$$(h) \quad \ldots \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1 + \frac{(a_{1,1} + a_{2,2})^2}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)} + \frac{a_{1,1} + a_{2,2}}{2\sqrt{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}} \sqrt{\frac{(a_{1,1} + a_{2,2})^2}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2} - 4}$$

und aus den Gleichungen (g) und (h)

$$(442)\quad \frac{(a_{1,1}+a_{2,2})^2}{a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}^{\,2}}=\frac{(a_{1,1}'+a_{2,2}')^2}{a_{1,1}'\,a_{2,2}'-a_{1,2}'^{\,2}}$$

als Bedingung, welcher die Coefficienten $a_{i,k}$ und $a_{i,k}'$ unterworfen sind, sobald $U=o$ und $U'=o$ zwei ähnliche Centralkegelschnitte darstellen.

§ 78. Satz von Newton. — Folgerungen.

Satz von Newton. Legt man aus einem Punkte M_0 in der Ebene des Kegelschnittes (U) zwei Strahlen (L') und (L''), welche obige Curve in den Punkten M_1', M_2' und M_1'', M_2'' durchschneiden, so ist der Quotient $\frac{M_0M_1'\,.\,M_0M_2'}{M_0M_1''\,.\,M_0M_2''}$ für jede Lage von M_0 constant, wenn die Richtungen dieser Strahlen unverändert bleiben.

Beweis. Es sei wieder (340) die Gleichung des Kegelschnittes (U), bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem vom Ursprunge O und den Achsen (x) und (y), demnach, zufolge § 66

$$a_{1,1}x'^2+2a_{1,2}x'y'+a_{2,2}y'^2+g_0x'+h_0y'+U_0=o$$

die Gleichung derselben Curve, jedoch bezogen auf ein anderes Coordinatensystem, dessen Ursprung M_0 im alten System die Coordinaten x_0, y_0 besitzt, dessen Achsen (x') und (y') aber zu den früheren (x) und (y) parallel gerichtet sind. Irgend ein durch M_0 gelegter und gegen die Achse (x) unter dem Winkel φ geneigter Strahl (L) wird nun den Kegelschnitt (U) in den Punkten M_1 und M_2 durchschneiden, und die Abstände M_0M_1 und M_0M_2 des Punktes M_0 von M_1 und M_2 ergeben sich als die Wurzeln der in r quadratischen Gleichung

$$(a)\ \ldots\quad Pr^2+Qr+U_0=o,$$

sobald die hier vorkommenden Symbole P und Q definiert erscheinen durch

$$(b)\ \ldots\quad \begin{aligned} P&=a_{1,1}\cos^2\varphi+2\,a_{1,2}\cos\varphi\sin\varphi+a_{2,2}\sin^2\varphi,\\ Q&=g_0\cos\varphi+h_0\sin\varphi,\end{aligned}$$

und daher ist auch nach der Lehre von den Gleichungen das Product:

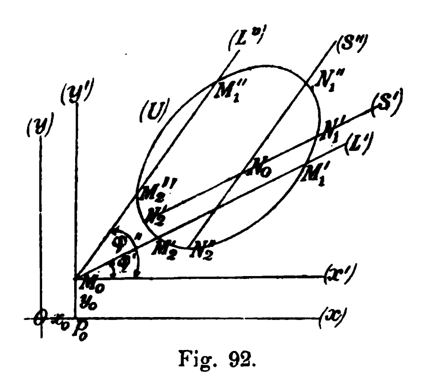


Fig. 92.

$$(c) \ldots \quad M_0 M_1 \, . \, M_0 M_2 = \frac{U_0}{P}.$$

Nun denke man sich durch M_0 (Siehe Fig. 92) zwei Strahlen (L') und (L'') gelegt, welche den Kegelschnitt in den Punkten M_1', M_2' und M_1'', M_2'' durchschneiden und mit der Achse der x die Winkel φ' und φ'' bilden. Selbstverständlich bestehen jetzt nach (c) die beiden Relationen

$$(d) \, . \quad M_0 M_1' \, . \, M_0 M_2' = \frac{U_0}{P'}, \qquad M_0 M_1'' \, . \, M_0 M_2'' = \frac{U_0}{P''},$$

sobald P' und P'' die Werte darstellen, welche P für $\varphi = \varphi'$, beziehungsweise $\varphi = \varphi''$, annimmt, und aus diesen ergibt sich durch einfache Division die Gleichung

$$(e) \ldots \quad \frac{M_0 M_1' \, . \, M_0 M_2'}{M_0 M_1'' \, . \, M_0 M_2''} = \frac{P''}{P'},$$

aus welcher man in Anbetracht des Umstandes, dass der Bruch $\frac{P'}{P''}$ unabhängig erscheint von den Coordinaten x_0, y_0 des Punktes M_0, erkennt die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes. Sind daher (S') und (S'') zwei durch einen anderen Punkt N_0 gelegte und zu (L') und (L'') parallele Strahlen, N_1', N_2' und N_1'', N_2'' ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte, so besteht nach dem eben bewiesenen Satze die Gleichung

$$(443) \, . \quad \frac{M_0 M_1' \, . \, M_0 M_2'}{M_0 M_1'' \, . \, M_0 M_2''} = \frac{N_0 N_1' \, . \, N_0 N_2'}{N_0 N_1'' \, . \, N_0 N_2''}.$$

Mittelst des Satzes von Newton lassen sich nun eine Reihe anderer Sätze über Kegelschnitte sehr leicht herleiten,

und wir beschäftigen uns daher in dem Folgenden mit einigen Anwendungen dieses Satzes.

Satz. Sind T_1 und T_2 die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die man aus einem Punkte N_0 an einen centralen Kegelschnitt legen kann, $M_1' M_2'$ und $M_1'' M_2''$ die zu diesen Tangenten parallelen Diameter der Curve, so ist

$$\frac{N_0 T_1}{N_0 T_2} = \frac{M_1' M_2'}{M_1'' M_2''}.$$

Dieser Satz geht aus Gl. (443) hervor, wenn man daselbst $N_0 N_1' = N_0 N_2' = N_0 T_1$, $N_0 N_1'' = N_0 N_2'' = N_0 T_2$ und $M_0 M_1' = - M_0 M_2' = \frac{1}{2} M_1' M_2'$, $M_0 M_1'' = - M_0 M_2'' = \frac{1}{2} M_1'' M_2''$ setzt.

Satz. Die Summe der Quadrate der Reciproken von zwei aufeinander senkrechten Radien eines centralen Kegelschnittes ist constant.

Beweis. Aus der früheren Relation (d) folgt, wenn $M_1' M_2'$ und $M_1'' M_2''$ zwei aufeinander senkrechte Sehnen des Kegelschnittes bedeuten, die im Punkte M_0 sich durchschneiden,

$$\frac{1}{M_0 M_1' \,.\, M_0 M_2'} + \frac{1}{M_0 M_1'' \,.\, M_0 M_2''} = \frac{P' + P''}{U_0},$$

und weil in dem hier vorliegenden Fall $\varphi'' = \frac{\pi}{2} + \varphi'$ ist, so wird $P' + P'' = a_{1,1} + a_{2,2}$ und daher

$$\frac{1}{M_0 M_1' \,.\, M_0 M_2'} + \frac{1}{M_0 M_1'' \,.\, M_0 M_2''} = \frac{a_{1,1} + a_{2,2}}{U_0} = C,$$

also unabhängig von den Neigungswinkeln der Sehnen $M_1' M_2'$ und $M_1'' M_2''$ gegen die Achse der x. Setzt man nun wieder einen centralen Kegelschnitt voraus mit dem Mittelpunkte M_0, so ist $M_0 M_2' = - M_0 M_1'$ und $M_0 M_2'' = - M_0 M_1''$, weshalb obige Gleichung die Form annimmt:

$$\frac{1}{M_0 M_1'^2} + \frac{1}{M_0 M_2''^2} = C,$$

womit der hier ausgesprochene Satz bewiesen erscheint. Es

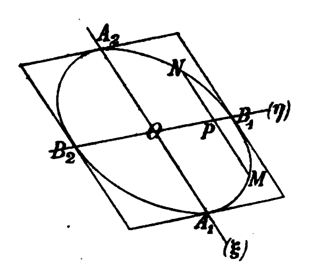


Fig. 93.

ist klar, dass bei der Ellipse die Constante $C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, bei der Hyperbel aber $C = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ sein wird.

Satz. Ist $B_1 B_2$ ein Diameter eines centralen Kegelschnittes und MN eine zu demselben conjugierte Sehne dieser Curve, welche den Diameter im Punkte P trifft (Fig. 93), so ist der Quotient $\frac{PM^2}{PB_1 \,.\, PB_2}$ constant für alle zu diesem Diameter conjugierten Sehnen.

Dieser Satz geht ebenfalls aus Gleichung (443) hervor, wenn man daselbst $M_0 M_1' = - M_0 M_2' = O A_1$ und $M_0 M_1'' = - M_0 M_2'' = O B_1$, ferner $N_0 N_1' = - N_0 N_2' = PM$ und $N_0 N_1'' = PB_1$, $N_0 N_2'' = PB_2$ setzt, wodurch man in der That die unseren Satz aussprechende Beziehung erhält

$$\frac{PM^2}{PB_1 \,.\, PB_2} = - \left(\frac{O A_1}{O B_1}\right)^2 = C.$$

Nimmt man noch an, dass der Kegelschnitt eine Ellipse sei und bezeichnet die beiden conjugierten Halbdiameter $O A_1$ und $O B_1$ mit a_1 und b_1, setzt überdies $PM = \xi$ und $OP = \eta$, so folgt aus der eben gewonnenen Relation $\frac{\xi^2}{(b_1 - \eta)(b_1 + \eta)} = \frac{a_1^2}{b_1^2}$, und hieraus

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} - 1 = o$$

als Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar conjugierter Diameter als Coordinatenachsen.

Satz. Ist (δ) ein Durchmesser einer Parabel und $M_1 M_2$ eine zu (δ) conjugierte Sehne dieser Curve, welche den Durchmesser in P trifft, so ist, wenn noch der Schnittpunkt von (δ) mit der Parabel mit A bezeichnet wird, der Quotient $\frac{PM_1^2}{AP}$ constant für alle zu (δ) conjugierten Sehnen.

Bei der Begründung dieses Satzes hat man von der hier schon mehrfach in Anwendung gekommenen Rel. (443) abermals Gebrauch zu machen, und unter der Annahme, dass M_∞ den unendlich fernen Punkt von (δ) und $N_1 N_2$ eine zu $M_1 M_2$ parallele Sehne repräsentiert, welche diesen Durchmesser in Q durchschneidet, in Gl. (443) $M_0 M_1' = - M_0 M_2' = PM_1$, $M_0 M_1'' = PA$, $M_0 M_2'' = PM_\infty$, $N_0 N_1' = - N_0 N_2' = QN_1$, $N_0 N_1'' = QA$ und $N_0 N_2'' = QM_\infty$ zu setzen, wodurch man, weil ja $PM_\infty = QM_\infty$ ist, erhält

$$\frac{PM_1^2}{PA} = \frac{QN_1^2}{QA},$$

mithin hat auch der Quotient $\frac{PM_1^2}{AP}$ für alle zu dem Diameter conjugierten Sehnen der Parabel denselben Wert.

Satz. Sind $M_1 M_2$ und $N_1 N_2$ zwei zu einander parallele Sehnen einer Hyperbel, welche die eine Asymtote (A_1) dieses Kegelschnittes in den Punkten P und Q durchschneiden, so ist

$$PM_1 \,.\, PM_2 = QN_1 \,.\, QN_2.$$

Dies folgt unmittelbar aus Gl. (443); denn letztere geht für $M_0 M_1' = PM_1$, $M_0 M_2' = PM_2$, $M_0 M_1'' = M_0 M_2'' = PM_\infty$, wo M_∞ den unendlich fernen Punkt von (A_1) bezeichnet, und $N_0 N_1' = QN_1$, $N_0 N_2' = QN_2$, $N_0 N_1'' = N_0 N_2'' = QM_\infty$ über in die obige Gleichung, sobald man noch berücksichtigt, dass $PM_\infty = QM_\infty$ ist.

Satz. Ist $M_1 M_2 M_3 M_4$ ein einem centralen Kegelschnitte umgeschriebenes Viereck und repräsentieren r_1, r_2, r_3 und r_4 die zu den Seiten $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_4$ und $M_4 M_1$ parallelen Radien dieser Curve, so besteht die Relation:

$$\frac{M_1 M_2}{r_1} + \frac{M_3 M_4}{r_3} = \frac{M_2 M_3}{r_2} + \frac{M_4 M_1}{r_4}.$$

Beweis. Die den Newton'schen Lehrsatz aussprechende Gleichung (443) führt, sobald man darin $M_0 M_1' = M_0 M_2' = M_1 M'$, $M_0 M_1'' = M_0 M_2'' = M_1 M^{IV}$ und $N_0 N_1' = -N_0 N_2' = r_1$, $N_0 N_1'' = -N_0 N_2'' = r_4$ setzt, zur Beziehung $\left(\frac{M_1 M'}{M_1 M^{IV}}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_4}\right)^2$, und hieraus folgt, weil ja die im obigen Lehrsatze angeführten Strecken $M_\alpha M_\beta$, sowie die Radien r_i, als positiv anzusehen sind, $\frac{M_1 M'}{M_1 M^{IV}} = -\frac{r_1}{r_4}$. Es ist klar, dass drei analoge Relationen sich ergeben werden, sobald man von den drei übrigen Ecken des in Fig. 94 verzeichneten Vierecks ausgeht, und man erhält alsdann:

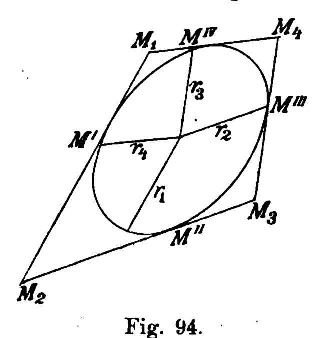


Fig. 94.

$$\frac{M_1 M^{IV}}{M_1 M'} = -\frac{r_4}{r_1}, \quad \frac{M_2 M'}{M_2 M''} = -\frac{r_1}{r_2},$$
$$\frac{M_3 M''}{M_3 M'''} = -\frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_4 M'''}{M_4 M^{IV}} = -\frac{r_3}{r_4}$$

und hieraus

$$\frac{M_1 M_2}{r_1} = \frac{M_1 M' + M' M_2}{r_1} = -\frac{M_1 M^{IV}}{r_4} + \frac{M_2 M''}{r_2},$$
$$\frac{M_3 M_4}{r_3} = \frac{M_3 M''' + M''' M_4}{r_3} = -\frac{M_3 M''}{r_2} + \frac{M_4 M^{IV}}{r_4}$$

Addiert man nun die beiden letzten Gleichungen und nimmt gleichzeitig darauf Bedacht, dass $M'' M_3 = -M_3 M''$ und $M^{IV} M_1 = -M_1 M^{IV}$ ist, so folgt in der That die im letzten Satze ausgesprochene Relation.

§ 79. Sätze von Carnot und Ceva. — Folgerungen.

Satz von Carnot. Bringt man die drei Seiten eines Dreiecks von den Ecken M_1, M_2 und M_3 zum Schnitte mit einem Kegelschnitte, wodurch sich die Schnittpunktpaare M', M''; M''', M^{IV} und M^V, M^{IV} ergeben,

Satz von Ceva. Zieht man aus den drei Ecken eines Dreiseits von den Seiten (x_1), (x_2) und (x_3) Tangenten an einen Kegelschnitt, wodurch man die Tangentenpaare (T'), (T''); (T'''), (T^{IV}) und (T^V), (T^{IV}) erhält,



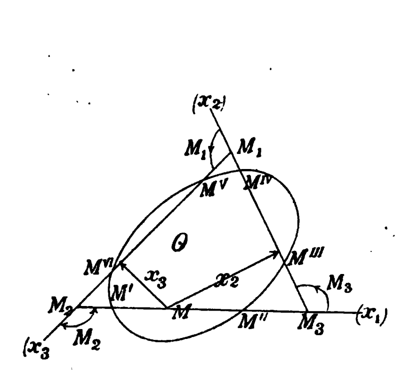


Fig. 95.

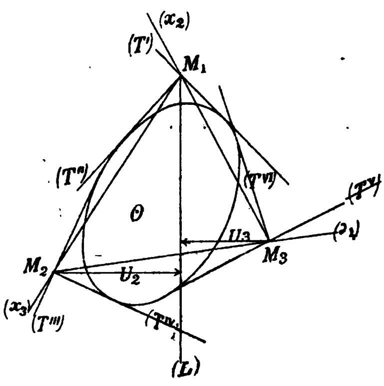


Fig. 96.

so ist das Product

$$(M_2\,M_3\,M')\ (M_2\,M_3\,M'')$$
$$(444)\quad (M_3\,M_1\,M''')\,(M_3\,M_1 M^{IV})$$
$$(M_1 M_2 M^V)(M_1 M_2 M^{IV}) = 1.$$

Beweis. Wählt man das Dreieck $M_1\,M_2\,M_3$ (Fig. 95) zum Coordinatendreieck und versteht diesmal unter den trimetrischen Coordinaten x_i eines Punktes die Normaldistanzen der Seiten (x_i) dieses Dreiecks von dem Punkte, so sind die trimetrischen Coordinaten des in der Geraden $M_2\,M_3$ liegenden Punktes M:

$$x_1 = o, \quad x_2 = M\,M_3 \,.\, \sin M_3, \quad x_3 = M_2\,M \,.\, \sin M_2,$$

$$(x_2\ x_3\ T')\quad (x_2\ x_3\ T'')$$
$$(x_3\ x_1\ T''')\quad (x_3\ x_1\ T^{IV})\quad (445)$$
$$(x_1\,x_2\,T^V)\,(x_1\,x_2\,T^{IV}) = 1.$$

Beweis. Wählt man (Fig. 96) das Dreiseit (x_1) (x_2) (x_3) zum Coordinatendreieck und versteht diesmal unter den trigonalen Coordinaten u_i eines Strahls die Normaldistanzen des letzteren von den drei Ecken M_i dieses Dreiseits, so sind die trigonalen Coordinaten einer durch den Punkt M_1 gehenden Geraden (L):

$$u_1 = o, \quad u_2 = M_1 M_2 \,.\, \sin(x_3, L), \quad u_3 = -\ M_3\,M_1\ \sin\,(x_2,\ L)$$

wenn in beiden Figuren die ausdrückliche Annahme gemacht wird, dass $M_2\,M_3$, $M_3\,M_1$ und $M_1\,M_2$ positive Strecken darstellen. Dividiert man nun die dritte durch die zweite Gleichung und bedenkt, dass $M_3\,M = -\,M M_3$ ist, so folgt unter gleichzeitiger Anwendung der in § 15 gewählten Bezeichnung für das Abstandsverhältnis eines Punktes oder eines Strahls:

$(a).\ (M_2M_3M) = -\frac{x_3}{x_2}\frac{\sin M_3}{\sin M_2},$ | $(x_2x_3L) = -\frac{M_1M_2}{M_3M_1}\cdot\frac{u_3}{u_2},\ ..(b)$

und hat man hierin unter x_2 und x_3, beziehungsweise u_2 und u_3, die dem Punkte M oder Strahl (L) angehörigen Werte sich zu denken, während die Winkel M_1, M_2 und M_3 die in Figur 95 angegebene Bedeutung haben.

Übergehend auf den eigentlichen Beweis unseres Satzes, sei nun

$a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o$ | $\alpha_{1,1}u_1^2 + 2\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,2}u_2^2 + 2\alpha_{1,3}u_1u_3 + 2\alpha_{2,3}u_2u_3 + \alpha_{3,3}u_3^2 = o$

die Gleichung des Kegelschnittes in

trimetrischen Punktcoordinaten, | trigonalen Liniencoordinaten,

und weil für die

in der (x_1) liegenden Punkte M' und M'' des Kegelschnittes selbstverständlich $x_1 = o$ sein muss, haben die Coordinaten x_2 und x_3 obiger Punkte der Gleichung zu genügen:
$a_{2,2}x_2^2 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = o,$ | aus M_1 an den Kegelschnitt gelegten Tangenten (T') und (T'') offenbar $u_1 = o$ sein muss, haben die Coordinaten u_2 und u_3 dieser Strahlen der Gleichung zu genügen:
$\alpha_{2,2}u_2^2 + 2\alpha_{2,3}u_2u_3 + \alpha_{3,3}u_3^2 = o,$

oder jener

$a_{3,3}\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 + 2a_{2,3}\left(\frac{x_3}{x_2}\right) + a_{2,2} = o,$ | $\alpha_{3,3}\left(\frac{u_3}{u_2}\right)^2 + 2\alpha_{2,3}\left(\frac{u_3}{u_2}\right) + \alpha_{2,2} = o,$

und aus derselben folgt nach der Lehre von den Gleichungen

$$\frac{x_3'}{x_2'}\cdot\frac{x_3''}{x_2''} = \frac{a_{2,2}}{a_{3,3}},$$

sobald x_i' und x_i'' die Coordinaten der Schnittpunkte M' und M'' bedeuten, und es ist folglich nach Gleichung (a)
$(M_2\,M_3\,M')\ (M_2\,M_3\,M'') =$

$$\frac{a_{2,2}}{a_{3,3}}\left(\frac{\sin\,M_3}{\sin\,M_2}\right)^2.$$

| $$\frac{u_3'}{u_2'}\cdot\frac{u_3''}{u_2''} = \frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{3,3}},$$

sobald u_i' und u_i'' die Coordinaten der Tangenten (T') und (T'') bedeuten, und es ist somit nach Gleichung (b)
$(x_2\,x_3\,T')\ (x_2\,x_3\,T'') =$

$$\frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{3,3}}\left(\frac{M_1\,M_2}{M_3\,M_1}\right)^2.$$

Es ist klar, dass in derselben Weise die beiden nachfolgenden Gleichungen sich ausfindig machen lassen, u. zw.:

$$(M_3 M_1 M''') \, (M_3 M_1 M^{IV}) = \frac{a_{3,3}}{a_{1,1}} \left(\frac{\sin M_1}{\sin M_3}\right)^2,$$

$$(M_1 M_2 M^{V}) \, (M_1 M_2 M^{VI}) = \frac{a_{1,1}}{a_{2,2}} \left(\frac{\sin M_2}{\sin M_1}\right)^2,$$

$$(x_3 x_1 T''') \, (x_3 x_1 T^{IV}) = \frac{a_{3,3}}{a_{1,1}} \left(\frac{M_2 M_3}{M_1 M_2}\right)^2,$$

$$(x_1 x_2 T^{V}) \, (x_1 x_2 T^{VI}) = \frac{a_{1,1}}{a_{2,2}} \left(\frac{M_3 M_1}{M_2 M_3}\right)^2,$$

und durch Multiplication dieser drei Gleichungen findet man die den Satz von

Carnot aussprechende Gleichung (444). | Ceva aussprechende Gleichung (445).

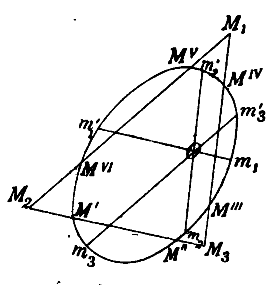


Fig. 97.

Der Satz von Carnot ergibt sich übrigens auch leicht aus dem im vorigen Paragraphen gegebenen Satze von Newton. Nach diesem Satze bestehen nämlich, wenn die durch den Punkt O parallel zu den drei Seiten $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ und $M_1 M_2$ des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ gelegten Sehnen des Kegelschnittes beziehungsweise mit $m_1 m_1'$, $m_2 m_2'$ und $m_3 m_3'$ bezeichnet werden (Fig. 97), die drei Relationen:

$$\frac{M_1 M^{V} \, . \, M_1 M^{VI}}{M_1 M''' \, . \, M_1 M^{IV}} = \frac{O m_3 \, . \, O m_3'}{O m_2 \, . \, O m_2'}, \quad \frac{M_2 M' \, . \, M_2 M''}{M_2 M^{V} \, . \, M_2 M^{VI}} = \frac{O m_1 \, . \, O m_1'}{O m_3 \, . \, O m_3'}, \quad \frac{M_3 M''' \, . \, M_3 M^{IV}}{M_3 M' \, . \, M_3 M''} = \frac{O m_2 \, . \, O m_2'}{O m_1 \, . \, O m_1'},$$

und aus diesen resultiert durch Multiplication die Gleichung:

$$\frac{M_1 M^{V}}{M_2 M^{V}} \cdot \frac{M_1 M^{VI}}{M_2 M^{VI}} \cdot \frac{M_2 M'}{M_3 M'} \cdot \frac{M_2 M''}{M_3 M''} \cdot \frac{M_3 M'''}{M_1 M'''} \cdot \frac{M_3 M^{IV}}{M_1 M^{IV}} = 1$$

in Übereinstimmung mit Gl. (444).

Berühren die drei Seiten des in Fig. 95 verzeichneten Dreiecks den Kegelschnitt, so fallen die Punkte M' und

Sind die drei Ecken des in Fig. 96 gegebenen Dreiseits Punkte des Kegelschnittes, so fallen die Tangenten

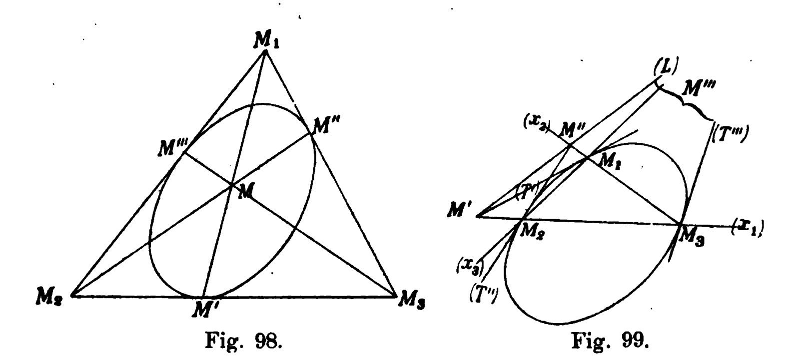


Fig. 98. Fig. 99.

M'', M''' und M^{IV}, M^{V} und M^{VI} paarweise zusammen, weshalb unter Hinweis auf Fig. 98 die Gleichung (444) die Gestalt annimmt:

$$(M_2\, M_3\, M')^2 \quad (M_3\, M_1\, M'')^2 \quad (M_1 M_2 M''')^2 = 1.$$

Der Fall $(M_2 M_3 M')\,(M_3 M_1 M'')\,(M_1 M_2 M''') = 1$ ist aber hier ausgeschlossen, indem sonst nach § 21 die drei Punkte M', M'' und M''' einer und derselben Geraden angehören würden, was doch nicht sein kann, weil ja ein Kegelschnitt von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird, daher muss

$$(M_2\, M_3\, M') \quad (M_3\, M_1\, M'') \quad (M_1 M_2 M''') = -1$$

werden, und hieraus erkennt man nach § 21, dass die drei Verbindungsgeraden $M_1 M'$, $M_2 M''$ und $M_3 M'''$ in einem

(T') und (T''), (T''') und (T^{IV}), (T^{V}) und (T^{VI}) paarweise zusammen, weshalb unter Hinweis auf Fig. 99 die Gleichung (445) die Gestalt annimmt:

$$(x_2\, x_3\, T')^2 \;.\; (x_3\, x_1\, T'')^2 \;.\; (x_1 x_2 T''')^2 = 1.$$

Der Fall $(x_2 x_3 T')\,(x_3 x_1 T'')\,(x_1 x_2 T''') = 1$ ist aber hier ausgeschlossen, indem sonst nach § 21 die drei Tangenten (T'), (T'') und (T''') in einem und demselben Punkte sich durchschneiden würden, was doch unmöglich ist, weil man aus einem Punkte bloß zwei Tangenten an einen Kegelschnitt legen kann, daher muss

$$(x_2\, x_3\, T')\;(x_3\, x_1\, T'')\;(x_1 x_2 T''') = -1$$

werden, und hieraus folgt nach § 21, dass die Tangenten (T'), (T'') und (T''') die gegenüber liegenden Seiten

und demselben Punkte M sich durchschneiden.

(x_1), (x_2) und (x_3) des Dreiseits in drei Punkten M', M'' und M''' einer und derselben Geraden (L) durchneiden.

Auf Grund dieser Betrachtungen gilt demnach der

Satz: Ist ein Kegelschnitt einem Dreieck eingeschrieben, so durchschneiden sich die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte mit den gegenüber liegenden Ecken in einem und demselben Punkte.

Satz: Ist ein Kegelschnitt einem Dreieck umgeschrieben, so durchschneiden die in den Ecken des Dreiecks an den Kegelschnitt gelegten Tangenten die gegenüber liegenden Seiten in drei Punkten einer und derselben Geraden.

Capitel XIII.

Projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte.

§ 80. Erzeugnis projectivischer Strahlenbüschel und Punktreihen.

Nach § 33, Cap. VI, sind bekanntlich zwei projectivische

Strahlenbüschel	Punktreihen

bestimmt durch die Gleichungen

(a) $L_1 - \lambda L_2 = o,$ $L_1' - \mu L_2' = o,$	$M_1 - \lambda M_2 = o,$ $M_1' - \mu M_2' = o,$ (b)

wenn λ und μ zwei veränderliche Parameter bedeuten, unterworfen der Bedingung

$$(c) \quad . \ . \ . \ . \quad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o,$$

in welcher die Coefficienten a, b, c und d vier Constanten repräsentieren. So oft man nun in (a), beziehungsweise in (b), für λ und μ ein Wertesystem einführt, welches der Relation (c) genügt, erhält man die Gleichungen eines Paars entsprechender Strahlen (L) und (L') oder eines Paars entsprechender Punkte M und M', und es ist klar, dass für den Schnittpunkt von (L) mit (L') die beiden Gleichungen (a), sowie für die Verbindungsgerade MM' jene (b), gleichzeitig bestehen müssen, wobei man selbstverständlich für λ und μ ein aus (c) resultierendes Wertesystem sich zu denken hat. Der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen der durch (a) und (c) gegebenen projectivischen Strahlenbüschel, sowie der geometrische Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der durch (b) und (c) bestimmten projectivischen Punktreihen, wird sonach erhalten, wenn man aus den Gleichungen (a) und (c), respective (b) und (c), die beiden veränderlichen Parameter λ und μ eliminiert, wodurch man nach einigen einfachen algebraischen Operationen erhält:

$$a L_1 L_1' + b L_1 L_2' + c L_1' L_2 + d L_2 L_2' = o, \tag{446}$$

$$a M_1 M_1' + b M_1 M_2' + c M_1' M_2 + d M_2 M_2' = o, \tag{447}$$

und weil die hier vorkommenden Symbole L_i und L_i' lineare und homogene Functionen von x_1, x_2 und x_3, dagegen M_i und M_i' lineare und homogene Functionen von u_1, u_2 und u_3 darstellen, so ist nach § 54 offenbar (446) die Gleichung einer Curve 2. Ordnung (U) und (447) jene einer Curve 2. Classe (Σ) und gilt sonach der

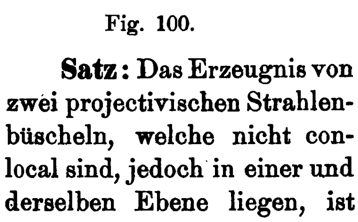


Fig. 100.

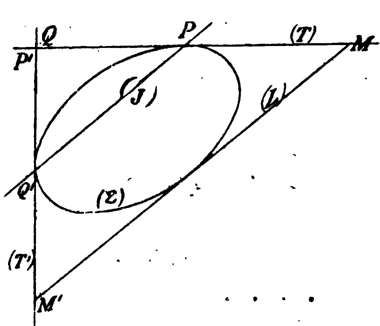


Fig. 101.

Satz: Das Erzeugnis von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, welche nicht conlocal sind, jedoch in einer und derselben Ebene liegen, ist eine Curve 2. Ordnung.

Die Mittelpunkte O und O' (Fig. 100) beider Büschel sind gleichzeitig Punkte der Curve (U); denn obige Gleichung wird ja befriedigt für $L_1 = L_2 = o$ oder $L_1' = L_2' = o$. Ferner entspricht dem Strahl OO' oder (Q) des ersten Büschels im zweiten Büschel die Tangente (Q'), gelegt im Punkte O' an die

Satz: Das Erzeugnis von zwei projectivischen Punktreihen, welche nicht conlocal sind, jedoch in einer und derselben Ebene liegen, ist eine Curve 2. Classe.

Die Träger (T) und (T') beider Punktreihen (Fig. 101) sind gleichzeitig Tangenten der Curve (Σ); denn obige Gleichung wird befriedigt für $M_1 = M_2 = o$ oder $M_1' = M_2' = o$. Ferner entspricht dem Punkte Q der ersten Reihe in der zweiten der Punkt Q', wo nämlich der Träger (T') von der Curve

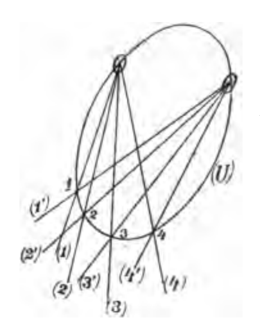


Fig. 102.

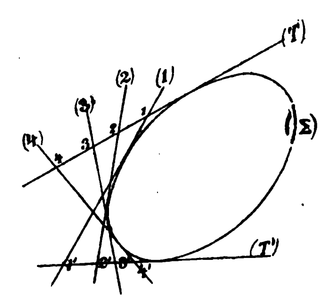


Fig. 103.

Curve (U), und ebenso bilden der Strahl $O'O$ oder (P') des zweiten Büschels und die Tangente (P), gelegt in O an die Curve (U), ein Paar entsprechender Strahlen, wobei noch selbstverständlich (P) dem ersten Büschel angehört. Man braucht, um dies einzusehen, bloß anzunehmen, dass der Punkt M dem Punkte O oder O' immer mehr und mehr sich nähert. Es ist daher nach dem in § 37 bereits Vorgeführten auch klar, dass der Punkt J, in welchem die in O und O' an die Curve (U) gelegten Tangenten (P) und (Q') sich durchschneiden, gleichzeitig den Directionsmittelpunkt der beiden projectivischen Strahlenbüschel darstellt.

Ist umgekehrt (U) in Fig. 102 eine Curve zweiter Ordnung und sind O, O' zwei in ihr angenommene feste Punkte,

(Σ) berührt wird, und bilden ebenso Punkt P' der zweiten Reihe und Punkt P, wo (T) von (Σ) berührt wird, ein Paar entsprechender Punkte. Dies wird sogleich klar, sobald man annimmt, dass die Gerade MM' oder (L) in Fig. 101 der Tangente (T) oder (T') immer mehr und mehr sich nähert. Zufolge des in § 37 bereits Gewonnenen folgt demnach, dass die Verbindungsgerade PQ' oder (J) derjenigen Punkte, in welchen die Curve (Σ) die Träger (T) und (T') beider Reihen berührt, die Directionsachse der beiden projectivischen Punktreihen repräsentiert.

Ist umgekehrt (Σ) in Fig. 103 eine Curve zweiter Classe und sind (T), (T') zwei feste Tangenten dieser

so erscheinen die beiden Strahlenbüschel, welche man dadurch erhält, dass O und O' durch Strahlen (i) und (i') mit den einzelnen Curvenpunkten i, $i = 1, 2, 3, 4 \ldots .$, verbunden werden, projectivisch und wird somit auch $(\alpha \beta \gamma \delta) = (\alpha' \beta' \gamma' \delta')$ werden, wenn (α), (β), (γ) und (δ) vier beliebige Strahlen des einen Büschels und (α'), (β'), (γ') und (δ') die denselben im zweiten Büschel entsprechenden Strahlen darstellen. Daher folgt auch, dass eine und dieselbe Curve 2. Ordnung auf unendlich viele Arten als das Erzeugnis von zwei projectivischen Strahlenbüscheln angesehen werden kann; man braucht ja bloß O und O' durch andere Curvenpunkte zu ersetzen.

Curve, so erscheinen die beiden Punktreihen, welche man dadurch erhält, dass (T) und (T') mit den einzelnen Tangenten (i), $i = 1, 2, 3, 4 \ldots .$, von (Σ) zum Schnitte gebracht werden, projectivisch und wird somit auch $(\alpha \beta \gamma \delta) = (\alpha' \beta' \gamma' \delta')$ werden, wenn α, β, γ, δ vier beliebige Punkte der ersten und α', β', γ', δ' die denselben in der zweiten Reihe entsprechenden Punkte darstellen. Daraus ersieht man, dass eine und dieselbe Curve 2. Classe auf unendlich viele Arten als das Erzeugnis von zwei projectivischen Punktreihen angesehen werden kann; man braucht ja bloß (T) und (T') durch andere Tangente der Curve zu ersetzen.

Sind die beiden Strahlenbüschel perspectivisch, | Sind die beiden Punktreihen perspectivisch,

also gegeben durch die Gleichungen:

$L_1 - \lambda . L_2 = o, \; L_1 - \mu . L_2' = o \quad | \quad M_1 - \lambda . M_2 = o, \; M_1 - \mu . M_2' = o$

und

$$b \lambda + c \mu = o,$$

so erscheint der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen — oder der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte — beziehungsweise bestimmt durch die Gleichung:

$L_1 . (b L_2' + c L_2) = o, \quad | \quad M_1 (b M_2' + c M_2) = o,$

welche wieder in die beiden linearen Gleichungen zerfällt

$L_1 = o, \; b L_2' + c L_2 = o, \quad | \quad M_1 = o, \; b M_2' + c M_2 = o,$

von welchen erstere den | von welchen erstere den

Strahl (L_1), letztere aber eine durch den Schnittpunkt von (L_2) mit (L_2') gehende Gerade repräsentiert, welche nach § 36 gleichzeitig die perspectivische Achse beider Büschel ist, daher der

Satz: Das Erzeugnis von zwei perspectivischen Strahlenbüscheln ist ein Geradenpaar.

Punkt M_1; letztere einen in der Verbindungsgeraden $M_2 M_2'$ liegenden Punkt angibt, welcher nach § 36 das perspectivische Centrum beider Punktreihen ist, daher der

Satz: Das Erzeugnis von zwei perspectivischen Punktreihen ist ein Punktpaar.

Aufgabe. Wann ist die durch die beiden projectivischen Strahlenbüschel erster Ordnung

$$(d) \ldots \quad \begin{aligned} &(A_1 x + B_1 y + C_1) - \lambda . (A_2 x + B_2 y + C_2) = o, \\ &(A_1' x + B_1' y + C_1') - \mu . (A_2' x + B_2' y + C_2') = o, \\ &b\lambda + c\mu = o \end{aligned}$$

erzeugte Curve 2. Ordnung eine Ellipse und wann eine Hyperbel oder Parabel?

Lösung. Die Gleichung dieser Curve wird nach dem eben Gesagten erhalten, wenn man aus den obigen drei Gleichungen die veränderlichen Parameter λ und μ eliminiert, und lautet deshalb:

$$(e) \quad \begin{aligned} &(b A_1 A_2' + c A_1' . A_2) x^2 + [b (A_1 B_2' + A_2' B_1) + \\ &c (A_1' B_2 + A_2 B_1')] x y + (b B_1 B_2' + c B_1' B_2) y^2 + \\ &[b (A_1 C_2' + A_2' C_1) + c (A_1' C_2 + A_2 C_1')] x + \\ &[b (B_1 C_2' + C_1 B_2') + c (B_1' C_2 + C_1' B_2)] y + (b C_1 C_2' + \\ &c C_1' C_2) = o; \end{aligned}$$

es ist demnach das in § 74 vorkommende Binom

$$(f) \ldots \quad \begin{aligned} a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2} = {} & b^2 (A_1 B_2' - A_2' B_1)^2 + \\ & c^2 (A_1' B_2 - A_2 B_1')^2 + 2bc (A_1 B_2' + A_2' B_1) \\ & (A_1' B_2 + A_2 B_1') - 4bc (A_1 A_2' B_1' B_2 + A_1' A_2 B_1 B_2'), \end{aligned}$$

wie man nach einer kleinen Umformung findet, weshalb zufolge des in § 74 bereits Erörterten die erzeugte Curve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem der rechts vom Gleichheitszeichen in *(f)* stehende Ausdruck negativ, positiv oder gleich null wird; womit die hier gestellte Aufgabe gelöst erscheint.

Es kann übrigens gleichzeitig noch die Frage beantwortet werden, wann diese Curve ein Kreis ist. Dann muss nämlich, wie man in § 74 ebenfalls gesehen hat, $a_{1,1} = a_{2,2}$ und $a_{1,2} = o$ werden, und hieraus folgt nach Einführung der diesbezüglichen Werte von $a_{1,1}$, $a_{2,2}$ und $a_{1,2}$ aus Gleichung (e):

$$b A_1 A_2' + c A_1' A_2 = b B_1 B_2' + c B_1' B_2,$$
$$b(A_1 B_2' + A_2' B_1) + c(A_1' B_2 + A_2 B_1') = o,$$

oder in Determinantenform:

$$b \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2' & A_2' \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} A_1' & B_1' \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = o,$$
$$b \begin{vmatrix} A_1, & -B_1 \\ A_2', & B_2' \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} A_1', & -B_1' \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = o$$

als Bedingung, damit das Erzeugnis der beiden projectivischen Strahlenbüscheln ein Kreis ist.

In derselben Weise hat man nun zu verfahren, wenn an Stelle der beiden projectivischen Strahlenbüschel zwei projectivische Punktreihen treten, weshalb diese Aufgabe hier übergangen werden und nur noch der Beweis erbracht werden soll für den

Satz: Das Erzeugnis von zwei ähnlichen Punktreihen ist eine Parabel.

Beweis. In § 39 wurde gezeigt, dass die Gleichungen von zwei ähnlichen Punktreihen lauten:

$$(h). \quad \begin{aligned} (a_1 u + b_1 v + 1) - \lambda \cdot (a_2 u + b_2 v + 1) = o, \\ (a_1' u + b_1' v + 1) - \lambda \cdot (a_2' u + b_2' v + 1) = o, \end{aligned}$$

wenn wieder λ einen veränderlichen Parameter bezeichnet. Nach erfolgter Elimination von λ aus diesen zwei Gleichungen erhält man nun:

$$(i) \quad . \quad \alpha_{1,1} u^2 + 2\alpha_{1,2} uv + \alpha_{2,2} v^2 + 2\alpha_{1,3} u + 2\alpha_{2,3} v = o,$$

wenn noch

$$\alpha_{1,1} = a_1 a_2' - a_1' a_2, \quad 2\alpha_{1,2} = a_1 b_2' - a_1' b_2 + a_2' b_1 - a_2 b_1',$$
$$\alpha_{2,2} = b_1 b_2' - b_1' b_2, \quad 2\alpha_{1,3} = a_1 - a_1' - a_2 + a_2', \quad 2\alpha_{2,3} = b_1 - b_1' - b_2 + b_2'$$

gesetzt wird, und es ist daher, weil hier $\alpha_{3,3} = o$ wird, nach dem in § 74 diesbezüglich Gesagten, die erzeugte Curve in

der That eine Parabel, wenn noch die aus den sechs Coefficienten $a_{i,k}$ der Gleichung (i) — $a_{3,3} = o$ mitgezählt — gebildete 3^2 elementige, symmetrische Determinante E nicht verschwindet.

§ 81. **Folgerungen aus dem Paragraphen 80.**

Mittelst der in dem unmittelbar vorangegangenen Paragraphen bewiesenen Sätze lassen sich nun eine ganze Reihe anderer interessanter Sätze herleiten, von welchen einige hier vorgeführt werden mögen.

Satz: Das Dopppelverhältnis der vier Punkte M', M'', M''' und M^{IV}, in welchen eine Tangente (T) eines Kegelschnittes von vier anderen Tangenten (T'), (T''), (T''') und (T^{IV}) geschnitten wird, ist immer gleich dem Doppelverhältnisse derjenigen vier Strahlen (L_1), (L_2), (L_3) und (L_4), welche die Berührungspunkte dieser vier Tangenten mit irgend einem Curvenpunkte verbinden.

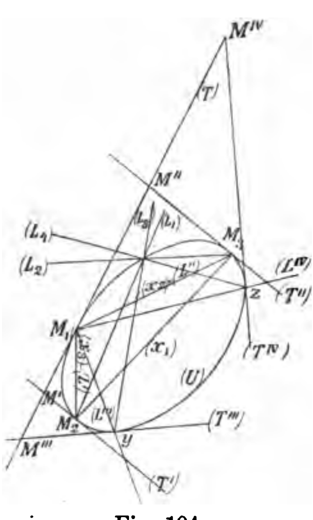


Fig. 104.

Beweis. Die Punkte, in welchen die Tangenten (T), (T') und (T'') den Kegelschnitt berühren, wählen wir zu den Ecken M_1, M_2 und M_3 des Coordinatendreiecks (Fig. 104) und nennen noch y und z die Berührungspunkte der zwei übrigen Tangenten (T''') und (T^{IV}) mit der Curve. Dann sind, wenn y_i und z_i, $i = 1, 2, 3$, die trimetrischen Coordinaten der Punkte y und z bezeichnen,

$$L' \equiv x_3 = o,\ L'' \equiv x_2 = o,\ L''' \equiv \frac{x_3}{y_3} - \frac{x_2}{y_2} = o,\ L^{IV} \equiv \frac{x_3}{z_3} - \frac{x_2}{z_2} = o$$

die Gleichungen der vier Strahlen $(L^{(i)})$, welche M_1 mit den Punkten M_2, M_3, y und z verbinden, weshalb nach § 30 das Doppelverhältnis

$$(a) \quad . \quad . \qquad (L' L'' L''' L^{IV}) = \frac{y_3}{y_2} : \frac{z_3}{z_2}$$

sein muss. Anderseits lautet die Gleichung eines dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ umgeschriebenen Kegelschnittes (U)

$$U \equiv a_{1,2} x_1 x_2 + a_{1,3} x_3 x_1 + a_{2,3} x_2 x_3 = o,$$

und es ist daher, wenn U_1, U_2 und U_3 die in § 54 gegebenen Bedeutungen haben,

$$U_1 = a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3,\ U_2 = a_{1,2} x_1 + a_{2,3} x_3,\ U_3 = a_{1,3} x_1 + a_{2,3} x_2;$$

die Gleichungen der fünf Tangenten $(T')\ldots.(T^{IV})$ und (T) sind sonach (Siehe § 58):

$$T \equiv a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 = o, \quad T' \equiv a_{1,2} x_1 + a_{2,3} x_3 = o,$$
$$T'' \equiv a_{1,3} x_1 + a_{2,3} x_2 = o$$
$$T''' \equiv (a_{1,2} y_2 + a_{1,3} y_3) x_1 + (a_{1,2} y_1 + a_{2,3} y_3) x_2 + (a_{1,3} y_1 + a_{2,3} y_2) x_3 = o,$$
$$T^{IV} \equiv (a_{1,2} z_2 + a_{1,3} z_3) x_1 + (a_{1,2} z_1 + a_{2,3} z_3) x_2 + (a_{1,3} z_1 + a_{2,3} z_2) x_3 = o,$$

und folglich auch jene der Schnittpunkte $M' \ldots . M^{IV}$

$$M' \equiv a_{1,2} a_{2,3} u_1 + a_{1,2} a_{1,3} u_2 - a_{1,2}^2 u_3 = o,$$
$$M'' \equiv a_{1,3} a_{2,3} u_1 - a_{1,3}^2 u_2 + a_{1,2} a_{1,3} u_3 = o,$$
$$M''' \equiv y_2 M' - y_3 M'' = o, \quad M^{IV} \equiv z_2 M' - z_3 M'' = o.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Punkte ist daher nach dem in § 30 bereits Gesagten ebenfalls

$$(b) \ . \ . \qquad (M' M'' M''' M^{IV}) = \frac{y_3}{y_2} : \frac{z_3}{z_2},$$

und aus den beiden Gleichungen (a) und (b) folgt somit

$$(b) \ . \ . \qquad (M' M'' M''' M^{IV}) = (L' L'' L''' L^{IV}).$$

Aus den im vorigen Paragraphen vorgeführten projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte resultiert aber noch die Gleichheit

$$(d) \ . \ . \qquad (L' L'' L''' L^{IV}) = (L_1 L_2 L_3 L_4)$$

und aus diesem Grunde wird schließlich

$$(M' M'' M''' M^{IV}) = (L_1 L_2 L_3 L_4),$$

womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen erscheint.

Satz. Sind M_1, M_2 und M_3 drei Punkte einer Hyperbel oder Parabel und M_2', M_3' diejenigen Punkte, in welchen die durch den Punkt M_1 parallel zu einer Asymptote der Hyperbel — oder zur Achse der Parabel — gezogene Gerade (G) die Verbindungsgeraden des Curvenpunktes O mit

den Punkten M_2 und M_3 durchschneidet, so ist der Quotient $\frac{M_1\,M_3'}{M_2'M_3'}$ constant für jede Lage des Punktes O auf der Curve.

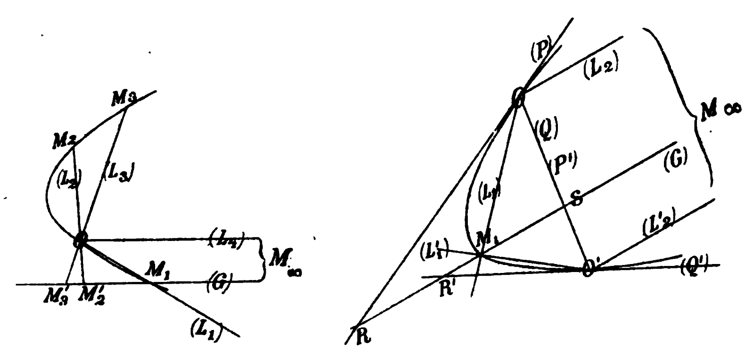


Fig. 105. Fig. 106.

Beweis. Unter der Annahme, dass (L_1), (L_2) und (L_3) die drei Strahlen vorstellen, welche den Punkt O mit den Punkten M_1, M_2 und M_3 verbinden (Fig. 105) und (L_4) die durch O gezogene Parallele zu (G) repräsentiert, ist nach dem vorangegangenen Paragraphen das Doppelverhältnis

$$(L_1 L_2 L_3 L_4) = C,$$

O mag hierbei was immer für ein Punkt der Curve sein. Anderseits ist aber, zufolge des in § 18 gegebenen Satzes von Pappus, wenn noch M_∞ den unendlich fernen Punkt des Strahls (G) angibt,

$$(M_1 M_2' M_3' M_\infty) = (L_1 L_2 L_3 L_4),$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt demnach, weil ja $(M_1 M_2' M_\infty) = +1$ ist, $(M_1 M_2' M_3') = C$, oder

$$\frac{M_1\,M_3'}{M_2'M_3'} = C,$$

wobei die Constante C unabhängig erscheint von der Wahl des Punktes O auf der Curve.

Satz. Sind O, O' und M_1 drei Punkte einer Hyperbel oder Parabel und repräsentieren R und R' die Schnittpunkte der in O und O' an die Curve gelegten Tangenten (P) und

(Q') mit der durch M_1 gezogenen Parallelen (G) zur Achse der Parabel — oder zu einer Asymptote oder Hyperbel —, so ist immer

$$RM_1 \,.\, R'M_1 = \overline{M_1S}^2,$$

wenn noch S denjenigen Punkt angibt, in welchem die Verbindungsgerade OO' den Strahl (G) durchschneidet.

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, lege man durch O und O' in Fig. 106 die zu (G) parallelen Strahlen (L_2) und (L_2') und verbinde noch M_1 durch die Strahlen (L_1) und (L_1') mit O und O'. Es sind dann, weil die Strahlen (L_2) und (L_2') in dem Curvenpunkte M_∞ sich durchschneiden, wenn nämlich M_∞ den unendlich fernen Punkt der Achse der Parabel — oder der einen Asymptote der Hyperbel — bezeichnet, (P), (P'); (Q), (Q'); (L_1), (L_1') und (L_2), (L_2') vier Paare entsprechender Strahlen, und daher ist auch nach dem letzten Paragraphen wieder

$$(PQL_1L_2) = (P'Q'L_1'L_2').$$

Zufolge des in § 18 gegebenen Satzes von Pappus ist ferner, weil ja (P), (Q), (L_1), (L_2) und R, S, M_1, M_∞, sowie (P'), (Q'), (L_1'), (L_2') und S, R', M_1, M_∞, perspectivisch sind,

$$(PQL_1L_2) = (RSM_1M_\infty), \quad (P'Q'L_1'L_2') = (SR'M_1M_\infty)$$

und aus diesen drei Gleichungen ergibt sich daher, nachdem $(RSM_\infty) = (SR'M_\infty) = 1$ ist, $(RSM_1) = (SR'M_1)$, oder $\frac{RM_1}{SM_1} = \frac{SM_1}{R'M_1}$, und hieraus die zu beweisende Gleichung.

Satz. Ist O der Mittelpunkt einer Hyperbel, (L) ein durch O und den Curvenpunkt M gelegter Strahl, und repräsentieren Q und R diejenigen Punkte, in welchen die durch den Curvenpunkt P zu den beiden Asymptoten (A_1) und (A_2) der Hyperbel gezogenen Parallelen den Strahl (L) durchschneiden, so ist

$$OQ \,.\, OR = OM^2.$$

Beweis. Man wähle die unendlich fernen Punkte O_∞ und O_∞' (Fig. 107) der beiden Asymtoten (A_1) und (A_2) als die Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel und verbinde einen jeden derselben durch Geraden mit den Curvenpunkten M, P, O_∞ und O_∞', wodurch man die aus den Strahlen

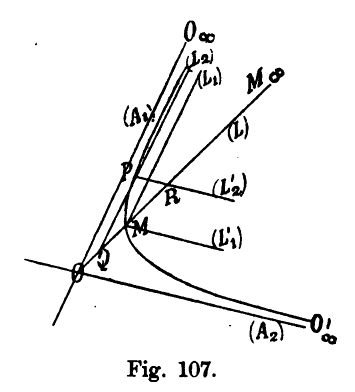


Fig. 107.

$(L_1), (L_2), (A_1), (L_\infty)$ und (L_1'), (L_2'), (L_∞), (A_2) bestehenden vierelementigen Strahlenbüschel erhält, sobald noch (L_∞) die unendlich ferne Gerade der Ebene der Hyperbel angibt, und es ist jetzt wieder

$$(L_1 L_2 A_1 L_\infty) = (L_1' L_2' L_\infty A_2).$$

Nun durchschneiden aber diese Büschel den Strahl (L) in den Punkten: M, Q, O, M_∞ und M, R, M_∞, O, sobald M_∞ der unendlich ferne Punkt von (L) ist, daher ist wieder

$$(L_1 L_2 A_1 L_\infty) = (MQOM_\infty), \quad (L_1' L_2' L_\infty A_2) = (MRM_\infty O),$$

somit auch $(MQOM_\infty) = (MRM_\infty O)$, woraus wegen $(MQM_\infty) = (MRM_\infty)$ folgt $(MQO) = \frac{1}{(MRO)}$, oder $\frac{MO}{QO} = \frac{RO}{MO}$, und hieraus ergibt sich sofort die zu beweisende Relation.

§ 82. Bestimmung der Kegelschnitte durch Büschel und durch Reihen.

Die früheren Betrachtungen in § 55 haben gezeigt, dass ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist, sobald fünf Punkte oder fünf Tangenten dieser Curve bekannt sind; folglich muss ein Kegelschnitt sich construiren lassen, wenn man fünf seiner Punkte oder Tangenten kennt. Es gibt nun verschiedene Methoden, die hier zum Ziele führen, und wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen bloß mit der constructiven Bestimmung eines durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegebenen Kegelschnittes mittelst Zuhilfenahme von zwei projectivischen Strahlenbüscheln oder projectivischen Punktreihen.

Die den Kegelschnitt bestimmenden fünf Punkte seien 1, 2, 3, 4 und 5. Man wähle

Die den Kegelschnitt bestimmenden fünf Tangenten seien (1), (2), (3), (4) und (5).

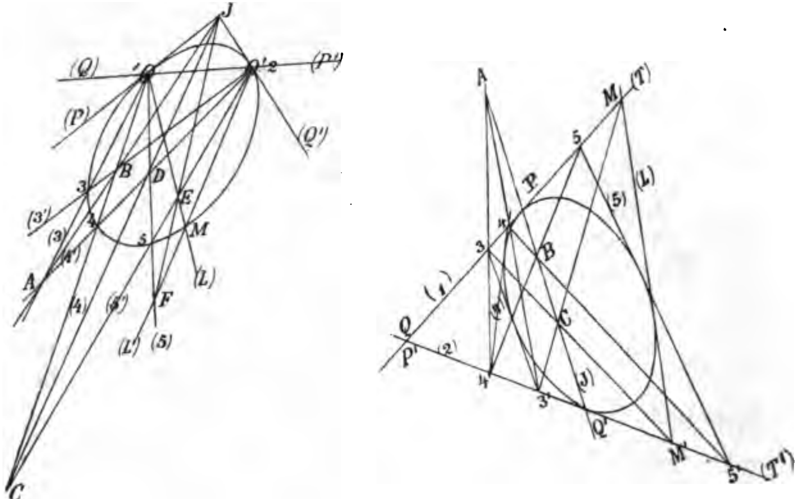


Fig. 108.

Fig. 109.

nun zwei der letzteren, z. B. die Punkte 1 und 2, als die Mittelpunkte O und O' (Fig. 108) zweier Strahlenbüschel und verbinde hierauf O und O' durch Geraden mit den drei noch übrigen Punkten 3, 4 und 5, wodurch man die drei Paare (3), (3'); (4), (4') und (5), (5') entsprechender Strahlen erhält, die gleichzeitig diejenigen zwei projectivischen Strahlenbüschel eindeutig bestimmen, welche man erhält, wenn man sämmtliche Punkte des durch die Punkte 1 bis 5 legbaren Kegelschnittes durch Strahlen mit den Punkten 1 und 2 verbindet. (Siehe § 80.) Die Elemente eines jeden Paars entsprechender Strahlen dieser Büschel durch-

Man wähle nun zwei der letzteren, z. B. die Tangenten (1) und (2), als die Träger (T) und (T') zweier Punktreihen (Fig. 109) und bringe dann die drei übrigen Tangenten mit (T) und (T') zum Schnitte, wodurch man drei Paare 3, 3'; 4, 4' und 5, 5' entsprechender Punkte erhält, die gleichzeitig diejenigen zwei projectivischen Punktreihen eindeutig bestimmen, welche man erhält, wenn man sämmtliche Tangenten des die Strahlen (1) bis (5) berührenden Kegelschnittes zum Schnitte bringt mit den Strahlen (1) und (2). (Siehe § 80.) Die Verbindungsgerade der Elemente eines jeden Paars entsprechender Punkte dieser

schneiden sich daher auch in einem Punkte des diesbezüglichen Kegelschnittes, und hat man sonach, behufs Lösung der Aufgabe, bloß die vorliegenden zwei projectivischen Strahlenbüschel zu vervollständigen, wozu die in § 37 bereits angegebene Methode dient. Im Sinne derselben bringe man nun die Strahlen (3) und (4′), sowie (3′) und (4), zum Schnitte, wodurch man die Punkte A und B erhält, ebenso bestimme man die Schnittpunkte C und D der Strahlen (4) und (5′), (4′) und (5), und ziehe dann die Verbindungsgeraden AB und CD, welche im Directionscentrum J beider Büschel sich durchschneiden. Um nun irgend einen Punkt M des Kegelschnittes zu erhalten, lege man durch O einen Strahl (L), bringe denselben mit einem der früheren Strahlen des zweiten Büschels, z. B. mit (5′), zum Schnitte, wodurch der Punkt E sich ergibt, verbinde hierauf letzteren mit J durch eine Gerade und verlängere diese bis zu ihrem Durchschnitte F mit (5); die Verbindungsgerade von O' mit F ist dann der dem Elemente (L) entsprechende Strahl (L') und der Schnitt-

Reihen liefert daher auch eine Tangente des diesbezüglichen Kegelschnittes, und hat man sonach, behufs Lösung der Aufgabe, bloß die vorliegenden zwei projectivischen Punktreihen zu vervollständigen, wozu die in § 37 bereits angegebene Methode dient. Im Sinne derselben ziehe man die Verbindungsgeraden 34^1 und 3^14, welche im Punkte A sich durchschneiden, und hierauf die Verbindungsgeraden 4^15 und 45^1, die in B sich treffen; die durch die eben gefundenen zwei Punkte A und B bestimmte Gerade ist dann die Directionsachse (J) beider Punktreihen. Um nun irgend eine Tangente (L) des Kegelschnittes zu erhalten, wähle man in (T) einen Punkt M, verbinde denselben durch eine Gerade mit einem der drei Punkte 3′, 4′, 5′, z. B. mit 3′, bringe diese Gerade mit der Directionsachse (J) zum Schnitte, wodurch der Punkt C sich ergibt, und verbinde C mit 3 durch einen Strahl, der den Träger (T') in jenem Punkte M' trifft, welcher M entspricht. Die Verbindungsgerade von M mit M' ist dann eine Tangente des Kegelschnittes. Auf diese Weise kann man eine

punkt von (L) mit (L') der Curvenpunkt M. Auf diese Weise kann man eine zweckdienliche Anzahl von Punkten des Kegelschnittes auffinden und folglich diese Curve mit beliebiger Genauigkeit construieren. Gleichzeitig repräsentieren die Verbindungsgeraden OJ und $O'J$ die beiden Tangenten, welche man in den Curvenpunkten O und O' an den Kegelschnitt legen kann. Es ist klar, dass die Angabe einer dieser Tangenten einen der drei Punkte 3, 4 oder 5 ersetzt, und dass der Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist, somit nach derselben Methode construiert werden kann, sobald die Punkte 1 und 2 — oder O und O' — mit den Tangenten (P) und (Q') und noch ein Curvenpunkt 3 gegeben erscheinen.

zweckdienliche Anzahl solcher Tangenten erhalten und damit mit beliebiger Genauigkeit die Curve construieren. Gleichzeitig repräsentieren die Punkte P und Q', in welchen die Directionsachse (J) die Tangenten (T) und (T') durchschneidet, die Berührungspunkte der letzteren mit dem Kegelschnitte. Es ist auch hier wieder klar, dass die Angabe eines solchen Berührungspunktes eine der drei Tangenten (3), (4) oder (5) ersetzt, und dass der Kegelschnitt eindeutig bestimmt und in derselben Weise construiert werden kann, sobald die Tangenten (1) und (2) oder (T) und (T') mit ihren Berührungspunkten P und Q' und noch eine dritte Tangente (3) gegeben erscheinen.

§ 83. Construction der Parabel aus drei Punkten und ihrer Achsenrichtung; Construction der Parabel aus vier Tangenten.

1. Aufgabe. Nach dem eben Vorgeführten ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt, sobald man vier Punkte desselben kennt und überdies die Tangente, gelegt in einem dieser Punkte an die Curve. Nun ist aber die Asymptote ebenfalls eine Tangente und der unendlich ferne Punkt derselben gleichzeitig ihr Berührungspunkt mit der Curve, weshalb ein Kegelschnitt auch gegeben erscheint durch die Angabe einer seiner beiden Asymptoten und dreier Curvenpunkte. Bei der Parabel repräsentiert jedoch, wie in § 69

bewiesen wurde, die unendlich ferne Gerade, diese doppelt gezählt, die beiden Asymptoten der Curve, und aus diesem Grunde ist daher dieser Kegelschnitt als bestimmt anzusehen, sobald man drei Curvenpunkte und die Richtnng seiner Asymptote oder, was dasselbe ist, die Achsenrichtung der Parabel angibt. Dass hier die Asymptote parallel zur Achse der Parabel gerichtet sein muss, folgt unmittelbar aus Gleichung (g) in § 58; denn nach derselben ist $\frac{2y_1y}{p} - (x + x_1) = o$ die Gleichung der Tangente (T), gelegt im Curvenpunkte M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 an die Parabel $\frac{y^2}{p} - x = o$, daher $\operatorname{tg}(x, T) = \frac{p}{2y_1}$. Setzt man nun in der letzten Gleichung $y_1 = \infty$, so folgt unmittelbar $\operatorname{tg}(x, T) = o$, zum Beweise, dass dann die Tangente parallel zur Parabelachse gerichtet ist, daher etc. etc.

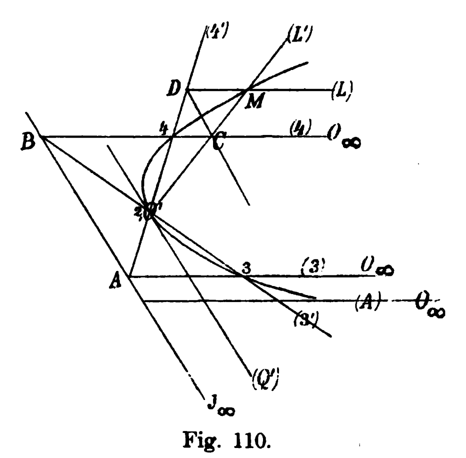


Fig. 110.

Übergehend auf die eigentliche Aufgabe, seien in Fig. 110 wieder 2, 3 und 4 die drei gegebenen Punkte der Parabel, während die Gerade (A) die Richtung der Achse darstellt. Den unendlich fernen Punkt O_∞ von (A) wähle man nun zum Mittelpunkte des einen, den Punkt 2 aber zum Mittelpunkte O' des anderen Strahlenbüschels und verbinde dann O_∞ und O' durch Strahlen mit den beiden anderen noch gegebenen Punkten 3 und 4, wodurch sich

die Strahlenpaare (3), (3') und (4), (4') ergeben, und es ist an sich klar, dass (3) und (4) parallel zur Achse der Parabel gerichtet sein müssen. Um nun das Directionscentrum J derjenigen projectivischen Strahlenbüschel zu finden, welche sich ergeben, wenn man die Punkte O' und O_∞ mit sämmtlichen Punkten der Parabel durch Strahlen verbindet, bringe man (3) und (4'), sowie (3') und (4), zum Schnitte, wodurch man die Punkte A und B erhält, und verbinde die letzteren durch eine Gerade; der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Asymptote der Parabel, d. h. der unendlich ferne Punkt J_∞ von AB, ist dann das gesuchte Directionscentrum und daher auch die durch O' gezogene Parallele zur Geraden AB die im Punkte O' an die Parabel gelegte Tangente (Q'). Irgend ein Curvenpunkt M wird nun erhalten, wenn man durch O' einen Strahl (L') legt, diesen mit (4) in C zum Schnitte bringt, durch C eine Parallele zieht zur Geraden AB, welche den Strahl (4') im Punkte D trifft, und endlich durch D einen zu (A) parallelen Strahl (L) legt, welcher (L') im Curvenpunkte M durchschneidet.

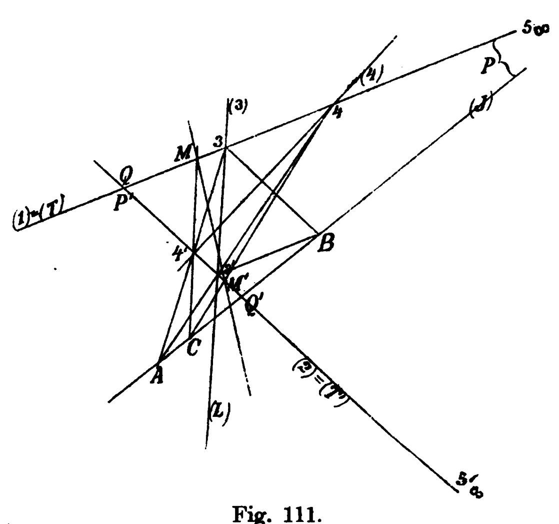


Fig. 111.

2. Aufgabe. In der vorigen Aufgabe wurde darauf hingewiesen, dass die unendlich ferne Gerade der Ebene einer Parabel gleichzeitig eine Tangente der letzteren dar-

stellt, weshalb in Anbetracht des in § 55 gegebenen Satzes, nach welchem ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten eindeutig bestimmt erscheint, erhellt, dass eine Parabel durch die Angabe von vier Tangenten (1), (2), (3) und (4) ebenfalls gegeben ist. Behufs Construction weiterer Tangenten dieser Curve, wähle man nun wieder zwei von den gegebenen Tangenten, z. B. (1) und (2), als die Träger (T) und (T') zweier projectivischer Punktreihen (Fig. 111) und bringe dann diese mit den drei übrigen Tangenten (3), (4) und (L_∞) = (5) zum Schnitte, wodurch man drei Paare 3, 3'; 4, 4' und 5_∞, $5_\infty'$ entsprechender Punkte derjenigen zwei projectivischen Punktreihen erhält, die sich ergeben, wenn man sämmtliche Tangenten der Parabel mit (1) und (2) zum Schnitte bringt. Hierbei bezeichnen noch 5_∞ und $5_\infty'$ die beiden Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden (L_∞) mit den Tangenten (1) und (2) oder die unendlich fernen Punkte der letzteren. Um nun diese Punktreihen zu vervollständigen, wie es die constructive Bestimmung weiterer Tangenten der Parabel erfordert, hat man zunächst wieder die Directionsachse (J) vorliegender Punktreihen zu ermitteln, und ergibt sich dieselbe nach § 37 als die Verbindungsgerade der beiden Punkte A und B, von welchen ersterer den Schnittpunkt der Geraden 34' und 3'4, letzterer aber den Schnittpunkt der aus 3 parallel zu (2) und aus 3' parallel zu (1) gelegten Geraden darstellt. Irgend eine weitere Tangente der Parabel wird jetzt in der bereits bekannten Weise gefunden. Man wähle nämlich auf (T) einen Punkt M, verbinde diesen durch eine Gerade mit 4' und verlängere dieselbe bis zu ihrem Durchschnitte C mit (J); die Verbindungsgerade von C mit 4 durchschneidet hierauf (T') in dem Punkte M', der mit M geradlinig verbunden, eine Tangente (L) der Parabel bestimmt.

§ 84. Weitere hierher gehörige Aufgaben über Kegelschnitte.

1. Aufgabe. Ein Kegelschnitt sei gegeben durch ein Paar conjugierter Diameter (δ_1) und (δ_2), sowie durch zwei Tangenten (T_1) und (T_2); man construiere diese Curve.

Lösung. Zunächst wird bemerkt, dass nach dem in § 71 und § 72 bereits Erörterten, (δ_2) die Polare des

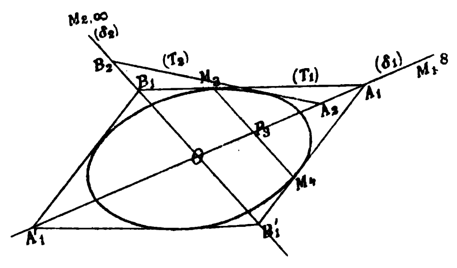


Fig. 112.

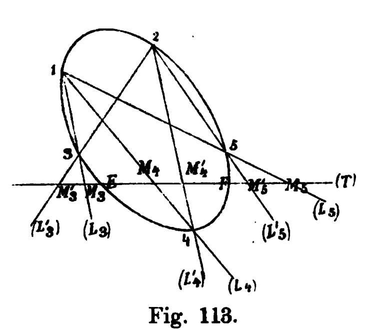
unendlich fernen Punktes $M_{1,\infty}$ von (δ_1) und (δ_1) die Polare des unendlich fernen Punktes $M_{2,\infty}$ von (δ_2) repräsentiert, weshalb, wie man bei der Polarisation gesehen hat, der Durchmesser (δ_1) den geometrischen Ort der Pole aller zu dem Diameter (δ_2) parallelen Geraden darstellt. Ist somit M_3M_4 in Fig. 112 die Polare des in (δ_1) liegenden Punktes A_1, so erscheint M_3M_4 parallel zu (δ_2), und weil, zufolge eines in § 70 aufgestellten Satzes, die Verbindungsgerade des Mittelpunktes P_3 der Berührungssehne M_3M_4 mit A_1 gleichzeitig durch den Mittelpunkt O des Kegelschnittes geht, so ist auch $OB_1 = B_1'O$, wenn B_1 und B_1' diejenigen Punkte bezeichnen, in welchen die beiden aus A_1 an den Kegelschnitt gelegten Tangenten den Durchmesser (δ_2) durchschneiden. Nun sind aber gleichzeitig A_1 und B_1 die Schnittpunkte der Tangente (T_1) mit den Durchmessern (δ_1) und (δ_2); man findet daher die zweite aus A_1 an den Kegelschnitt legbare Tangente, wenn man $B_1'O = OB_1$ macht und hierauf A_1 mit B_1' durch eine Gerade verbindet. Ebenso einfach lässt sich aber noch eine vierte und fünfte Tangente aus den gegebenen Gebilden herleiten, und hat man zu diesem Zwecke bloß $A_1'O = OA_1$ zu machen und alsdann den so gefundenen Punkt A_1' mit den Punkten B_1 und B_1' durch je einen Strahl zu verbinden. Aus den zwei gegebenen Tangenten (T_1), (T_2) und den drei eben gefundenen B_1A_1', $A_1'B_1'$ und $B_1'A_1$ lässt sich aber der Kegelschnitt mittelst der in § 82 angegebenen Methode leicht construieren, und ist damit gleichzeitig noch der Beweis erbracht, dass ein centraler Kegelschnitt durch die Angabe eines Paars conjugierter Durchmesser und zweier Tangenten eindeutig bestimmt erscheint.

Noch einfacher gestaltet sich die Lösung, wenn an Stelle der beiden Tangenten (T_1) und (T_2) zwei Punkte M_1 und M_2 des Kegelschnittes gegeben sind, welche jedoch nicht in einer zu einem der beiden Durchmesser (δ_1) oder (δ_2) parallelen Geraden liegen. Hier hat man nämlich durch M_1 und M_2 zwei Parallele zu (δ_2) zu legen, welche den Durchmesser (δ_1) in den Punkten P_1 und P_2 durchschneiden, und $M_3P_1 = P_1M_1$, $M_4P_2 = P_2M_2$ zu machen, und erhält auf diese Weise zwei neue Punkte M_3 und M_4 der Curve, während ein fünfter Punkt M_5 dadurch gewonnen werden kann, dass man nämlich durch M_3 eine Parallele zu (δ_1) zieht und $M_3P_3 = P_3M_5$ macht, wenn P_3 den Schnittpunkt dieser Parallelen mit (δ_2) bezeichnet. Aus den fünf Punkten $M_1 \dots M_5$ lässt sich aber der Kegelschnitt, wie in § 82 gezeigt wurde, wieder construieren.

2. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist gegeben durch fünf Tangenten; man bestimme seinen Mittelpunkt.

Lösung. Man bezeichne die fünf gegebenen Tangenten mit (1)....(5) und nenne $M_1 \dots M_5$ ihre Berührungspunkte mit dem durch sie bestimmten Kegelschnitte, dagegen $M_{1,2}$, $M_{1,3} \dots$ die Schnittpunkte der Tangenten (1) und (2), (1) und (3).... Die Punkte M_1, $M_2 \dots$ sind unbekannt, lassen sich aber leicht aus den gegebenen Tangenten herleiten. So findet man z. B. die Punkte M_1 und M_2, wenn man die Tangenten (1) und (2) als die Träger zweier projectivischer Punktreihen ansieht, welche bestimmt erscheinen durch die drei Schnittpunktpaare 3, 3'; 4, 4' und 5, 5' dieser Tangenten mit den drei noch übrigen Tangenten (3), (4) und (5), und die Directionsachse obiger zwei Punktreihen ermittelt; die Punkte, in welchen diese Directionsachse die Tangenten (1) und (2) durchschneidet, sind dann die Berührungspunkte M_1 und M_2, und weil gleichzeitig die Sehne M_1M_2 die Polare des Punktes $M_{1,2}$ darstellt, so ist die Verbindungsgerade des Mittelpunktes von M_1M_2 mit dem Punkte $M_{1,2}$ ein Durchmesser des Kegelschnittes. In derselben Weise lässt sich aber ein zweiter Durchmesser der Curve ermitteln; man braucht zu diesem Zwecke bloß den Berührungspunkt M_3

der Tangente (3) mit dem Kegelschnitte zu suchen, was wieder mittelst der Directionsachse geschieht, wobei man jedoch (1) und (3) als die Träger der beiden projectivischen Punktreihen anzusehen hat, die Sehne $M_1 M_3$ zu halbieren und durch den Halbierungspunkt und den Schnittpunkt $M_{1,3}$ eine Gerade zu legen. Es ist klar, dass der Schnittpunkt M_0 dieser beiden Durchmesser das gesuchte Centrum des Kegelschnittes repräsentiert. Verbindet man nun M_0 mit M_3 durch die Gerade (δ_3) und legt durch M_0 eine Parallele (δ_3') zu (3), so sind gleichzeitig (δ_3) und (δ_3') ein Paar conjugierter Diameter.


Fig. 113.

3. Aufgabe. Ein Kegelschnitt sei gegeben durch fünf Punkte, man bestimme seine beiden Schnittpunkte mit einer Geraden, ohne den Kegelschnitt zu construieren.

Lösung. Man verbinde (Fig. 113) von den gegebenen fünf Punkten 1, 2, 3, 4 und 5 des Kegelschnittes zwei davon, z. B. 1 und 2, durch Strahlen mit den drei übrigen Punkten 3, 4, 5, und erhält auf diese Weise drei Paare entsprechender Strahlen (L_3), (L_3'); (L_4), (L_4') und (L_5), (L_5') derjenigen projectivischen Strahlenbüschel, deren Erzeugnis der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmte Kegelschnitt ist, und deren Mittelpunkte die Curvenpunkte 1 und 2 sind. (§ 80.) Diese drei Strahlenpaare durchschneiden die Transversale (T), deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte 12345 zu ermitteln sind, in den Punktpaaren M_3, M_3'; M_4, M_4' und M_5, M_5' und dieselben bestimmen gleichzeitig diejenigen zwei conlocalen und projectivischen Punktreihen, welche man erhält als das Ergebnis des Schnittes von (T) mit den eben erwähnten Strahlenbüscheln. Nachdem nun zwei Strahlen (L) und (L'), welche einen Punkt P der Curve mit 1 und 2 verbinden, die Transversale (T) in einem Paar entsprechender Punkte M, M' der durch die Paare M_3, M_3'; M_4, M_4' und M_5, M_5' bestimmten projec-

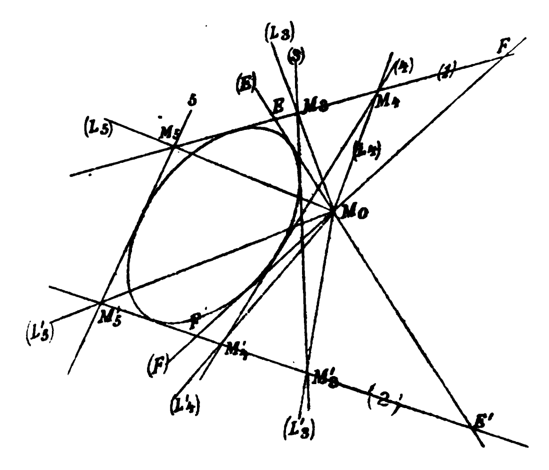


Fig. 114.

tivischen Punktreihen durchschneiden, und M mit M' nur dann zusammenfällt, wenn P gleichzeitig auf (T) liegt, so sind die beiden tautologen Elemente E und F der durch die obigen drei Paare entsprechender Punkte bestimmten projectivischen Punktreihen zugleich die gesuchten Schnittpunkte von (T) mit dem Kegelschnitte 12345. Aus M_3 M_3'; M_4, M_4' und M_5, M_5' können aber die tautologen Punkte nach der in § 38, Fig. 49, bereits gegebenen Methode sofort gefunden werden und damit die in Frage stehenden Schnittpunkte selbst.

4. Aufgabe. Ein Kegelschnitt sei gegeben durch fünf Tangenten; man bestimme das aus einem Punkte M_0 an den Kegelschnitt gelegte Tangentenpaar, ohne die Curve zu construieren.

Lösung. Man bringe von den fünf gegebenen Tangenten (1), (2), (3), (4) und (5) des Kegelschnittes zwei davon, z. B. (1) und (2), zum Schnitte mit den drei übrigen, und erhält so drei Paare entsprechender Punkte M_3, M_3'; M_4, M_4' und M_5, M_5' derjenigen projectivischen Punktreihen, deren Erzeugnis der durch diese fünf Tangenten bestimmte Kegelschnitt ist und deren Träger die Tangenten (1) und (2) sind. (§ 80.) Diese drei Paare verbinde man nun (Fig. 114) durch Strahlen mit dem Punkte M_0, wo-

durch man drei Paare entsprechender Strahlen (L_3), (L_3'); (L_4), (L_4') und (L_5), (L_5') von zwei projectivischen conlocalen Strahlenbüscheln erhält. Repräsentiert nun (L), (L') irgend ein Paar entsprechender Elemente der beiden eben definierten projectivischen Strahlenbüschel und durchschneidet (L) die Tangente (1) im Punkte M, dagegen (L') die Tangente (2) im Punkte M', so ist wieder M, M' ein Paar entsprechender Elemente der durch die drei Paare M_3, M_3'; M_4, M_4' und M_5, M_5' gegebenen projectivischen Punktreihen, weshalb auch die Verbindungsgerade MM' eine Tangente des Kegelschnittes sein muss. (§ 80.) In dem besonderen Fall, wo aber die Gerade MM' durch das gemeinsame Centrum M_o der beiden hier in Betracht kommenden conlocalen projectivischen Strahlenbüschel geht, fällt jedoch (L) mit (L') zusammen und demnach sind auch gleichzeitig die beiden tautologen Strahlen (E) und (F) obiger Strahlenbüschel die aus M_o an den Kegelschnitt legbaren Tangenten. Man hat somit bloß aus den drei Paaren (L_3), (L_3'); (L_4), (L_4') und (L_5), (L_5') nach der in § 38, Fig. 49, angegebenen Methode die beiden Doppelstrahlen (E) und (F) zu ermitteln, welche zugleich die gesuchten Tangenten darstellen.

§ 85. **Sätze von Pascal und Briauchon. — Anwendungen.**

Satz von Pascal. Sind M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 und M_6 sechs Punkte eines Kegelschnittes, so durchschneiden sich die Verbindungsgeraden M_1M_2 und M_4M_5, M_2M_3 und M_5M_6, M_3M_4 und M_6M_1 in drei Punkten einer und derselben Geraden, der Pascal'schen Geraden.

Satz von Briauchon. Sind (T_1), (T_2), (T_3), (T_4), (T_5) und (T_6) sechs Tangenten eines Kegelschnittes, so durchschneiden sich die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $\overline{(T_1)(T_2)}$ und $\overline{(T_4)(T_5)}$, $\overline{(T_2)(T_3)}$ und $\overline{(T_5)(T_6)}$, $\overline{(T_3)(T_4)}$ und $\overline{(T_6)(T_1)}$ in einem und demselben Punkte, dem Briauchon'schen Punkte.

Beweis. In dem Folgenden bezeichne man die Seiten M_1M_2, M_2M_3 ......

Beweis. In dem Folgenden bezeichne man die Ecken $\overline{(T_1)(T_2)}$; $\overline{(T_2)(T_3)}$..

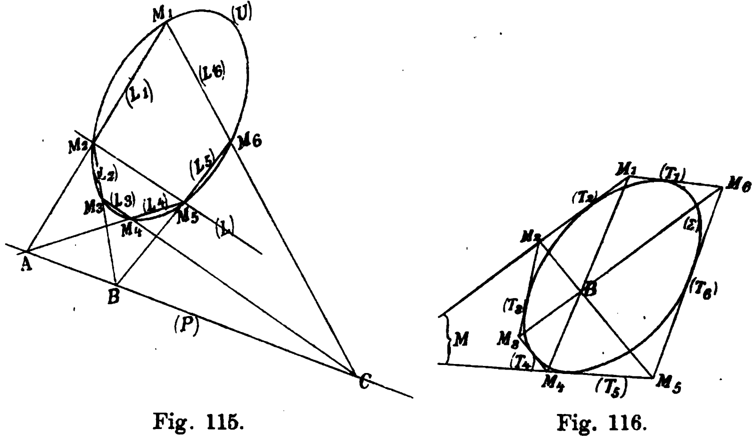


Fig. 115. Fig. 116.

$M_6 M_1$ des dem Kegelschnitte $U = o$ eingeschriebenen einfachen Sechsecks $M_1 M_2 \dots M_6$ (Fig. 115) kurz mit (L_1), $(L_2) \dots (L_6)$, dagegen die Verbindungsgerade $M_2 M_5$ mit (L); die Gleichungen dieser Geraden seien: $L_1 = o$, $L_2 = o \dots L_6 = o$ und $L = o$, wenn noch $L_i = A_i x + B_i y + C_i$, $i = 1, 2 \dots 6$, und $L = Ax + By + C$ gesetzt wird.

$\dots \overline{(T_6)}\overline{(T_1)}$ des dem Kegelschnitte $\Sigma = o$ umgeschriebenen einfachen Sechsseits $(T_1)(T_2)\dots(T_6)$ mit M_1, $M_2 \dots M_6$ (Fig. 116), dagegen den Schnittpunkt der Tangenten (T_2) und (T_5) mit M; die Gleichungen dieser Punkte seien: $M_1 = o$, $M_2 = o \dots \dots M_6 = o$ und $M = o$, wenn noch $M_i = A_i u + B_i v + C_i$, $i = 1,2,3 \dots 6$, und $M = Au + Bv + C$ gesetzt wird.

Alsdann repräsentiert die Gleichung

$$(a) \dots L_1 L_5 - \lambda L L_6 = o, \quad M_1 M_5 - \lambda M M_6 = o \dots (e)$$

wenn in derselben λ einen veränderlichen Parameter darstellt, den Inbegriff aller derjenigen Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte M_1, M_2, M_5 und M_6 gelegt werden können, oder, wie man später sehen wird, einen Kegelschnittsbüschel von den Grundpunkten M_1, M_2, M_5 und M_6.

von den vier Geraden (T_1), (T_2), (T_5) und (T_6) berührt werden, oder, wie man später sehen wird, eine Kegelschnittsreihe von den Grundstrahlen (T_1), (T_2), (T_5) und (T_6).

Denn legt man dem Parameter λ irgend einen speciellen Wert bei, so ist (a), sowie (e), die Gleichung eines bestimmten Kegelschnittes, und diese Gleichung wird befriedigt, sobald man darin für

x und y solche Werte substituiert, die aus einem der vier Gleichungspaare $L_1 = o$ und $L = o$, $L_1 = o$ und $L_6 = o$, $L_5 = o$ und $L = o$, $L_5 = o$ und $L_6 = o$ hervorgehen. Selbstverständlich ist gleichfalls

$$(b) \ldots L_2 . L_4 - \mu L L_3 = o$$

die Gleichung eines Kegelschnittsbüschels, jedoch von den Grundpunkten M_2, M_3, M_4 und M_5, sobald auch hier wieder der Parameter μ als veränderlich angenommen wird. Nachdem aber der Kegelschnitt $U = o$ den durch die beiden letzten Gleichungen gegebenen zwei Kegelschnittsbüscheln gleichzeitig angehört, muss ein Wertesystem von λ und μ existieren, ich nenne es λ_o und μ_o, für welches die Gleichungen (a) und (b) einen und denselben Kegelschnitt, nämlich jenen $U = o$, darstellen, weshalb auch die in (a) und (b) erscheinenden Gleichungspolynome nur durch einen Factor ϱ von einander sich unterscheiden können, wenn man daselbst $\lambda = \lambda_o$ und $\mu = \mu_o$ setzt.

u und v solche Werte substituiert, die aus einem der vier Gleichungspaare $M_1 = o$ und $M = o$, $M_1 = o$ und $M_6 = o$, $M_5 = o$ und $M = o$, $M_5 = o$ und $M_6 = o$ hervorgehen. Selbstverständlich ist gleichfalls

$$M_2 M_4 - \mu M M_3 = o \ldots (f)$$

die Gleichung einer Kegelschnittsreihe, jedoch von den Grundstrahlen (T_2), (T_3), (T_4) und (T_5), sobald auch hier wieder der Parameter μ als veränderlich angenommen wird. Nachdem aber der Kegelschnitt $\Sigma = o$ den durch die beiden letzten Gleichungen gegebenen Kegelschnittsreihen gleichzeitig angehört, muss ein Wertesystem von λ und μ existieren, ich nenne es λ_o und μ_o, für welches die Gleichungen (e) und (f) einen und denselben Kegelschnitt, nämlich jenen $\Sigma = o$, darstellen, weshalb auch die in (e) und (f) erscheinenden Gleichungspolynome nur durch einen Factor ϱ von einander sich unterscheiden können, wenn man daselbst $\lambda = \lambda_o$ und $\mu = \mu_o$ setzt.

Aus der mittelst dieser Betrachtung gewonnenen Identität

$L_1 . L_5 - \lambda_o L . L_6 =$ $\varrho . (L_2 . L_4 - \mu_o L . L_3)$	$M_1 . M_5 - \lambda_o M . M_6 =$ $\varrho (M_2 . M_4 - \mu_o M . M_3)$

folgt aber

$L_1 . L_5 - \varrho L_2 L_4 =$ $L . (\lambda_o L_6 - \mu_o \varrho L_3),$	$M_1 . M_5 - \varrho M_2 M_4 =$ $M . (\lambda_o M_6 - \mu_o \varrho M_3),$

und stellen demnach die beiden Gleichungen

$(c) \ldots \quad L_1 . L_5 - \varrho L_2 L_4 = o,$ $(d) \ldots \; L . (\lambda_o L_6 - \mu_o \varrho L_3) = o$	$M_1 . M_5 - \varrho M_2 M_4 = o, \ldots (g)$ $M . (\lambda_o M_6 - \mu_o \varrho M_3) = o \ldots (h)$

einen und denselben Kegelschnitt dar.

Aus dem Baue der Gleichung (c) ersieht man aber, dass dieser Kegelschnitt durch die Punkte M_2, A, B und M_5 geht, während die Gleichung (d) wieder aussagt, dass besagter Kegelschnitt aus zwei Geraden besteht, von welchen die eine die Gerade (L) ist, während die andere den Schnittpunkt C der beiden Strahlen (L_3) und (L_6) enthält. Damit erscheint aber auch gleichzeitig erwiesen, dass die drei Punkte A, B und C in einer und derselben Geraden (P) liegen müssen.

Aus dem Baue der Gleichung (g) ersieht man aber, dass dieser Kegelschnitt von den Geraden (T_2), $M_1 M_4$, $M_2 M_5$ und (T_5) berührt wird, während die Gleichung (h) wieder aussagt, dass besagter Kegelschnitt aus zwei Punkten besteht, von welchen der eine der Punkt M ist, während der andere in der Geraden $M_3 M_6$ liegt. Damit erscheint aber auch gleichzeitig erwiesen, dass die Geraden $M_1 M_4$, $M_2 M_5$ und $M_3 M_6$ in einem und demselben Punkte B sich durchschneiden müssen.

Mittelst der eben bewiesenen Sätze von Pascal und Briauchon ist man nun wieder im Stande, eine Reihe wichtiger Anfgaben über Kegelschnitte zu lösen, und wir führen noch zum Schlusse dieses Capitels einige davon vor.

1. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist gegeben durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4 und 5; man construiere denselben.

2. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist gegeben durch fünf Tangenten (1), (2), (3), (4) und (5); man construiere denselben.

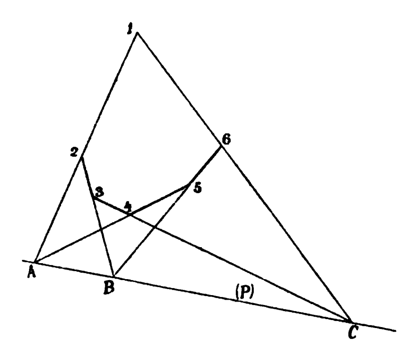


Fig. 117.

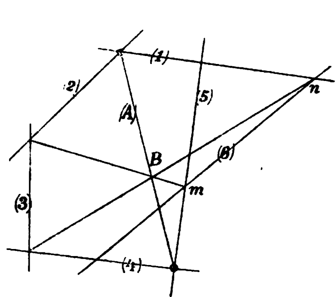


Fig. 118.

Lösung. Man bringe (Fig. 117) die Verbindungsgeraden 1 2 und 4 5 zum Schnitte, wodurch man den Punkt A erhält, und lege durch A eine Gerade (P), die man als die Pascal'sche Gerade auffasst. Nun verlängere man die Verbindungsgerade 2 3 bis zu ihrem Durchschnitte B mit (P) und verbinde hierauf die Punkte B und 5 durch einen Strahl, wodurch man nach dem Pascal'schen Satze bereits eine Gerade erhält, in welcher ein sechster Punkt 6 des Kegelschnittes liegen muss. Eine zweite Gerade, in welcher dieser Punkt 6 ebenfalls liegt, ergibt sich nach dem eben angeführten Satze, wenn man den Schnittpunkt C der Verbindungsgeraden 3 4 mit (P) durch einen Strahl und dem Punkte 1 verbindet; der Durchschnitt der beiden

Lösung. Man verbinde (Fig. 118) die Schnittpunkte der Tangenten (1), (2) und (4), (5) durch eine Gerade (A) und nehme in derselben einen Punkt B an, welchen man als den Briauchon'schen Punkt ansieht. Nun verbinde man den Schnittpunkt der beiden Tangenten (2), (3) mit dem Punkte B durch einen Strahl, welcher die Tangente (5) im Punkte m durchschneidet, und erhält so nach dem Satze von Briauchon einen Punkt einer sechsten Tangente (6) des Kegelschnittes. Ein zweiter Punkt dieser Tangente ergibt sich als Schnittpunkt n der Tangente (1) mit der Verbindungsgeraden des Punktes B mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten (3) und (4). Die durch die Punkte m und n gelegte Gerade repräsentiert dann die Tangente (6) des Kegelschnittes. Es ist auch

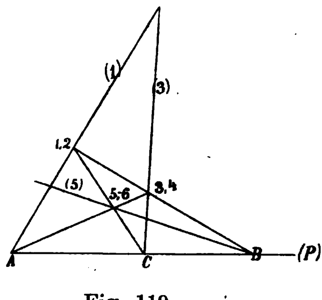


Fig. 119.

Fig. 120.

Geraden $B\,5$ und $C\,1$ ist dann der Curvenpunkt 6. Es ist klar, dass einer jeden durch A gelegten Geraden (P) ein anderer Punkt des Kegelschnittes entspricht, und dass man sonach in der Lage ist, beliebig viele Punkte der Curve constructiv zu bestimmen und damit diese selbst.

3. Aufgabe. Ein Kegelschnitt sei gegeben durch zwei Tangenten (1), (3) und deren Berührungspunkte $1 = 2$, $3 = 4$ mit der Curve, sowie durch einen fünften Punkt 5; man bestimme die Tangente (5), gelegt in diesem Punkte an den so bestimmten Kegelschnitt, ohne letzteren zu verzeichnen.

Lösung. Die Verbindungsgeraden 1 2 und 3 4 (Fig. 119) sind hier identisch mit den beiden gegebenen Tangenten, während die zu suchende Tangente (5) im Punkte 5 angesehen werden hier wieder klar, dass einem jeden in (A) liegenden Punkte B eine andere Tangente des Kegelschnittes entspricht, und dass man sonach in der Lage ist, beliebig viele Tangenten zu construieren und dann die Curve selbst zu verzeichnen.

4. Aufgabe. Ein Kegelschnitt sei gegeben durch zwei Tangenten $(1) = (2)$, $(3) = (4)$ und deren Berührungspunkten 1 und 3 mit der Curve, sowie durch eine fünfte Tangente (5); man bestimme den Berührungspunkt 5 der Tangente (5) mit dem so bestimmten Kegelschnitte, ohne letzteren zu verzeichnen.

Lösung. Die Berührungspunkte 1 und 3 (Fig. 120) sind identisch mit den Schnittpunkten der Tangenten (1) und (2), beziehungsweise (3) und (4), während der zu suchende Berührungspunkt 5

kann als die Verbindungsgerade der beiden Punkte 5 und 6, wobei noch bemerkt wird, dass die Punkte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 je ein Paar zusammenfallender Punkte der Curve repräsentieren. Nach dem Satze von Pascal hat man daher nachfolgendes Verfahren einzuschlagen, um die Tangente (5) constructiv zu bestimmen. Man verbinde nämlich die gegebenen Punkte 4 und 5 durch eine Gerade und verlängere diese bis zu ihrem Durchschnitte A mit der Tangente (1), ziehe hierauf den Strahl 1 6, welcher die Tangente (3) im Punkte C durchschneidet, und verbinde dann die so gefundenen Punkte A und C durch eine Gerade (P). Letztere wird nun von der Verbindungsgeraden 2 3 in dem Punkte B geschnitten, und der durch letzteren und den Punkt 5 gelegte Strahl ist die Gerade 5 6 oder die gesuchte Tangente (5).

5. Aufgabe. Wie in 3, nur sind (1) und (3) die beiden Asymptoten des Kegelschnittes, welcher diesmal eine Hyperbel ist.

Lösung. Hier sind die Berührungspunkte von (1) und

angesehen werden kann als der Schnittpunkt der Tangenten (5) und (6), wobei wieder hervorgehoben wird, dass hier (1) und (2), (3) und (4), (5) und (6) je ein Paar zusammenfallender Tangenten der Curve repräsentieren. Nach dem Satze von Briauchon ist sonach, behufs constructiver Bestimmung des Berührungspunktes 5, folgender Weg einzuschlagen. Man verbinde nämlich den Schnittpunkt der Tangenten (1) und (2) oder den Berührungspunkt 1 durch einen Strahl (A) mit dem Schnittpunkte der Tangenten (4) und (5), desgleichen den Schnittpunkt der Tangenten (3) und (4) oder den Berührungspunkt 3 durch die Gerade (C) mit jenem Punkte, in welchem die Tangenten (1) und (6) sich treffen; der den Strahlen (A) und (C) gemeinsame Punkt B bestimmt nun mit dem Schnittpunkte der Tangenten (2) $=$ (1) und (3) $=$ (4) die Gerade (B), welche die Tangente (5) in dem gesuchten Punkte 5 trifft.

6. Aufgabe. Wie in 4, nur sind (1) und (3) die beiden Asymptoten des Kegelschnittes, welcher diesmal eine Hyperbel ist.

Lösung. In dem vorliegenden Fall (Fig. 122) ist der

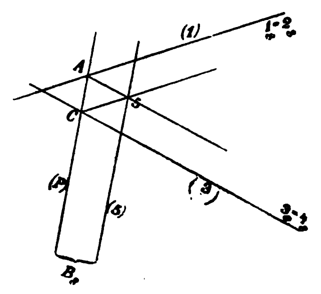


Fig. 121.

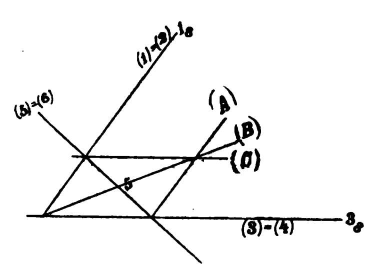


Fig. 122.

(3) mit dem Kegelschnitte die unendlich fernen Punkte $1_\infty = 2_\infty$ und $3_\infty = 4_\infty$ dieser Geraden (Fig. 121). Man ziehe deshalb durch den Punkt 5 einen Strahl, welcher zu der einen Asymptote (3) parallel gerichtet erscheint und die andere (1) im Punkte A trifft, lege hierauf durch den nämlichen Punkt 5 eine Parallele zu der Asymptote (1) und erhält als Schnitt mit (3) den Punkt C. Diese beiden eben gefundenen Punkte A und C bestimmen nun wieder die Gerade (P); der durch den Punkt 5 parallel zu (P) gelegte Strahl ist dann die Tangente (5), gelegt im Punkte 5 an die Hyperbel.

Schnittpunkt von (1) mit (2) der unendlich ferne Punkt 1_∞ von (1), desgleichen repräsentiert auch der unendlich ferne Punkt 3_∞ von (3) den Schnittpunkt von (3) mit (4). Der Berührungspunkt 5 der Tangente (5) mit der Hyperbel wird sonach in nachfolgender Weise gefunden. Man ziehe nämlich aus dem Schnittpunkte von (3) mit (5) eine Parallele (A) zu (1), ebenso aus dem Schnittpunkte der Strahlen (1) und (5) eine Parallele (C) zu (3), und verbinde hierauf den gemeinsamen Punkt von (A) und (C) durch eine Gerade (B) mit dem Schnittpunkte von (1) und (3); alsdann trifft (B) die Tangente (5) in dem zu suchenden Punkte 5.

Capitel XIV.

Kegelschnittsbüschel und Kegelschnittsreihe.

(Invariantentheorie der Kegelschnitte.)

§ 86. Transformation der Gleichungen $U = o$ und $\Sigma = o$ auf ein anderes Coordinatendreieck.

Die in den früheren Paragraphen bereits vielfach in Anwendung gekommene allgemeine Gleichung der Curven 2. Ordnung $U \equiv \int a_{i,k}\, x_i x_k = o$ lässt sich auch kürzer darstellen durch eine der symbolischen Gleichungen:

$$(448)\ldots \quad a_x{}^2 = o, \qquad b_x{}^2 = o, \qquad c_x{}^2 = o,$$

wenn

$$(449)\ldots \quad \begin{aligned} a_x &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ b_x &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ c_x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \end{aligned}$$

ist und die hier vorkommenden symbolischen Coefficienten a_i, b_i, c_i den Relationen unterliegen:

$$(450)\ldots \quad \begin{aligned} a_{1,1} &= a_1{}^2 = b_1{}^2 = c_1{}^2, \\ a_{1,2} &= a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_{3,3} &= a_3{}^2 = b_3{}^2 = c_3{}^2. \end{aligned}$$

Dadurch wird nun zunächst die Discriminante der ternären Form $U = \int a_{i,k}\, x_i x_k$ oder $a_x{}^2$ gleich

$$A = \begin{vmatrix} a_1{}^2, & a_1 a_2, & a_1 a_3 \\ b_1 b_2, & b_2{}^2, & b_2 b_3 \\ c_1 c_3, & c_2 c_3, & c_3{}^2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt, wenn man die rechts vom Gleichheitszeichen aus den symbolischen Coefficienten a_i, b_i und c_i gebildete 3^2 elementige Determinante mit dem Symbol $(a\,b\,c)$ bezeichnet und gleichzeitig darauf Bedacht nimmt, dass die gleichwertigen symbolischen Coefficienten a_i, b_i und c_i beliebig mit einander vertauscht werden können,

$$A = a_1 b_2 c_3 (a\,b\,c) = a_1 c_2 b_3 (a\,c\,b) = b_1 a_2 c_3 (b\,a\,c) = b_1 c_2 a_3 (b\,c\,a) = c_1 a_2 b_3 (c\,a\,b) = c_1 b_2 a_3 (c\,b\,a),$$

mithin

(451) . . . $$A = \frac{1}{6}(abc)^2.$$

Wir werden in Hinkunft von dieser symbolischen Gleichung häufig Gebrauch machen und versuchen nun mit derselben zu ergründen, was mit der Discriminante A geschieht, wenn man die Gleichung $U = o$ auf ein anderes Coordinatendreieck bezieht. Nennt man zu diesem Zwecke x_i' die trimetrischen Coordinaten irgend eines Punktes der Curve, bezogen auf das neue Coordinatendreieck, so bestehen nach § 29 zwischen diesen und den Coordinaten x_i desselben Punktes die drei Beziehungen:

(452) . . . $$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 x_1' + \eta_1 x_2' + \zeta_1 x_3', \\ x_2 &= \xi_2 x_1' + \eta_2 x_2' + \zeta_2 x_3', \\ x_3 &= \xi_1 x_3' + \eta_3 x_2' + \zeta_3 x_3', \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, wenn man dieselben der Reihe nach mit den symbolischen Coefficienten a_1, a_2, a_3 multipliciert und dann addiert:

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3) x_1' + (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3) x_2' + (a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + a_3 \zeta_3) x_3' = a_1' x_1' + a_2' x_2' + a_3' x_3' = a'_{x'}.$$

Die auf das neue Coordinatendreieck transformierte Gleichung vorliegender Curve 2. Ordnung lautet sonach in symbolischer Form:

(a) . . . $$a'^2_{x'} = o, \quad b'^2_{x'} = o, \quad c'^2_{x'} = o,$$

und es ist hierin wieder

(b) . . . $$\begin{aligned} a'_{x'} &= a_1' x_1' + a_2' x_2' + a_3' x_3', \\ b'_{x'} &= b_1' x_1' + b_2' x_2' + b_3' x_3', \\ c'_{x'} &= c_1' x_1' + c_2' x_2' + c_3' x_3', \end{aligned}$$

wobei die hier vorkommenden symbolischen Coefficienten a_i' . . . . . den Relationen unterliegen:

(c) . . . $$a_1' = \int_{i=1}^{i=3} a_i \xi_i, \quad a_2' = \int_{i=1}^{i=3} a_i \eta_i, \quad a_3' = \int_{i=1}^{i=3} a_i \zeta_i.$$

Es ist demnach auch die Discriminante der transformierten Form $a'^2_{x'} = b'^2_{x'} = \ldots\ldots$ gleich

$$A' = \frac{1}{6}(a' b' c')^2,$$

und weil die 3^2 elementige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int a_i \xi_i, & \int a_i \eta_i, & \int a_i \zeta_i \\ \int b_i \xi_i, & \int b_i \eta_i, & \int b_i \zeta_i \\ \int c_i \xi_i, & \int c_i \eta_i, & \int c_i \zeta_i \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ist, so besteht, wenn man noch die Determinante der Substitution mit δ bezeichnet, also setzt

(453) . . . $\delta = (\xi \eta \zeta)$,

zwischen $(a' b' c')$ und $(a b c)$ die Beziehung

(454) . . . $(a' b' c') = \delta . (a b c)$,

weshalb auch nach Gl. (451)

(455) . . . $A' = \delta^2 . A$

wird. Nun versteht man unter einer Invariante einer homogenen Function oder Form***) $f(x_1 x_2 x_3)$ diejenige aus den Coefficienten dieser Form gebildete Function, welche bis auf einen constanten Factor δ^ϱ unverändert bleibt, wenn man unter Voraussetzung linearer Transformationen, diese Coefficienten ersetzt durch jene der transformierten Form. Dabei heißt die hier vorkommende Größe δ der Modul. Es ist klar, dass die eben gegebene Definition einer Invariante auch dann aufrecht erhalten bleibt, wenn in der Form $f(x_1 x_2 x_3)$ an Stelle der trimetrischen Punktcoordinaten trigonale Liniencoordinaten treten, und dass das Verschwinden einer Invariante solche Eigenschaften der Curve $f(x_1 x_2 x_3) = o$ ausdrückt, welche durch lineare Transformationen unzerstörbar sind. In Anbetracht der eben gegebenen Definition ist daher nach Gl. (455) auch die Discriminante A der ternären Form $U = \int a_{i,k} x_i x_k$ eine Invariante der letzteren, und drückt sonach die Ret.: $A = o$ die Bedingung aus, unter welcher die Gl. $U = o$ ein Geradenpaar darstellt, gleichgiltig auf welches Coordinatendreieck diese Gleichung sich bezieht.

Wir haben bereits gesehen, dass die symbolische Gleichung $a_x{}^2 = o$ durch die lineare Transformation (452) übergeht in $a'_{x'}{}^2 = o$, wobei noch $a_x{}^2 = a'_{x'}{}^2$ ist. Von selbst

***) Siehe: Invariantentheorie von Gordan.

tritt nun die Frage heran, was geschieht bei dieser Transformation mit der reciproken Gleichung $\int A_{i.k} u_i u_k = o$ von $a_x{}^2 = o$? Diese Frage kann aber erst dann beantwortet werden, wenn man das hier vorkommende Gleichungspolynom durch eine 3^2 elementige Determinante ersetzt. Unter Zugrundelegung der in (450) angeführten Bezeichnungen ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}^2 = [(a_2 b_3 - a_3 b_2) u_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) u_2 +$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) u_3)]^2 = (a_2{}^2 b_3{}^2 + a_3{}^2 b_2{}^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3) u_1{}^2 +$$
$$2 (a_2 a_3 b_1 b_3 + a_1 a_3 b_2 b_3 - a_3{}^2 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_3{}^2) u_1 u_2 + \ldots =$$
$$= 2 [(a_{2,2} a_{3,3} - a_{2,3}{}^2) u_1{}^2 + 2 (a_{1,3} a_{2,3} - a_{1,2} a_{3,3}) u_1 u_2 + \ldots],$$

oder

$$(456) \ldots \quad (a b u)^2 = 2 \int A_{i,k} u_i u_k,$$

weshalb auch

$$(457) \ldots \quad (a b u)^2 = o$$

die reciproke Gleichung von $a_x{}^2 = o$ darstellt. In analoger Weise ist daher $(a' b' u')^2 = o$ die reciproke Gleichung von $a'_{x'}{}^2 = o$, und hat man sonach nurmehr die Beziehung zwischen $(a' b' u')$ und $(a b u)$ ausfindig zu machen, um jene zwischen $\int A'_{i,k} u_i' u_k'$ und $\int A_{i,k} u_i u_k$ zu finden. Dies ist aber sehr leicht, indem zwischen den symbolischen Coefficienten a_i, b_i, c_i und a_i' b_i' c_i' die in (c) angegebenen Beziehungen bestehen, welche überdies auch gleichzeitig für die trigonalen Liniencoordinaten u_i und u_i' gelten, wie sofort gezeigt werden wird. Es ist nämlich nach den Transformationsgleichungen (452), wenn u_i und u_i' die trigonalen Coordinaten eines Strahls, bezogen auf das alte, beziehungsweise neue Coordinatendreieck repräsentieren,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = (u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3) x_1' +$$
$$(u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + u_3 \eta_3) x_2' + (u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + u_3 \zeta_3) x_3' =$$
$$u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3',$$

daher in der That

$$(d) \ldots \quad u_1' = \int_{i=1}^{i=3} u_i \xi_i, \quad u_2' = \int_{i=1}^{i=3} u_i \eta_i, \quad u_3' = \int_{i=1}^{i=3} u_i \zeta_i.$$

Man hat demnach auch unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Relationen (c)

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ u_1' & u_2' & u_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int a_i \xi_i, & \int a_i \eta_i, & \int a_i \zeta_i \\ \int b_i \xi_i, & \int b_i \eta_i, & \int b_i \zeta_i \\ \int u_i \xi_i, & \int u_i \eta_i, & \int u_i \zeta_i \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

oder in kürzerer Schreibweise

(458) . . . $(a' b' u') \doteq \delta . (a b u)$,

woraus sich ergibt, wenn man beide Theile der eben gefundenen Gleichung quadriert und gleichzeitig darauf Bedacht nimmt, dass nach Gl. (456) wieder die Beziehung besteht $(a' \, b' \, u')^2 = 2 \int A'_{i,k} u_i u_k'$, wenn $A'_{i,k}$ zu A' in demselben Verhältnisse steht, wie $A_{i,k}$ zu A,

(459) . . . $\int A'_{i,k} u_i' u_k' = \delta^2 . \int A_{i,k} u_i u_k$.

In der Algebra wird nun eine solche aus den Coefficienten einer homogenen Function oder Form $f(x_1 \, x_2 \, x_3)$ und den trimetrischen Punktcoordinaten x_i gebildete Function, welche bis auf einen constanten Factor δ^ϱ unverändert bleibt, wenn man unter abermaliger Voraussetzung linearer Transformationen diese Coefficienten und Punktcoordinaten ersetzt durch jene der transformierten Form, eine Covariante von $f(x_1 \, x_2 \, x_3)$ und diejenige Curve, welche analytisch bestimmt erscheint, wenn man diese Covariante gleich Null setzt, eine covariante Curve von der durch $f(x_1 \, x_2 \, x_3) = o$ gegebenen Curve genannt; dagegen heißt eine solche aus den Coefficienten von $f(x_1 \, x_2 \, x_3)$ und den trigonalen Liniencoordinaten u_i construierte Function, welche, wenn man sie linear transformiert, ebenfalls nur um einen constanten Factor δ^ϱ sich verändert, eine zugehörige Form oder Contravariante von $f(x_1 \, x_2 \, x_3)$ und diejenige Curve, welche analytisch ausgedrückt wird, sobald man die eben definierte Contravariante gleich Null setzt, eine contravariante Curve von $f(x_1 \, x_2 \, x_3) = o$. Eine jede dieser Curven steht zu der Curve $f(x_1 \, x_2 \, x_3) = o$ in einer gewissen Beziehung, welche durch lineare Transformationen unzerstörbar erscheint. Zufolge der eben gegebenen Definition und der letzten Gleichung ist sonach auch $\int A_{i,k} u_i u_k$ eine Contravariante der

ternären Form $U = \int a_{i,k}\, x_i\, x_k$ und bestimmt $\int A_{i,k}\, u_i\, u_k = o$ die Gesammheit aller Strahlen, welche den Kegelschnitt $U = o$ umhüllen.

In Anbetracht des später in diesem Capitel noch Vorzuführenden erscheint es unbedingt geboten, dieselben Untersuchungen auch für Curven 2. Classe anzustellen. Zu diesem Zwecke sei zunächst bemerkt, dass auch die allgemeine Gleichung der Curve 2. Classe: $\Sigma \equiv \alpha_{1,1}\, u_1^{\,2} + 2\,\alpha_{1,2}\, u_1\, u_2 + \ldots. + \alpha_{3,3}\, u_3^{\,2} = o$ sich wieder kürzer darstellen lässt durch eine der symbolischen Gleichungen:

$$(460) \ldots \quad \alpha_u^{\,2} = o, \qquad \beta_u^{\,2} = o, \qquad \gamma_u^{\,2} = o,$$

in welchen

$$(461) \ldots \quad \begin{aligned} \alpha_u &= \alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2 + \alpha_3\, u_3\,, \\ \beta_u &= \beta_1\, u_1 + \beta_2\, u_2 + \beta_3\, u_3\,, \\ \gamma_u &= \gamma_1\, u_1 + \gamma_2\, u_2 + \gamma_3\, u_3 \end{aligned}$$

ist und die hier vorkommenden symbolischen Coefficienten $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$ den Relationen unterliegen:

$$(462) \ldots \quad \begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \alpha_1^{\,2} = \beta_1^{\,2} = \gamma_1^{\,2}, \\ \alpha_{1,2} &= \alpha_1\,\alpha_2 = \beta_1\,\beta_2 = \gamma_1\,\gamma_2 \ldots. \\ \ldots.\alpha_{3,3} &= \alpha_3^{\,2} = \beta_3^{\,2} = \gamma_3^{\,2}. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man nun für die Determinante E der ternären Form $U = \int \alpha_{i,k}\, u_i\, u_k$ zunächst wieder die Gleichung

$$E = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\,2}, & \alpha_1\,\alpha_2, & \alpha_1\,\alpha_3 \\ \beta_1\,\beta_2, & \beta_2^{\,2}, & \beta_2\,\beta_3 \\ \gamma_1\,\gamma_3, & \gamma_2\,\gamma_3, & \gamma_3^{\,2} \end{vmatrix} = \alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

und aus dieser folgt in der bei der symbolischen Bestimmung von A bereits angegebenen Weise

$$(463) \ldots \quad E = \frac{1}{6}\,(\alpha\,\beta\,\gamma)^2,$$

wenn durch das Symbol $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ die aus den symbolischen Coefficienten $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$ gebildete 3^2 elementige Determinante bezeichnet wird. Es ist klar, dass auch die Discriminante E eine Veränderung erleidet, sobald die Gleichung der Curve auf ein anderes Coordinatendreieck bezogen wird. Um nun diese Veränderung ebenfalls zu studieren, seien u_i' die trigonalen Coordinaten irgend einer Tangente der Curve $\Sigma = o$, bezogen auf das neue Coordinatendreieck, und

$$(464)\ldots \quad \begin{aligned} u_1 &= \Xi_1 u_1' + H_1 u_2' + Z_1 u_3', \\ u_2 &= \Xi_2 u_1' + H_2 u_2' + Z_2 u_3', \\ u_3 &= \Xi_3 u_1' + H_3 u_2' + Z_3 u_3' \end{aligned}$$

die Beziehungen, welche nach § 29 zwischen u_i und u_i' bestehen. Aus diesen Gleichungen findet man, sobald dieselben der Reihe nach mit den symbolischen Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ multipliciert und alsdann addiert werden,

$$\alpha_u = \alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \alpha_3 u_3 = (\alpha_1 \Xi_1 + \alpha_2 \Xi_2 + \alpha_3 \Xi_3) u_1' + (\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3) u_2' + (\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 +_3 Z_3) u_3' = \alpha_1' u_1' + \alpha_2' u_2' + \alpha_3' u_3' = \alpha'_{u'},$$

weshalb die auf das neue Coordinatendreieck transformierte Gleichung vorliegender Curve 2. Classe lautet:

$$(e)\ldots \quad \alpha'^2_{u'} = o, \quad \beta'^2_{u'} = o, \quad \gamma'^2_{u'} = o,$$

wenn die hier vorkommenden Symbole definiert erscheinen durch die Relationen:

$$(f)\ldots \quad \begin{aligned} \alpha'_{u'} &= \alpha_1' u_1' + \alpha_2' u_2' + \alpha_3' u_3', \\ \beta'_{u'} &= \beta_1' u_1' + \beta_2' u_2' + \beta_3' u_3', \\ \gamma'_{u'} &= \gamma_1' u_1' + \gamma_2' u_2' + \gamma_3' u_3' \end{aligned}$$

und

$$(g)\ldots \quad \alpha_1' = \int_{i=1}^{i=3} \alpha_i . \Xi_i, \quad \alpha_2' = \int_{i=1}^{i=3} \alpha_i H_i, \quad \alpha_3' = \int_{i=1}^{i=3} \alpha_i Z_i.$$

Es ist daher auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int \alpha_i \Xi_i, & \int \alpha_i H_i, & \int \alpha_i Z_i \\ \int \beta_i \Xi_i, & \int \beta_i H_i, & \int \beta_i Z_i \\ \int \gamma_i \Xi_i, & \int \gamma_i H_i, & \int \gamma_i Z_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Xi_1, & \Xi_2, & \Xi_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

und besteht somit, wenn man noch die Determinante der Substitution mit Δ bezeichnet, also setzt

$$(465)\ldots \quad \Delta = (\Xi H Z),$$

zwischen den 3^2 elementigen Determinanten $(\alpha' \beta' \gamma')$ und $(\alpha \beta \gamma)$ die Beziehung

$$(466)\ldots \quad (\alpha' \beta' \gamma') = \Delta . (\alpha \beta \gamma),$$

aus welcher nach der früheren Gleichung (463) und wegen

$E' = \frac{1}{6}(\alpha' \beta' \gamma')^2$ folgt

(467) . . . $$E' = \Delta^2 . E,$$

und woraus man in Anbetracht der vorher gegebenen Definition einer Invariante ersieht, dass die Discriminante E der ternären Form $\Sigma = \int \alpha_{i,k}\, u_i\, u_k$ eine Invariante dieser Form darstellt. Die Relation $E = o$ drückt die Bedingung aus, unter welcher die Gleichung $\Sigma = o$ ein Punktpaar angibt, dabei ohne Rücksichtnahme auf das Coordinatendreieck, auf welches die Gleichung $\Sigma = o$ sich bezieht.

Zum Schlusse ist noch zu untersuchen, was durch die lineare Transformation (464) mit der reciproken Gleichung $\int E_{i,k}\, x_i\, x_k = o$ von $\Sigma = o$, oder $\alpha_u^2 = o$ geschieht, indem bereits gezeigt wurde, dass durch diese Transformation $\alpha_u^2 = o$ übergeht in $\alpha'_{u'}{}^2 = o$, wobei noch $\alpha_u^2 = \alpha'_{u'}{}^2$ ist. Um nun auch die vorliegende Frage zu beantworten, führe man wieder das Gleichungspolynom $\int E_{i,k}\, x_i\, x_k$ zurück auf eine 3^2 elementige Determinante. Unter Zugrundelegung der in den Gleichungen (462) angegebenen symbolischen Bezeichnungen ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}^2 = [(\alpha_2\, \beta_3 - \alpha_3\, \beta_2)\, x_1 + (\alpha_3\, \beta_1 - \alpha_1\, \beta_3)\, x_2 +$$

$$(\alpha_1\, \beta_2 - \alpha_2\, \beta_1)\, x_3]^2 = (\alpha_2^2\, \beta_3^2 + \alpha_3^2\, \beta_2^2 - 2\, \alpha_2\, \alpha_3\, \beta_2\, \beta_3)\, x_1^2 +$$
$$2\, (\alpha_2\, \alpha_3\, \beta_1\, \beta_3 + \alpha_1\, \alpha_3\, \beta_2\, \beta_3 - \alpha_3^2\, \beta_1\, \beta_2 - \alpha_1\, \alpha_2\, \beta_3^2)\, x_1 x_2 + \ldots =$$
$$2\, [(\alpha_{2,2}\, \alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}^2)\, x_1^2 + 2\, (\alpha_{1,3}\, \alpha_{2,3} - \alpha_{1,2}\, \alpha_{3,3}) x_1\, x_2 + \ldots],$$

oder

(468) . . . $$(\alpha\, \beta\, x)^2 = 2 \int E_{i,k}\, x_i\, x_k,$$

weshalb

(469) . . . $$(\alpha\, \beta\, x)^2 = o$$

als die reciproke Gleichung von $\alpha_u^2 = o$ erscheint. Selbstverständlich ist nun auch $(\alpha'\, \beta'\, x')^2 = o$ die reciproke Gleichung von $\alpha'_{u'}{}^2 = o$, und hat man sonach nurmehr die Beziehung zwischen den beiden 3^2 elementigen Determinanten $(\alpha'\, \beta'\, x')$ und $(\alpha\, \beta\, x)$ ausfindig zu machen, um die noch ausständige Frage zu beantworten. Zu diesem Zwecke wird

wieder bemerkt, dass die zwischen den symbolischen Coefficienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$ bestehenden Relationen (g) auch für die trimetrischen Punktcoordinaten x_i und x_i' Giltigkeit haben; denn aus den Transformationsgleichungen (464) folgt ja

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = (\Xi_1 x_1 + \Xi_2 x_2 + \Xi_3 x_3) u_1' + (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) u_2' + (Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + Z_3 x_3) u_3' = x_1' u_1' + x_2' u_2' + x_3' u_3',$$

und hieraus im Sinne der eben ausgesprochenen Behauptung

$$(h) \ldots \quad x_i' = \int_{i=1}^{i=3} \Xi_i x_i, \quad x_2' = \int_{i=1}^{i=3} H_i x_i, \quad x_3' = \int_{i=1}^{i=3} Z_i x_i;$$

es ist daher auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int \alpha_i \Xi_i, & \int \alpha_i H_i, & \int \alpha_i Z_i \\ \int \beta_i \Xi_i, & \int \beta_i H_i, & \int \beta_i Z_i \\ \int \Xi_i x_i, & \int H_i x_i, & \int Z_i x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Xi_1, & \Xi_2, & \Xi_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix},$$

oder in der kürzeren Schreibweise

$$(470) \ldots \quad (\alpha' \beta' x') = \varDelta . (\alpha \beta x),$$

woraus man wieder findet, sobald man beide Theile obiger Gleichung quadriert und noch darauf Bedacht nimmt, dass nach Relation (468) auch $(\alpha' \beta' x')^2 = 2 \int E_{i,k} x_i' x_k'$ sein muss, wenn $E'_{i,k}$ aus E' in derselben Weise hervorgeht wie $E_{i,k}$ aus E,

$$(471) \ldots \quad \int E'_{i,k} x_i x_k' = \varDelta^2 . \int E_{i,k} x_i x_k,$$

und diese Gleichung sagt wieder aus, dass $\int E_{i,k} x_i x_k$ eine Contravariante der ternären Form $\int \alpha_{i,k} u_i u_k$ ist.

§ 87. Gleichung eines Kegelschnittsbüschels und einer Kegelschnittsreihe. — Die simultanen Invarianten A_{112}, A_{122} und E_{112}, E_{122}.

In § 61 wurde bereits gezeigt, dass zwei Kegelschnitte $U' \equiv \int a_{i,k}' x_i x_k = o$ und $U'' \equiv \int a_{i,k}'' x_i x_k = o$ vier gemeinsame Punkte $P_1 \ldots . P_4$ besitzen, die auch paarweise imaginär erscheinen können. Bezeichnen daher vorübergehend y_i — $i = 1, 2, 3$ — die trimetrischen Coordinaten eines

solchen Punktes P_i, so ist an sich klar, dass für $x_i = y_i$ die Gleichungspolynome U' und U'' gleichzeitig verschwinden müssen, ja noch mehr, es verschwindet auch das Polynom $U' + \lambda U''$, sobald man darin die veränderlichen Coordinaten x_i ersetzt durch y_i, gleichgiltig welchen Wert der Parameter λ besitzt, und hieraus folgt demnach, weil noch $U' + \lambda U''$ eine homogene Function 2. Grades in x_i ist, dass durch die Gleichung

$$(472) \quad U'+\lambda U'' \equiv (a_{1,1}'+\lambda a_{1,1}'')x_1^2+2(a_{1,2}'+\lambda a_{1,2}'')x_1x_2+ \\ \ldots + (a_{3,3}' + \lambda a_{3,3}'')x_3^2 = o,$$

oder

$$\int (a_{i,k}' + \lambda a_{i,k}'')x_i x_k = o,$$

wenn λ einen constanten Parameter repräsentiert, ein Kegelschnitt dargestellt wird, welcher durch die vier gemeinsamen Punkte P_i der beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ geht. Denkt man sich aber unter λ einen veränderlichen Parameter, so fließen aus (472) die Gleichungen aller jener Kegelschnitte, welche überhaupt durch die vier Punkte P_i gelegt werden können. Man nennt nun in der Geometrie den Inbegriff aller Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gelegt werden können, einen Kegelschnittsbüschel und diese Punkte die Grundpunkte oder Nullpunkte des Büschels, und es ist einleuchtend, dass von diesen Grundpunkten alle reell, zwei reell und zwei imaginär, oder endlich alle imaginär sein können. Es ist somit auch (472), wenn λ als veränderlich angesehen wird, die Gleichung eines Kegelschnittsbüchels von den Grundpunkten $(U' = o,\ U'' = o)$. Die Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$, welche offenbar diesem Büschel ebenfalls angehören und die Grundpunkte des letzteren bestimmen, heißen die beiden Grundkegelschnitte des Büschels.

Die aus den sechs Coefficienten $a_{i,k}' + \lambda a_{i,k}''$ gebildete 3^2elementige, symmetrische Determinante $A^{(\lambda)}$ ist wieder die Discriminante der ternären Form $U' + \lambda U''$ und wird auch die Discriminante des Büschels genannt, während A' und A'' die Discriminanten der ternären Formen $\int a_{i,k}' x_i x_k$ und $\int a_{i,k}'' x_i x_k$ oder der Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$

bezeichnen mögen. Die zur Berechnung der Discriminante $A^{(\lambda)}$ dienende Gleichung lautet sonach:

$$(a)\quad A^{(\lambda)} = \begin{vmatrix} (a_{1,1}' + \lambda a_{1,1}'') & (a_{1,2}' + \lambda a_{1,2}'') & (a_{1,3}' + \lambda a_{1,3}'') \\ (a_{1,2}' + \lambda a_{1,2}'') & (a_{2,2}' + \lambda a_{2,2}'') & (a_{2,3}' + \lambda a_{2,3}'') \\ (a_{1,3}' + \lambda a_{1,3}'') & (a_{2,3}' + \lambda a_{2,3}'') & (a_{3,3}' + \lambda a_{3,3}'') \end{vmatrix},$$

und aus derselben ergibt sich, wenn man die darin vorkommende Determinante entwickelt,

$$(473)\quad .\quad A^{(\lambda)} = A''.\, \lambda^3 + 3\, A_{122}\, \lambda^2 + 3\, A_{112}\, \lambda + A',$$

sobald A' und A'' die eben angegebenen Bedeutungen haben, dagegen die in der letzten Gleichung noch vorkommenden Symbole A_{112} und A_{122} definiert erscheinen durch die Relationen:

$$(b)\quad \begin{aligned} 3\,A_{112} &= \begin{vmatrix} a_{1,1}'' & a_{1,2}' & a_{1,3}' \\ a_{1,2}'' & a_{2,2}' & a_{2,3}' \\ a_{1,3}'' & a_{2,3}' & a_{3,3}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}' & a_{1,2}'' & a_{1,3}' \\ a_{1,2}' & a_{2,2}'' & a_{2,3}' \\ a_{1,3}' & a_{2,3}'' & a_{3,3}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}' & a_{1,2}' & a_{1,3}'' \\ a_{1,2}' & a_{2,2}' & a_{2,3}'' \\ a_{1,3}' & a_{2,3}' & a_{3,3}'' \end{vmatrix}, \\ 3\,A_{122} &= \begin{vmatrix} a_{1,1}' & a_{1,2}'' & a_{1,3}'' \\ a_{1,2}' & a_{2,2}'' & a_{2,3}'' \\ a_{1,3}' & a_{2,3}'' & a_{3,3}'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}'' & a_{1,2}' & a_{1,3}'' \\ a_{1,2}'' & a_{2,2}' & a_{2,3}'' \\ a_{1,3}'' & a_{2,3}' & a_{3,3}'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}'' & a_{1,2}'' & a_{1,3}' \\ a_{1,2}'' & a_{2,2}'' & a_{2,3}' \\ a_{1,3}'' & a_{2,3}'' & a_{3,3}' \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

aus welchen sich dann nach erfolgter Zerlegung obiger Determinanten in ihre Minoren ergibt

$$(474)\quad .\quad \begin{aligned} 3\,A_{112} = a_{1,1}''\, A_{1,1}' + 2\, a_{1,2}''\, A_{1,2}' + a_{2,2}''\, A_{2,2}' + \\ 2\, a_{1,3}''\, A_{1,3}' + 2\, a_{2,3}''\, A_{2,3}' + a_{3,3}''\, A_{3,3}', \end{aligned}$$

$$(475)\quad .\quad \begin{aligned} 3\,A_{122} = a_{1,1}'\, A_{1,1}'' + 2\, a_{1,2}'\, A_{1,2}'' + a_{2,2}'\, A_{2,2}'' + \\ 2\, a_{1,3}'\, A_{1,3}'' + 2\, a_{2,3}'\, A_{2,3}'' + a_{3,3}'\, A_{3,3}''. \end{aligned}$$

Wählt man dagegen die im vorigen Paragraphen angegebenen symbolischen Bezeichnungen, d. h. bezeichnet man die Gleichungen der beiden Grundkegelschnitte kurz durch eines der folgenden Gleichungspaare

$$(476)\quad a_x'^2 = o,\ a_x''^2 = o;\ b_x'^2 = o,\ b_x''^2 = o;\ c_x'^2 = o,\ c_x''^2 = o \ldots,$$

mithin die Gleichung des Büschels durch eine der folgenden Gleichungen

$$(477)\quad a_x'^2 + \lambda a_x''^2 = o,\ b_x'^2 + \lambda b_x''^2 = o,\ c_x'^2 + \lambda c_x''^2 = o \ldots,$$

in welchen die Symbole a_x', a_x'', b_x' ...... den Relationen unterliegen

$$(478)\quad .\quad a_x' = \int_{i=1}^{i=3} a_i'\, x_i,\quad a_x'' = \int_{i=1}^{i=3} a_i''\, x_i,\quad b_x' = \int_{i=1}^{i=3} b_i'\, x_i \ldots..$$

und die symbolischen Coefficienten a_i', a_i'', b_i'.... mit den wirklichen $a_{i,k}'$ und $a_{i,k}''$ verbunden erscheinen durch

$$(479)\quad \begin{gathered} a_{i,i}' = a_i'^2 = b_i'^2 = c_i'^2, \quad a_{i,k}' = a_i' a_k' = b_i' b_k' = c_i' c_k', \\ a_{i,i}'' = a_i''^2 = b_i''^2 = c_i''^2 \ldots\ldots, \end{gathered}$$

so kann A_{112}, sowie A_{122}, durch das Quadrat einer aus diesen symbolischen Coefficienten gebildeten 3^2 elementigen Determinante ausgedrückt werden. Dann ist nämlich:

$$3\,A_{112} = \begin{vmatrix} a_1''^2 & a_1' a_2' & b_1' b_3' \\ a_1'' a_2'' & a_2'^2 & b_2' b_3' \\ a_1'' a_3'' & a_2' a_3' & b_3'^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'^2 & a_1'' a_2'' & b_1' b_3' \\ a_1' a_2' & a_2''^2 & b_2' b_3' \\ a_1' a_3' & a_2'' a_3'' & b_3'^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'^2 & b_1' b_2' & a_1'' a_3'' \\ a_1' a_2' & b_2'^2 & a_2'' a_3'' \\ a_1' a_3' & b_2' b_3' & a_3''^2 \end{vmatrix},$$

oder

$$3A_{112} = a_1'' a_2' b_3' (a'' a' b') - a_1' a_2'' b_3' (a'' a' b') - a_1' b_2' a_3'' (a'' a' b').$$

und da es offenbar auch gestattet ist, die beiden gleichwertigen Symbole a' und b' mit einander zu vertauschen, erhält man aus obiger Gleichung für A_{112} noch die zweite Gleichung

$$3\,A_{112} = -\,a_1'' a_3' b_2' \,(a'' a' b') + a_3' a_2'' b_1' \,(a'' a' b') + a_2' b_1' a_3'' \,(a'' a' b'),$$

mithin durch Addition beider

$$6\,A_{112} = (a_1'' a_2' b_3' - a_1'' a_3' b_2' - a_2'' a_1' b_3' + a_2'' a_3' b_1' + a_3'' a_1' b_2' - a_3'' a_2' b_1')\,(a' b' a'') = (a' b' a'')^2,$$

indem ja nach der Theorie der Determinanten $(a'' a' b') = (a' b' a'')$ erscheint. Eine ganz analoge Darstellung ist aber auch für A_{122} möglich, und man findet dann $6\,A_{122} = (a'' b'' a')^2$; es wird daher unter gleichzeitiger Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung (451):

$$(480)\ \ldots\quad \begin{aligned} A' &= \frac{1}{6}\,(a' b' c')^2, & A_{112} &= \frac{1}{6}\,(a' b' a'')^2, \\ A_{122} &= \frac{1}{6}\,(a'' b'' a')^2, & A'' &= \frac{1}{6}\,(a'' b'' c'')^2, \end{aligned}$$

wodurch aber gleichzeitig der Beweis erbracht ist, dass A' und A'' Invarianten von U', respective U''; dagegen A_{112} und A_{122} simultane Invarianten von U' und U'' repräsentieren. Transformiert man demnach die Gleichung des Kegelschnitts-

büschels auf ein anderes Coordinatendreieck, und sind (452) die diesbezüglichen Transformationsgleichungen, so gehen nach (454) und (455) A_{112} und A_{122} über in $A_{112}' = \delta^2 . A_{112}$ und $A_{122}' = \delta^2 . A_{122}$, wo δ die in (453) gegebene Bedeutung hat. Eine jede simultane Invariante zweier Kegelschnitte gleich Null gesetzt, drückt selbstverständlich eine geometrische Eigenschaft dieser Curven aus, und diese Eigenschaft ist durch lineare Transformationen unzerstörbar, d. h. unabhängig von der Wahl des Coordinatendreiecks.

In § 61 wurde aber noch gezeigt, dass zwei Kegelschnitte $\Sigma' \equiv \int A_{i,k}' u_i u_k = o$ und $\Sigma'' \equiv \int A_{i,k} u_i u_k = o$ vier gemeinsame Tangenten $(T_1) \ldots . (T_4)$ besitzen, die auch paarweise imaginär sein können. Bezeichnen daher vorübergehend v_i die trigonalen Coordinaten einer solchen Tangente (T_i), so werden offenbar für $u_i = v_i$ die Gleichungspolynome Σ' und Σ'' gleichzeitig verschwinden müssen, und daher wird auch das Polynom $\Sigma' + \lambda \Sigma''$ für jeden Wert von λ gleich null werden, sobald darin abermals $u_i = v_i$ gesetzt wird. Es ist daher wieder, sobald λ als ein constanter Parameter angesehen wird,

$$(481) \quad \begin{aligned} \Sigma' + \lambda \Sigma'' \equiv (A_{1,1}' + \lambda A_{1,1}'') u_1^2 + 2 (A_{1,2}' + \lambda A_{1,2}'') u_1 u_2 + \\ \ldots\ldots\ldots + (A_{3,3}' + \lambda A_{3,3}'') u_3^2 = o, \end{aligned}$$

oder

$$\int (A_{i,k}' + \lambda A_{i,k}'') u_i u_k = o$$

die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher von den vier gemeinsamen Tangenten (T_i) der Kegelschnitte $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ berührt wird, dagegen die Gleichung aller Kegelschnitte, welche diese vier Tangenten berühren, wenn λ als ein veränderlicher Parameter auftritt, der alle Werte von $- \infty$ bis $+ \infty$ annimmt. Der Inbegriff aller Kegelschnitte, welche vier gegebene Strahlen berühren, heißt in der Geometrie eine Kegelschnittsreihe oder eine Kegelschnittsschaar, und die gemeinsamen vier Tangenten werden die Grundstrahlen oder Nullstrahlen dieser Reihe genannt. Daher ist (481) die Gleichung einer Kegelschnittsreihe von den Grundstrahlen $(\Sigma' = o, \Sigma'' = o)$, wenn man λ als veränderlich ansieht. Die Kegelschnitte $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$, welche offenbar dieser Reihe ebenfalls angehören und die

Grundstrahlen der letzteren bestimmen, heißen auch wieder die Grundkegelschnitte der Reihe.

Die aus den sechs Coefficienten $A_{i,k}' + \lambda A_{i,k}''$ gebildete 3^2 elementige, symmetrische Determinante $E^{(\lambda)}$ ist wieder die Discriminante der ternären Form $\Sigma' + \lambda \Sigma''$ und wird auch die Discriminante der Kegelschnittsreihe genannt, während E' und E'' die Discriminanten der ternären Formen $\int A_{i,k}' u_i u_k$ und $\int A''_{i,k} u_i u_k$ oder der Kegelschnitte $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ bezeichnen mögen. Die zur Berechnung von $E^{(\lambda)}$ dienende Gleichung ist sonach:

$$(c)\quad E^{(\lambda)} = \begin{vmatrix} (A_{1,1}' + \lambda A_{1,1}'') & (A_{1,2}' + \lambda A_{1,2}'') & (A_{1,3}' + \lambda A_{1,3}'') \\ (A_{1,2}' + \lambda A_{1,2}'') & (A_{2,2}' + \lambda A_{2,2}'') & (A_{2,3}' + \lambda A_{2,3}'') \\ (A_{1,3}' + \lambda A_{1,3}'') & (A_{2,3}' + \lambda A_{2,3}'') & (A_{3,3}' + \lambda A_{3,3}'') \end{vmatrix},$$

und aus derselben findet man durch Entwickelung dieser Determinante nach dem Parameter λ

$$(482)\ .\quad E^{(\lambda)} = E''.\lambda^3 + 3 E_{122} \lambda^2 + 3 E_{112} \lambda + E',$$

wenn E' und E'' die bereits angegebene Bedeutung haben, nämlich die aus $A_{i,k}'$, respective $A_{i,k}''$, gebildeten 3^2 elementigen, symmetrischen Determinanten oder die reciproken Determinanten von A', beziehungsweise A'', repräsentieren, während die Symbole E_{112} und E_{122} den Relationen unterliegen:

$$(483)\ .\quad \begin{aligned} 3 E_{112} &= A_{1,1}'' E_{1,1}' + 2 A_{1,2}'' E_{1,2}' + A_{2,2}'' E_{2,2}' + \\ & 2\ A_{1,3}'' E_{1,3}' + 2\ A_{2,3}'' E_{2,3}' + A_{3,3}'' E_{3,3}', \end{aligned}$$

$$(484)\ .\quad \begin{aligned} 3 E_{122} &= A_{1,1}' E_{1,1}'' + 2 A_{1,2}' E_{1,2}'' + A_{2,2}' E_{2,2}'' + \\ & 2\ A_{1,3}' E_{1,3}'' + 2\ A_{2,3}' E_{2,3}'' + A_{3,3}' E_{3,3}''. \end{aligned}$$

Hierbei sei noch erwähnt, dass $E_{i,k}'$ zu E' und $E_{i,k}''$ zu E'' in demselben Verhältnisse stehen, wie $A_{i,k}$ zu A. Nachdem aber E' und E'' die reciproken Determinanten von A', respective A'', darstellen, so ist auch $E' = A'^2$, $E'' = A''^2$, $E_{i,k}' = a_{i,k}' A'$ und $E_{i,k}'' = a_{i,k}'' A''$, demnach zufolge der früher gefundenen Gleichungen (474) und (475):

$$(485)\ .\quad E_{112} = A'.A_{122}, \qquad E_{122} = A''.A_{112}.$$

Es sind somit E' und E'' Invarianten von Σ', beziehungsweise Σ'', dagegen E_{112} und E_{122} simultane Invarianten von Σ' und Σ'', und dieselben ändern sich, wenn die Gleichung der Kegelschnittsreihe auf ein anderes Coordinatendreieck bezogen wird und (464) die diesbezüglichen Transformations-

gleichungen repräsentieren, bloß um den Factor Δ^2, wo Δ die durch Gleichung (465) gegebene Bedeutung hat. Dies folgt sofort aus den Gleichungen (467) und (485), wenn man noch bedenkt, dass beim Übergange zu einem anderen Coordinatendreieck A', A'', A_{112} und A_{122} um δ^2 sich ändern, dagegen zwischen Δ und δ nach § 59 die einfache Beziehung besteht $\Delta = \delta^2$, indem ja Δ die reciproke Determinante von δ darstellt.

1. Beispiel. Es sei das Coordinatendreieck ein gemeinsames Polendreieck für beide Kegelschnitte, mithin $U' = a_{1,1}' x_1^2 + a_{2,2}' x_2^2 + a_{3,3}' x_3^2$ und $U'' = a_{1,1}'' x_1^2 + a_{2,2}'' x_2^2 + a_{3,3}'' x_3^2$. Dann wird $A' = a_{1,1}' \, a_{2,2}' \, a_{3,3}'$, $A'' = a_{1,1}'' \, a_{2,2}'' \, a_{3,3}''$, $3\,A_{112} = a_{1,1}'' \, a_{2,2}' \, a_{3,3}' + a_{1,1}' \, a_{2,2}'' \, a_{3,3}' + a_{1,1}' \, a_{2,2}' \, a_{3,3}''$ und $3\,A_{122} = a_{1,1}' \, a_{2,2}'' \, a_{3,3}'' + a_{1,1}'' \, a_{2,2}' \, a_{3,3}'' + a_{1,1}'' \, a_{2,2}'' \, a_{3,3}'$.

2. Beispiel. Das Coordinatendreieck ist dem ersten Kegelschnitte eingeschrieben, dem zweiten aber umgeschrieben, weshalb nach § 65 bekanntlich $U' = 2\,a_{1,2}\,x_1\,x_2 + 2\,a_{1,3}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{2,3}\,x_2\,x_3$ und $U'' = \alpha_{2,3}{}^2 x_1^2 - 2\alpha_{1,3}\,\alpha_{2,3}\,x_1\,x_2 + \alpha_{1,3}{}^2 x_2^2 - 2\,\alpha_{1,2}\,\alpha_{2,3}\,x_1\,x_3 - 2\,\alpha_{1,2}\,\alpha_{1,3}\,x_2\,x_3 + \alpha_{1,2}{}^2 x_3^2$ wird und folglich auch $A' = 2\,a_{1,2}\,a_{1,3}\,a_{2,3}$, $A'' = -\,4\,\alpha_{1,2}{}^2 \alpha_{1,3}{}^2 \alpha_{2,3}{}^2$, $3\,A_{112} = -\,(a_{1,2}\,\alpha_{1,2} + a_{1,3}\,\alpha_{1,3} + a_{2,3}\,\alpha_{2,3})^2$ und $3\,A_{122} = 4\,\alpha_{1,2}\,\alpha_{1,3}\,\alpha_{2,3}\,(a_{1,2}\,\alpha_{1,2} + a_{1,3}\,\alpha_{1,3} + a_{2,3}\,\alpha_{2,3})$.

3. Beispiel. Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte lauten: $U \equiv x^2 + y^2 - r_1^2 = o$ und $U'' \equiv x^2 + y^2 - 2\,a_2\,x - 2\,b_2\,y + a_2^2 + b_2^2 - r_2^2 = o$. Hier wird $A' = -\,r_1^2$, $A'' = -\,r_2^2$, $3\,A_{112} = a_2^2 + b_2^2 - 2\,r_1^2 - r_2^2$ und $3\,A_{122} = a_2^2 + b_2^2 - 2\,r_2^2 - r_1^2$.

§ 88. Sätze über Kegelschnittsbüschel und Kegelschnittsreihen.

Satz. Durch jeden Punkt in der Ebene eines Kegelschnittsbüschels geht ein Element des letzteren.

Beweis. Die Gleichung eines Elementes des Büschels ist nach (472)

Satz. Eine jede Gerade in der Ebene einer Kegelschnittsreihe wird von einem Elemente der letzteren berührt.

Beweis. Die Gleichung eines Elementes der Reihe ist nach (481)

$$U' + \lambda U'' = o.$$

Soll nun dieses Element durch den Punkt M_0 von den trimetrischen Coordinaten $x_i^{(o)}$ gehen, so muss obige Gleichung befriedigt werden für $x_i = x_i^{(o)}$, was

$$U'_0 + \lambda U_0'' = o$$

bedingt, wenn U_0' und U_0'' das Ergebnis der Substitution von $x_i = x_i^{(o)}$ in U', respective U'', darstellen.

$$\Sigma' + \lambda \Sigma'' = o.$$

Soll nun dieses Element die Gerade (L_0) von den trigonalen Coordinaten $u_i^{(o)}$ berühren, so muss obige Gleichung befriedigt werden für $u_i = u_i^{(o)}$, was

$$\Sigma'_0 + \lambda \Sigma''_0 = o$$

bedingt, wenn Σ_0' und Σ_0'' das Ergebnis der Substitution von $u_i = u_i^{(o)}$ in Σ', respective Σ'', darstellen.

Eliminiert man nun aus den beiden obigen Gleichungen den Parameter λ, so ergibt sich:

$$(a) \quad . \; . \quad \frac{U'}{U_0'} - \frac{U''}{U_0''} = o \qquad\qquad \frac{\Sigma'}{\Sigma_0'} - \frac{\Sigma''}{\Sigma_0''} = o \quad . \; . \quad (b)$$

als Gleichung desjenigen Elementes

des Büschels, welches durch den Punkt M_0 geht,

der Reihe, welches den Strahl (L_0) berührt,

womit obiger Satz erwiesen erscheint.

Satz. Es existieren stets zwei Elemente im Kegelschnittsbüschel, welche eine gegebene, in der Ebene des Büschels liegende Gerade berühren.

Beweis. Um die Richtigkeit des soeben ausgesprochenen Satzes zu beweisen, benöthigt man die reciproke Gleichung von (472). Nach § 59, Gl. (367), lautet dieselbe

$$(c) \quad . \; . \quad \int A_{i,k}^{(\lambda)} u_i u_k = o,$$

wenn $A_{i,k}^{(\lambda)}$ zu $A^{(\lambda)}$ in derselben Beziehung steht, wie früher $A_{i,k}$ zu A, und $A(\lambda)$

Satz. Es existieren stets zwei Elemente in der Kegelschnittsreihe, welche durch einen gegebenen, in der Ebene der Reihe sich befindlichen Punkt gehen.

Beweis. Um die Richtigkeit des obigen Satzes zu constatieren, benöthigt man zunächst die reciproke Gleichung von (481). Nach § 59, Gl. (368), ist dieselbe

$$\int E_{i,k}^{(\lambda)} x_i x_k = o, \quad . \; . \quad (d)$$

wenn $E_{i,k}^{(\lambda)}$ aus $E^{(\lambda)}$ in derselben Weise hervorgeht, wie früher $E_{i,k}$ aus E, und $E^{(\lambda)}$ die in § 87 durch Gl. (c) ge-

die in § 87 durch Gl. (a) bestimmte Discriminante darstellt. Substituiert man nun in obige Gleichung für $A_{i,k}(\lambda)$ den aus der soeben angeführten Gl. (a) des vorigen Paragraphen fließenden Wert

gebene Determinante repräsentiert. Substituiert man nun in obige Gleichung für $E_{i,k}(\lambda)$ den aus der soeben angeführten Gl. (c) des vorigen Paragraphen fließenden Wert

und ordnet dann diese Gleichung nach λ, so ergibt sich nach einigen einfachen algebraischen Operationen:

(486) $\Sigma''\lambda^2 + \Phi.\lambda + \Sigma' = o,$ | $A''U''\lambda^2 + \Psi\lambda + A'U' = o,$ (487)

wenn wieder, wie im vorigen Paragraphen,

(488) $$\Sigma' = \int A_{i,k}' u_i u_k = \frac{1}{2}(a'b'u)^2, \quad \Sigma'' = \int A_{i,k}'' u_i u_k = \frac{1}{2}(a''b''u)^2$$

$$A''U'' = \int E_{i,k}'' x_i x_k = A'' \int a_{i,k}'' x_i x_k, \quad A'U' = \int E_{i,k}' x_i x_k = A' \int a_{i,k}' x_i x_k$$

ist, und die hier noch vorkommenden Symbole Φ und Ψ definiert erscheinen durch die beiden Gleichungen:

(489) $$\Phi = (a_{2,2}'a_{3,3}'' + a_{2,2}''a_{3,3}' - 2a_{2,3}'a_{2,3}'')u_1^2 + 2(a_{1,3}'a_{2,3}'' + a_{1,3}''a_{2,3}' - a_{1,2}'a_{3,3}'' - a_{1,2}''a_{3,3}')u_1u_2 + (a_{1,1}'a_{3,3}'' + a_{1,1}''a_{3,3}' - 2a_{1,3}'a_{1,3}'')u_2^2 + 2(a_{1,2}'a_{2,3}'' + a_{1,2}''a_{2,3}' - a_{1,3}'a_{2,2}'' - a_{1,3}''a_{2,2}')u_1u_3 + 2(a_{1,2}'a_{1,3}'' + a_{1,2}''a_{1,3}' - a_{1,1}'a_{2,3}'' - a_{1,1}''a_{2,3}')u_2u_3 + (a_{1,1}'a_{2,2}'' + a_{1,1}''a_{2,2}' - 2a_{1,2}'a_{1,2}'')u_3^2,$$

(490) $$\Psi = (A_{2,2}'A_{3,3}'' + A_{2,2}''A_{3,3}' - 2A_{2,3}'A_{2,3}'')x_1^2 + 2(A_{1,3}'A_{2,3}'' + A_{1,3}''A_{2,3}' - A_{1,2}'A_{3,3}'' - A_{1,2}''A_{3,3}')x_1x_2 + (A_{1,1}'A_{3,3}'' + A_{1,1}''A_{3,3}' - 2A_{1,3}'A_{1,3}'')x_2^2 + 2(A_{1,2}'A_{2,3}'' + A_{1,2}''A_{2,3}' - A_{1,3}'A_{2,2}'' - A_{1,3}''A_{2,2}')x_1x_3 + 2(A_{1,2}'A_{1,3}'' + A_{1,2}''A_{1,3}' - A_{1,1}'A_{2,3}'' - A_{1,1}''A_{2,3}')x_2x_3 + (A_{1,1}'A_{2,2}'' + A_{1,1}''A_{2,2}' - 2A_{1,2}'A_{1,2}'')x_3^2,$$

oder einfacher durch jene

(489a) $$\Phi = \frac{1}{2}[(a'b''u)^2 + (a''b'u)^2],$$

(490a) $$\Psi = \frac{1}{2}[(A'B''x)^2 + (A''B'x)^2],$$

in welchen die symbolischen Coefficienten

a_i', b_i' . . . ., a_i'' b_i'', mit den wirklichen $a_{i,k}'$ und $a_{i,k}''$ verbunden erscheinen durch die Relationen:

$a_i' a_k' = b_i' b_k' = a_{i,k}'$ und
$a_i'' a_k'' = b_i'' b_k'' = a_{i,k}''$.

A_i', B_i' und A_i'', B_i'' mit den wirklichen $A_{i,k}'$ und $A_{i,k}''$ verbunden sind durch die Relationen:

$A_i' A_k' = B_i' B_k' = A_{i,k}'$ und
$A_i'' A_k'' = B_i'' B_k'' = A_{i,k}''$.

Auf die hier vorkommenden ternären Formen Φ und Ψ werden wir bei den späteren Untersuchungen noch einmal zurückkommen und sei hier vorläufig nur bemerkt, dass nach den Gleichungen (458) und (470) offenbar Φ eine simultane Contravariante der beiden ternären Formen $U' = \int a_{i,k}' x_i x_k$ und $U'' = \int a_{i,k}'' x_i x_k$, dagegen Ψ eine simultane Covariante dieser Formen repräsentiert. Nachdem übrigens die ternären Formen Φ und Ψ zweiten Grades in den Veränderlichen u_i, respective x_i, sind, so ist das geometrische Äquivalent einer jeden der Gleichungen

$$(491) \quad . \quad \Phi = o \qquad\qquad \Psi = o \quad . \quad (492)$$

ein Kegelschnitt, von welchen ein jeder zu den beiden Grundkegelschnitten $U' = o$ und $U'' = o$ in einer gewissen Beziehung steht, die noch später erörtert werden wird.

Übergehend auf den noch ausstehenden Beweis obigen Satzes, seien wieder $u_i^{(o)}$ die trigonalen Coordinaten derjenigen Geraden (L_0), welche von den Elementen des Kegelschnittsbüschels berührt werden soll. Nachdem nun die Gleichung eines Kegelschnittes in trigonalen Liniencoordinaten, wenn diese Curve den Strahl (L_0) berührt, befriedigt werden muss für $u_i = u_i^{(o)}$, so resultieren die Werte von λ, welche jenen Kegelschnitten des Büschels angehören, die

Zurückkehrend zu dem eigentlichen Beweise obigen Satzes, seien $x_i^{(o)}$ die trimetrischen Coordinaten desjenigen Punktes M_0, durch welchen die Elemente der Kegelschnittsreihe gehen sollen. Nachdem nun die Gleichung eines Kegelschnittes in trimetrischen Punktcoordinaten, wenn diese Curve den Punkt M_0 enthält, befriedigt werden muss für $x_i = x_i^{(o)}$, so ergeben sich die Werte λ, welche jenen Kegelschnitten der Reihe an-

den Strahl (L_0) tangieren, als die Wurzeln der Gl. (486), wenn man dort vorerst $u_i = u_i^{(o)}$ setzt. Nun ist aber die letzte Gleichung in λ vom zweiten Grade, somit gibt es zwei Kegelschnitte des Büschels, welche (L_0) berühren, daher etc. etc.

Satz. Sind $U = o$, $U' = o$ und $U'' = o$ die Gleichungen von drei Geradenpaaren eines Kegelschnittsbüschels, d. h. von drei Geradenpaaren, welche in vier Punkten sich durchschneiden, so lassen sich stets drei reelle Coefficienten k, k' und k'' finden, für welche die Identität besteht:

$$kU + k'U' + k''U'' \equiv o. \tag{493}$$

Beweis. Nach dem im Paragraphen 57 bereits Vorgeführten ist das geometrische Äquivalent der Gl. (472) in § 87 dann ein Geradenpaar, wenn die Discriminante der ternären Form $\int(a_{i,k}' + \lambda\, a_{i,k}'')\, x_i x_k$ verschwindet, also nach Gl. (473)

$$A(\lambda) \equiv A''\lambda^3 + 3A_{122}\lambda^2 + 3A_{112}\lambda + A' = o \tag{e}$$

gehören, die durch den Punkt M_0 gehen, als die Wurzeln der Gl. (487), wenn man in derselben vorerst $x_i = x_i^{(o)}$ setzt. Nun ist aber diese Gleichung in λ quadratisch, somit existieren auch zwei Elemente der Reihe, welche durch den Punkt M_0 gehen, daher etc. etc.

Satz. Sind $\Sigma = o$, $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ die Gleichungen von drei Punktpaaren einer Kegelschnittsreihe, d. h. von drei Punktpaaren, in welchen vier Strahlen sich durchschneiden, so lassen sich stets drei reelle Coefficienten k, k' und k'' finden, für welche die Identität besteht:

$$k\Sigma + k'\Sigma' + k''\Sigma'' \equiv o. \tag{494}$$

Beweis. Nach dem im Paragraphen 57 bereits Vorgeführten ist das geometrische Äquivalent der Gl. (481) in § 87 dann ein Punktpaar, wenn die Discriminante der ternären Form $\int(A_{i,k}' + \lambda\, A_{i,k}'')\, u_i u_k$ verschwindet, d. h. nach Gl. (482)

$$E(\lambda) \equiv E''\lambda^3 + 3E_{122}\lambda^2 + 3E_{112}\lambda + E' = o \tag{f}$$

wird. Nachdem nun obige Gleichung in λ vom dritten Grade ist, so existieren sonach auch drei Werte von λ, für welche die Gleichung (472) ein Geradenpaar, respective jene (481) ein Punktpaar darstellt, und diese Werte von λ sind die Wurzeln der in λ cubischen Gleichung (e), be-

ziehungsweise (f). Weil aber eine cubische Gleichung entweder eine reelle Wurzel, oder drei solche Wurzeln besitzt, ist von diesen Paaren wenigstens eines reell, während die beiden übrigen dann imaginär erscheinen, oder es sind alle drei reell. Es ist klar, dass die Gleichungen dieser Paare aus (472), respective (481), hervorgehen, wenn man daselbst λ der Reihe nach ersetzt durch die drei Wurzeln der cubischen Gleichung (e), beziehungsweise (f), dieses Paragraphen, und dass somit auch (e) die Gleichung der im Kegelschnittsbüschel $U' + \lambda U'' = o$ enthaltenen Geradenpaare angibt, sobald man in derselben den Parameter λ ersetzt durch den Bruch $-\frac{U'}{U''}$, und ebenso folgt aus (f) die Gleichung der drei Punktpaare der Kegelschnittsreihe $\Sigma' + \lambda \Sigma'' = o$, wenn man daselbst λ ersetzt durch den Bruch $-\frac{\Sigma'}{\Sigma''}$. Die Gleichung der drei

Geradenpaare des Kegelschnittsbüschels $U' + \lambda U'' = o$	Punktpaare der Kegelschnittsreihe $\Sigma' + \lambda \Sigma'' = o$

ist sonach:

(495) $A' U''^3 - 3 A_{112} U' U''^2 + 3 A_{122} U'^2 U'' - A'' U'^3 = o.$	$E' \Sigma''^3 - 3 E_{112} \Sigma' \Sigma''^2 + 3 E_{122} \Sigma'^2 \Sigma'' - E'' . \Sigma'^3 = o.$ (496)
Sind nun $U' = o$ und $U'' = o$ die Gleichungen von zwei Geradenpaaren, so wird nach § 57 bekanntlich $A' = A'' = o$,	Sind nun $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$***) die Gleichungen von zwei Punktpaaren, so wird nach § 57 bekanntlich $E' = E'' = o$,

wodurch obige Gleichung übergeht in

$-3 A_{112} U' U''^2 + 3 A_{122} U'^2 U'' = o,$	$-3 E_{112} \Sigma' \Sigma''^2 + 3 E_{122} \Sigma'^2 \Sigma'' = o,$

und es existiert dann außer den beiden Grundkegelschnitten

$U' = o$ und $U'' = o$ im Kegelschnittsbüschel nur noch ein Geradenpaar,	$\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ in der Kegelschnittsreihe nur noch ein Punktpaar,

und letzteres hat die Gleichung

***) In diesem Falle hat man die Coefficienten $A_{i,k}'$ und $A_{i,k}''$ zu ersetzen durch $\alpha_{i,k}'$ und $\alpha_{i,k}''$ und ist also hier $\Sigma' = \int \alpha_{i,k}' u_i u_k$, $\Sigma'' = \int \alpha_{i,k}'' u_i u_k$, $3 E_{112} = a_{1,1}'' E_{1,1}' + 2 \alpha_{1,2}'' E_{1,2}' + \ldots + \alpha_{3,3}'' E_{3,3}' \ldots$

(497) $U \equiv A_{122} U' - A_{112} U'' = o$, | $\Sigma \equiv E_{122} \Sigma' - E_{112} \Sigma'' = o$ (498)
aus welcher sich ergibt, wenn k irgend ein reeller Coefficient wäre,

$kU - kA_{122} U' + kA_{112} U'' \equiv o$ | $k\Sigma - kE_{122}\Sigma' + kE_{112}\Sigma'' \equiv o$

oder, sobald man kA_{122} oder kE_{122} durch $-k'$ und kA_{112} oder kE_{112} durch k'' ersetzt, die Identität (493), respective (494), womit der Satz erwiesen ist.

§ 89. Gleichung der Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$, bezogen auf ihr gemeinsames Polardreieck.

In § 64 wurde gezeigt, dass das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks, sowie das Diagonaldreiseit eines dieser Curve umgeschriebenen Vierseits, ein sich selbst conjugiertes Dreieck oder ein Polardreieck dieses Kegelschnittes ist. Nun durchschneiden sich aber zwei Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ in vier Punkten $P_1, \ldots P_4$ und ist folglich nach dem eben angeführten Satze das Diagonaldreieck des durch die vier Punkte P_i bestimmten Vierecks auch ein gemeinsames Polardreieck bezüglich beider Kegelschnitte; ja noch mehr, es ist auch ein Polardreieck in Bezug auf sämmtliche Elemente des durch die beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ bestimmten Kegelschnittsbüschels. Die Kegelschnitte $U' = o$ $U'' = o$ — oder $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ — haben aber auch vier gemeinsame Tangenten $(T_1) \ldots (T_4)$, welche ein diesen beiden Curven umgeschriebenes Vierseit bestimmen, dessen Diagonaldreiseit, zufolge des früher genannten Satzes, ebenfalls ein gemeinsames Polardreiseit bezüglich obiger zwei Kegelschnitte, sowie ein Polardreiseit für jedes Element der durch $U' = o$ und $U'' = o$ gegebenen Kegelschnittsreihe darstellt. Es ist an sich klar, dass das Diagonaldreieck des den beiden Kegelschnitten $U' = o$ und $U'' = o$ eingeschriebenen Vierecks, sowie das Diagonaldreiseit des diesen Curven umgeschriebenen Vierseits, identisch sein müssen, und die hier folgende analytische Untersuchung wird dies auch bestätigen.

Die Frage, welche jetzt an uns herantritt, besteht nun darin, das den beiden Kegelschnitten

(a). $U' \equiv \int a_{i,k}' x_i x_k = o, \qquad U'' \equiv \int a_{i,k}'' x_i x_k = o$

gemeinsame Polardreieck zu ermitteln, sowie die Gleichungen dieser Curven, bezogen auf dieses Polardreieck als Coordinatendreieck. Nennt man zu diesem Zwecke x_i' die Coordinaten irgend eines Punktes in der Ebene beider Kegelschnitte, u. zw. bezogen auf das gemeinsame Polardreieck der letzteren, so bestehen nach § 29 zwischen x_i und x_i' die drei Beziehungen:

$$x_i = \xi_i x_1' + \eta_i x_2' + \zeta_i x_3', \qquad i = 1, 2, 3,$$

in welchen ξ_i, η_i und ζ_i neun noch zu bestimmende Coefficienten repräsentieren, welche gleichzeitig das hier in Betracht kommende Polardreieck bestimmen, indem ja nach dem früher Vorgeführten (Siehe § 29) ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die Coordinaten der drei Ecken dieses Dreiecks angeben, bezogen auf das alte Coordinatendreieck. Durch die Substitution dieser Werte von x_i in die beiden Gleichungen (a) nehmen diese nach § 64 die Formen an

$$b_1' x_1'^2 + b_2' x_2'^2 + b_3' x_3'^2 = o, \qquad b_1'' x_1'^2 + b^{2''} x_2' + b_3'' x_3'^2 = o,$$

oder wenn man $x_i' \sqrt{b_i''}$ durch x_i' ersetzt,

(b). $b_1' x_1'^2 + b_2' x_2'^2 + b_3' x_3'^2 = o, \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = o.$

Die Gleichung irgend eines Elementes des Büschels lautet daher im alten Coordinatendreieck

(c) . . . $\int (a_{i,k}' + \lambda a_{i,k}'') x_i x_k = o,$

im neuen aber

(d). $(b_1' + \lambda) x_1'^2 + (b_2' + \lambda) x_2'^2 + (b_3' + \lambda) x_3'^2 = o,$

und folglich ist auch nach Gl. (455) in § 86 und Gl. (473) in § 87

$$(b_1' + \lambda)(b_2' + \lambda)(b_3' + \lambda) = \delta^2 (A'' \lambda^3 + 3 A_{122} \lambda^2 + 3 A_{112} \lambda + A').$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber $\delta^2 . A'' = 1$, oder

$$\delta^2 = \frac{1}{A''},$$

ferner

$$b_1' = -\lambda_1, \qquad b_2' = -\lambda_2, \qquad b_3' = -\lambda_3,$$

wenn λ_1, λ_2 und λ_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

(e) . . $A''. \lambda^3 + 3 A_{122} \lambda^2 + 3 A_{112} \lambda + A' = o$

darstellen, und damit erscheinen auch die Gleichungen der beiden Kegelschnitte (U') und (U''), bezogen auf ihr gemein-

sames Polardreieck, bestimmt. Natürlich lautet nun auch die Gleichung eines Elementes des Büschels in diesem Coordinatendreieck

$$(f) \,.\; (\lambda - \lambda_1)\, x_1'^2 + (\lambda - \lambda_2)\, x_2'^2 + (\lambda - \lambda_3)\, x_3'^2 = o,$$

womit der erste Theil unserer Frage beantwortet ist. Das, was jetzt noch zu bestimmen erübrigt, sind die Coordinaten der Ecken des gemeinsamen Polardreiecks. Zu diesem Zwecke stelle man zunächst die reciproken Gleichungen von (*c*) und (*f*) zusammen, welche bekanntlich sind:

$$\int A_{i,k}^{(\lambda)}\, u_i\, u_k = o$$

und

$$(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)u_1'^2+(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_1)u_2'^2+(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)u_3'^2=o,$$

wobei noch bemerkt wird, dass zwischen den trigonalen Coordinaten u_i und u_i' nach § 86, Gl. (*d*), die drei Beziehungen bestehen:

$$u_1' = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3, \quad u_2' = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3,$$
$$u_3' = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3.$$

In § 86, Gl. (459) hat man aber gesehen, dass zwischen den Gleichungspolynomen dieser eben angegebenen reciproken Gleichungen die Relation stattfindet

$$(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)u_1'^2+(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_1)u_2'^2+(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)u_3'^2= \delta^2 \int A_{i,k}^{(\lambda)}\, u_i u_k,$$

und aus dieser ergibt sich, wenn man der Reihe nach λ durch λ_1, λ_2 und λ_3 ersetzt und gleichzeitig für δ^2 und u_i' die zuvor angegebenen Werte substituiert,

$$(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3)^2 = \frac{\int A_{i,k}^{(\lambda_1)}\, u_i u_k}{A''\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,(\lambda_1 - \lambda_3)}$$
$$(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3)^2 = \frac{\int A_{i,k}^{(\lambda_2)}\, u_i u_k}{A''\,(\lambda_2 - \lambda_3)\,(\lambda_2 - \lambda_1)}$$
$$(\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3)^2 = \frac{\int A_{i,k}^{(\lambda_3)}\, u_i u_k}{A''\,(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

woraus man endlich die zur Berechnung von ξ_i, η_i und ζ_i dienenden Formeln erhält, u. zw.:

$$\xi_i \xi_k = \frac{A_{i,k}^{(\lambda_1)}}{A''\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,(\lambda_1 - \lambda_3)}, \quad \eta_i \eta_k = \frac{A_{i,k}^{(\lambda_2)}}{A''\,(\lambda_2 - \lambda_3)\,(\lambda_2 - \lambda_1)},$$
$$\zeta_i \zeta_k = \frac{A_{i,k}^{(\lambda_3)}}{A''\,(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

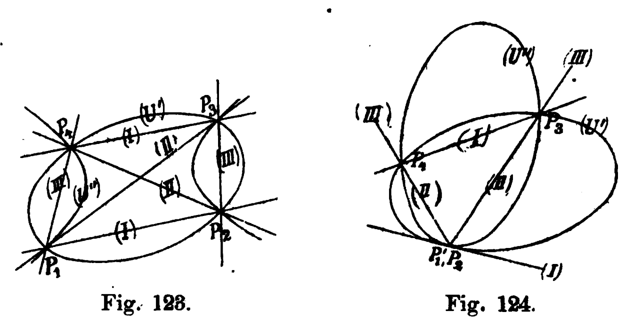


Fig. 123. Fig. 124.

Die hier vorgeführte Untersuchung zeigt gleichzeitig, dass zwei Kegelschnitte nur ein gemeinsames Polardreieck besitzen, und lehrt uns überdies selbes zu bestimmen, sowie die Gleichungen beider Kegelschnitte, bezogen auf dieses Dreieck als Coordinatendreieck.

§ 90. Berührung zweier Kegelschnitte nach der ersten und zweiten Ordnung.

Fallen von den vier Schnittpunkten $P_1 \ldots . P_4$ zweier Kegelschnitte $U' \equiv \int a_{i,k}' x_i x_k = o$ und $U'' \equiv \int a_{i,k}'' x_i x_k = o$ zwei davon, z. B. P_1 und P_2, zusammen, so berühren sich diese beiden Curven im Punkte P_1 nach der ersten Ordnung oder zweipunktig. In diesem Fall reducieren sich jedoch (Fig. 123 und 124) die drei Geradenpaare, welche man durch die vier Schnittpunkte P_i legen kann, auf zwei, d. h. es fallen von denselben zwei zusammen, weshalb die bereits in § 88 in Anwendung gekommene cubische Gleichung (e), nämlich

$$A(\lambda) = A''. \lambda^3 + 3 A_{122} \lambda^2 + 3 A_{112} \lambda + A' = o$$

eine tautologe Wurzel haben muss, was wieder bedingt, dass die Discriminante der binären cubischen Form

$$\chi(\lambda_1, \lambda_2) = A' \lambda_1^3 + 3 A_{112} \lambda_1^2 \lambda_2 + 3 A_{122} \lambda_1 \lambda_2^2 + A'' \lambda_2^3$$

verschwindet. Nun erscheint aber diese Discriminante gegeben durch die 4^2elementige Determinante

$$\begin{vmatrix} A' & 2 A_{112} & A_{122} & o \\ o & A' & 2 A_{112} & A_{122} \\ A_{112} & 2 A_{122} & A'' & o \\ o & A_{112} & 2 A_{122} & A'' \end{vmatrix},$$

und demnach ist

$$(499) \quad . \quad 4(A' . A_{122} - A_{112}^2)(A'' A_{112} - A_{122}^2) - (A' A'' - A_{112} A_{122})^2 = o$$

die Bedingung, welcher die Coefficienten $a_{i,k}'$ und $a_{i,k}''$ unterworfen sind, wenn die Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ in einem Punkte nach der ersten Ordnung sich berühren. Der hier links vom Gleichheitszeichen erscheinende Ausdruck, nämlich die Discriminante von $\chi(\lambda_1, \lambda_2)$, ist gleichzeitig eine simultane Invariante der beiden ternären Formen U' und U'', indem dieser Ausdruck in A', A'', A_{112} und A_{122} homogen ist und die eben angeführten vier Größen lauter Invarianten darstellen, welche bei der Transformation der Gleichungen $U' = o$ und $U'' = o$ auf ein anderes Coordinatendreieck übergehen in: $\delta^2 . A'$, $\delta^2 A''$, $\delta^2 A_{112}$ und $\delta^2 . A_{122}$, wie in den früheren Paragraphen 86 und 87 gezeigt wurde. Man nennt die in Gl. (499) vorkommende Invariante noch die Tactinvariante der beiden Formen U' und U''. Diese Tactinvariante kann übrigens auch durch die Invarianten E', E'', E_{112} und E_{122} ausgedrückt werden. Aus den Gleichungen (485) ergibt sich nämlich $A_{112} = \frac{E_{122}}{A''}$ und $A_{122} = \frac{E_{112}}{A'}$, während zwischen den Determinanten A', A'' und E', E'' bekanntlich die Beziehungen bestehen $E' = A'^2$ und $E'' = A''^2$, weshalb die eben gefundene Gleichung ersetzt werden kann durch:

$$(500) \quad . \quad . \quad 4(E'' . E_{112} - E_{122}^2)(E' . E_{122} - E_{112}^2) - (E' E'' - E_{112} E_{122})^2 = o.$$

Wenn dagegen von den früher bereits in Betracht gekommenen vier Schnittpunkten P_i drei, z. B. P_1, P_2 und P_3, zusammenfallen, so berühren sich die beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ im Punkte P_1 nach der zweiten Ordnung oder dreipunktig. Die drei Geradenpaare, welche durch die vier Schnittpunkte $U' = o$ und $U'' = o$ sich legen lassen, fallen hier zusammen, weshalb auch die frühere Gleichung $A^{(\lambda)} = o$ eine dreifache Wurzel besitzen muss. Bezeichnet man nun letztere durch den Buchstaben w, so

muss daher auch nach der Lehre von den höheren Gleichungen sein:

$$\frac{A'}{A''} = -w^3, \quad \frac{A_{112}}{A''} = w^2, \quad \frac{A_{122}}{A''} = -w,$$

und hieraus ergibt sich durch die Elimination von w:

$$(501) \;\ldots\; \frac{A'}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A''}$$

als Bedingung für die Berührung der Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ nach der zweiten Ordnung. Es ist klar, dass man (501) auch ersetzen kann durch zwei der drei Gleichungen

$$A_{112}^2 - A' A_{122} = o, \quad A_{122}^2 - A'' A_{112} = o,$$
$$A'A'' - A_{112} A_{122} = o,$$

und wird noch bemerkt, dass ein jedes obiger drei Gleichungspolynome wieder eine simultane Invariante der Formen U' und U'' darstellt.

§ 91. Schmiegungskreis eines Kegelschnittes. Die Schmiegungsparabel.

Bezeichnen P_1, P_3 und P_2, P_4 die vier Punkte, in welchen der Kegelschnitt

$$U \equiv a_{1,1} x^2 + 2 a_{1,2} xy + \ldots + a_{3,3} = o$$

von den beiden Geraden $L_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$ und $L_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$ geschnitten wird, und ist λ ein veränderlicher Parameter, so repräsentiert

$$(a) \;\ldots\ldots\; U - \lambda L_1 L_2 = o$$

die Gleichung eines Kegelschnittsbüschels von den vier Grundpunkten $P_1 \ldots P_4$. Die drei (Fig. 125) degenerierten Kegelschnitte des Büschels sind die Paare II und III, sowie das gegebene Paar (L_1), (L_2). In dem speciellen Fall jedoch, wo die Geraden $L_1 = o$ und $L_2 = o$ in einem Punkte des Kegelschnittes $U = o$ sich treffen, fallen nun zwei von diesen vier Punkten P_i, z. B. P_1 und P_2, zusammen, und es ist dann Gleichung (a) der Inbegriff aller Kegelschnitte, welche $U = o$ im Punkte P_1 nach der ersten Ordnung oder zweipunktig berühren. Selbstverständlich fällt hier das früher mit II bezeichnete Geradenpaar (Fig. 126) mit dem gegebenen Paar (L_1), (L_2) zusammen, während das dritte

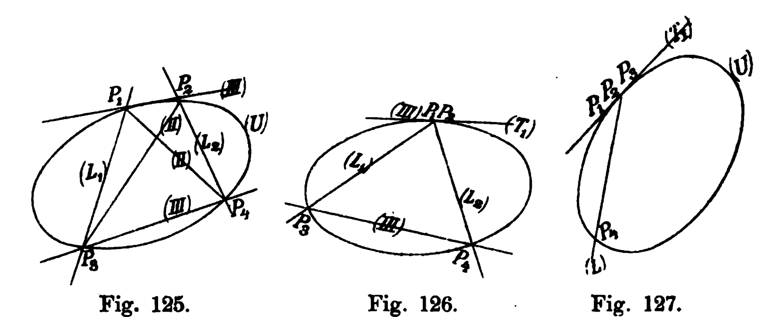


Fig. 125. Fig. 126. Fig. 127.

Paar aus der Tangente (T_1), gelegt im Punkte P_1 an die Curve $U = o$, und der Verbindungsgeraden $P_3 P_4$ besteht. Lassen wir nun auch (L_1) mit (T_1) zusammenfallen, während (L_2) irgend eine durch den Punkt P_1 gelegte Gerade (L) sei (Fig. 127), so kommt auch der dritte Punkt P_3 nach P_1 und ist somit, sobald wieder λ ein veränderlicher Parameter wäre, durch die Gleichung $U - \lambda L \,.\, T_1 = o$, oder jene $U - \lambda . [A(x - x_1) + B(y - y_1)] \, [(a_{1,1} x_1 + a_{1,2} y_1 + a_{1,3}) x + (a_{1,2} x_1 + a_{2,2} y_1 + a_{2,3}) y + (a_{1,3} x_1 + a_{2,3} y_1 + a_{3,3})] = o$ die Gesammtheit aller Kegelschnitte gegeben, welche $U = o$ im Curvenpunkte P_1 von den Coordinaten x_1, y_1 nach der zweiten Ordnung oder dreipunktig berühren. Man kann übrigens auch λA durch A und λB durch B ersetzen, wodurch obige Gleichung in die etwas einfachere übergeht

$$(c) \quad \begin{aligned} &U - [A(x - x_1) + B(y - y_1)] . [(a_{1,1} x_1 + a_{1,2} y_1 + a_{1,3}) x + \\ &(a_{1,2} x_1 + a_{2,2} y_1 + a_{2,3}) y + (a_{1,3} x_1 + a_{2,3} y_1 + a_{3,3})] = o, \end{aligned}$$

welche dasselbe geometrische Äquivalent hat als die vorhergegangene, sobald man hier A und B als veränderlich ansieht. Fällt endlich auch (L) mit (T_1) zusammen, so gelangt P_4 ebenfalls nach P_1 und ist somit

$$(d) \; . \; . \; . \; . \; . \qquad U - \lambda \,.\, T_1^{\,2} = o$$

der geometrische Ort aller Kegelschnitte, welche $U = o$ im Punkte P_1 nach der dritten Ordnung oder vierpunktig berühren.

Noch mag der Fall erörtert werden, wo die beiden Strahlen (L_1) und (L_2) in Fig. 125 zusammenfallen, also die Gleichung (a) die Form annimmt

$(e) \ldots \qquad U - \lambda . L^2 = o,$

Nachdem hier speciell P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4 zusammenfällt, ist unter der Annahme, dass wieder λ veränderlich erscheint, Gl. (e) die Gesammtheit aller Kegelschnitte, welche die Curve $U = o$ in jenen zwei Punkten nach der ersten Ordnung berühren, wo diese Curve von der Geraden $L = o$ geschnitten wird. Man nennt diese Berührung eine doppelte Berührung.

1. Beispiel. Es ist zu bestimmen die Gleichung des Schmiegungskreises der Parabel $y^2 - px = o$ im Punkte P_1 von den Coordinaten x_1, y_1.

Die hier vorliegende Aufgabe wird mittelst Gl. (c) gelöst. Ersetzt man nämlich daselbst U durch das Binom $y^2 - px$ und den zweiten Klammerausdruck durch $2y_1y - p(x + x_1)$, so erhält man, wenn wieder A und B als veränderlich angesehen werden,

$$(y^2 - px) - [A(x - x_1) + B(y - y_1)] . [2y_1y - p(x + x_1)] = o$$

als die Gleichung sämmtlicher Kegelschnitte, welche die Parabel $y^2 - px = o$ im Curvenpunkte x_1, y_1 nach der zweiten Ordnung berühren. Unter diesen Kegelschnitten befindet sich aber auch der zu suchende Schmiegungskreis, und man braucht zur Auffindung seiner Gleichung bloß A und B der Art zu wählen, dass die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich werden und der Coefficient von xy verschwindet, d. h. für A und B in obige Gleichung diejenigen Werte zu substituieren, welche aus $Ap = 1 - 2By_1$ und $Bp - 2Ay_1 = o$ hervorgehen. Nun ergibt sich aber hieraus $A = \frac{p}{p^2 + 4y_1^2}$ und $B = \frac{2y_1}{p^2 + 4y_1^2}$; es ist daher auch, wegen $y_1^2 - px_1 = o$,

$$(p^2 + 4px_1)(y^2 - px) - [2y_1y - p(x + x_1)][2y_1y + p(x - 3x_1)] = o$$

die gesuchte Gleichung des Schmiegungskreises, d. h. desjenigen Kreises, welcher die Parabel $y^2 - px = o$ im Curvenpunkte x_1, y_1 nach der zweiten Ordnung berührt.

2. Beispiel. Man bestimme die Gleichung des Schmiegungskreises der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=o$ im Punkte P_1 von den Coordinaten x_1, y_1.

Diese Gleichung folgt ebenfalls aus (c), wenn man daselbst U ersetzt durch das Trinom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, für den zweiten Klammerausdruck substituiert $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}-1$ und die Parameter A und B so wählt, dass die Gleichung (c) einen Kreis darstellt. Es ist daher auch

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}-1\right)[A(x-x_1)+B(y-y_1)]=o$$

die gesuchte Gleichung des Schmiegungskreises, wenn noch unter A und B die aus den beiden Relationen $\frac{1-Ax_1}{a^2}=\frac{1-By_1}{b^2}$ und $\frac{Ay_1}{b^2}+\frac{Bx_1}{a^2}=o$ fließenden Werte, nämlich $A=\frac{b^2(b^2-a^2)x_1}{b^4 x_1^2+a^4 y_1^2}$ und $B=-\frac{a^2(b^2-a^2)y_1}{b^4 x_1^2+a^4 y_1^2}$, verstanden sind, wodurch obige Gleichung die Gestalt annimmt:

$$\frac{b^4 x_1^2+a^4 y_1^2}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}-1\right)[b^2 x_1(x-x_1)-$$
$$a^2 y_1(y-y_1)]=o.$$

Um nun die eben gewonnene Gleichung zweckdienlich umzuformen, dividiere man sie vorerst durch $a^2 b^2$ und setze vorübergehend $\varrho=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2 x_1^2}{a^2}+\frac{a^2 y_1^2}{b^2}\right)$, wodurch dieselbe nach erfolgter Zusammenziehung der mit gleichen Potenzen von x und y behafteten Glieder übergeht in

$$\left(\frac{\varrho}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^4}\right)x^2+\left(\frac{\varrho}{b^2}+\frac{y_1^2}{b^4}\right)y^2+\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}+1\right)\frac{x_1 x}{a^2}+$$
$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\frac{y_1 y}{b^2}+\left(\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}-\varrho\right)=o,$$

und weil nach der eben angegebenen Bedeutung von ϱ, sowie wegen Ret. $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=o$,

$$\frac{\varrho}{a^2} - \frac{x_1^{\,2}}{a^4} = \frac{\varrho}{b^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^4} = \frac{1}{b^2 - a^2}, \qquad \frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{y_1^{\,2}}{b^2} + 1 = \frac{2x_1^{\,2}}{a^2},$$

$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{y_1^{\,2}}{b^2} - 1 = -\frac{2y_1^{\,2}}{b^2}$$

und

$$\frac{y_1^{\,2}}{b^2} - \frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \varrho = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[x_1^{\,2} + y_1^{\,2} - 2\left(\frac{b^2 x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{a^2 y_1^{\,2}}{b^2}\right)\right]$$

werden, so erhält man schließlich

$$x^2 + y^2 - \frac{2x_1^{\,3}(a^2 - b^2)}{a^4}x - \frac{2y_1^{\,3}(b^2 - a^2)}{b^4}y + x_1^{\,2} + y_1^{\,2} - 2\left(\frac{b^2 x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{a^2 y_1^{\,2}}{b^2}\right) = o$$

als Gleichung des gesuchten Schmiegungskreises.

Die Schmiegungsparabel. Die Gleichung

$$U \equiv a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x = o$$

stellt einen Kegelschnitt dar, welcher die Achse der y im Ursprunge O nach der ersten Ordnung berührt; denn setzt man hierin $x = o$, so ergibt sich zur Bestimmung der beiden Schnittpunkte der Curve $U = o$ mit dieser Geraden die Ret. $a_{2,2}y^2 = o$, welche zeigt, dass diese Punkte mit O zusammenfallen. Selbstverständlich gilt dies auch von dem durch

$$V \equiv a_{1,1}'x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x = o$$

gegebenen Kegelschnitte. Ferner ist $U - V = o$ die Gleichung eines dritten Kegelschnittes, welcher durch die vier Schnittpunkte der Curven $U = o$ und $V = o$ geht, und weil $U - V = (a_{1,1} - a_{1,1}')x^2$ ist, so kann man durch die besagten Schnittpunkte die Doppelgerade $x = o$ legen. Nun haben wir aber soeben gezeigt, dass ein jeder der Kegelschnitte $U = o$ und $V = o$ die Achse der y im Ursprunge O berührt, weshalb die vier Schnittpunkte von $U = o$ und $V = o$ mit O zusammenfallen müssen oder der Kegelschnitt $V = o$ jenen $U = o$ im Punkte O vierpunktig, d. h. nach der dritten Ordnung berührt. Wird jetzt noch $a_{1,1}' = \frac{a_{1,2}^{\,2}}{a_{2,2}}$ gemacht, so ist das geometrische Äquivalent von $V = o$ eine Parabel und daher auch

$$V \equiv (a_{1,2}x + a_{2,2}y)^2 + 2a_{1,3}a_{2,2}x = o$$

die Gleichung derjenigen Parabel, welche den Kegelschnitt $U = o$ im Ursprunge O nach der dritten Ordnung berührt. Diese Parabel heißt die Schmiegungsparabel des Kegelschnittes $U = o$ im Punkte O.

§ 92. Sätze über das Verschwinden der simultanen Invarianten A_{112}, A_{122}, E_{112}, E_{122} und einiger hieraus abgeleiteten Invarianten.

Satz. Ist $U'' = o$ ein Geradenpaar ($A'' = o$), so repräsentiert das Verschwinden der simultanen Invariante A_{122} die Bedingung, unter welcher der Mittelpunkt dieses Paars einen Punkt des Kegelschnittes $U' = o$ darstellt; dagegen ist $A_{112} = o$ die Bedingung, unter welcher $U'' = o$ ein Paar harmonischer Polaren in Bezug auf $U' = o$ angibt.

Beweis. Lässt man die Seiten (x_1) und (x_2) des Coordinatendreiecks mit den beiden Elementen des Geradenpaars $U'' = o$ zusammenfallen, so wird $U'' = 2 x_1 x_2$ und nimmt daher die Gleichung (472) des Kegelschnittsbüschels die einfachere Form an

$$(a) \quad U' + 2 \lambda x_1 x_2 = o,$$

Satz. Ist $\Sigma'' = o$ ein Punktpaar ($E'' = o$), so repräsentiert das Verschwinden der simultanen Invariante E_{122} die Bedingung, unter welcher der Träger dieses Paars eine Tangente des Kegelschnittes $\Sigma' = o$ darstellt; dagegen ist $E_{112} = o$ die Bedingung, unter welcher $\Sigma'' = o$ ein Paar harmonischer Pole in Bezug auf $\Sigma' = o$ angibt.

Beweis. Lässt man die Ecken M_1 und M_2 des Coordinatendreiecks mit den beiden Elementen des Punktpaars $\Sigma'' = o$ zusammenfallen, so wird $\Sigma'' = 2 u_1 u_2$ und nimmt dadurch die Gleichung (481) der Kegelschnittsreihe die einfachere Gestalt an

$$\Sigma' + 2 \lambda u_1 u_2 = o, \quad (b)$$

wobei noch bemerkt wird, dass die Symbole U' und Σ' definiert erscheinen durch die Gleichungen $U' = \int a_{i,k}' x_i x_k$ und $\Sigma' = \int \alpha_{i,k}' u_i u_k$. Die zur Bestimmung der degenerierten Kegelschnitte des Büschels, respective der Reihe, dienenden cubischen Gleichungen (e) und (f) des Paragraphen 88 gehen, weil ja in dem vorliegenden Fall $3 A_{122} = a_{3,3}' A_{3,3}'' = - a_{3,3}'$, $3 A_{112} = 2 a_{1,2}'' A_{1,2}' = 2 (a_{1,3}' a_{2,3}' - a_{1,2}' a_{3,3}')$ und

$3E_{122} = \alpha_{3,3}' E_{3,3}'' = -\alpha_{3,3}'$, $3E_{112} = 2\alpha_{1,2}'' E_{1,2}' = 2(\alpha_{1,3}'\alpha_{2,3}' - \alpha_{1,2}'\alpha_{3,3}')$ werden und $A'' = o$, sowie $E'' = o$ ist, über in

$-\alpha_{3,3}'\lambda^2 + 2(\alpha_{1,3}'\alpha_{2,3}' - \alpha_{1,2}'\alpha_{3,3}')\lambda + A' = o,$ | $-\alpha_{3,3}'\lambda^2 + 2(\alpha_{1,3}'\alpha_{2,3}' - \alpha_{1,2}'\alpha_{3,3}')\lambda + E' = o,$

und ist sonach die eine Wurzel λ_1 der cubischen Gleichung $A(\lambda) = o$, respective $E(\lambda) = o$, unendlich groß, woraus man den Schluss zieht, dass der eine degenerierte Kegelschnitt von (a), beziehungsweise von (b), durch das gegebene Paar selbst dargestellt erscheint. Wird jedoch auch $a_{3,3}' = o$, respective $\alpha_{3,3}' = o$, so wird obige Gleichung linear und somit $\lambda_2 = \infty$. Es fallen alsdann zwei der degenerierten Kegelschnitte des Kegelschnittsbüschels (der Kegelschnittsreihe) mit dem gegebenen Paar $U'' = o$ $(\Sigma'' = o)$ zusammen, was jedoch nur denkbar erscheint, wenn

der Schnittpunkt der beiden Elemente des Paars $U'' = o$ ein Punkt von $U' = o$ ist. Übrigens folgt auch aus $a_{3,3}' = o$, dass dieser Schnittpunkt in der Curve $U' = o$ zu liegen kommt.

die Verbindungsgerade der beiden Elemente des Paars $\Sigma'' = o$ den Kegelschnitt $\Sigma' = o$ berührt. Übrigens folgt auch aus $\alpha_{3,3}' = o$, dass die Gerade $M_1 M_2$ den Kegelschnitt $\Sigma' = o$ berührt.

Nun ist aber hier speciell $3A_{122} = -a_{3,3}'$ und $3E_{122} = -\alpha_{3,3}'$, daher verschwinden auch A_{122}, beziehungsweise E_{122}, und weil vermöge der invarianten Eigenschaft von A_{122} und E_{122} das Verschwinden dieser Größen von der Wahl des Coordinatendreiecks unabhängig ist, erscheint der Beweis der ersten Sätze erbracht.

Bei der Begründung dieser Sätze hätte man wohl sofort die allgemeinen Gleichungen (e) und (f) in § 88 benützen können; dass dies nicht geschah, hat seinen Grund in der Beweisführung der beiden anderen Sätze. Übergehend auf die letzteren sei nun

M' ein Punkt in der Geraden (x_1), welche nach unserer Annahme das eine Element des Geradenpaars $U'' = o$ angibt.

(L') ein durch den Eckpunkt M_1 des Coordinatendreiecks gelegter Strahl, welcher Punkt zufolge unserer Annahme

Nennt man wieder x_i' die trimetrischen Coordinaten des Punktes M', so ist, da ja hier speciell $x_1' = o$ sein muss,

$$(a_{1,2}' x_2' + a_{1,3}' x_3') x_1 + (a_{2,2}' x_2' + a_{2,3}' x_3') x_2 + (a_{2,3}' x_2' + a_{3,3}' x_3') x_3 = o$$

die Gleichung der Polaren von M' bezüglich des Kegelschnittes $U' = o$. Für den Fall, wo diese Polare aber mit der anderen Geraden (x_2) des Paars $U'' = o$ zusammenfallen soll, müssen jedoch die Coefficienten von x_1 und x_3 in obiger Gleichung verschwinden,

gleichzeitig ein Element von $\Sigma'' = o$ angibt. Nennt man wieder u_i' die trigonalen Coordinaten des Strahls (L'), so ist, da ja hier speciell $u_1' = o$ sein muss,

$$(\alpha_{1,2}' u_2' + \alpha_{1,3}' u_3') u_1 + (\alpha_{2,2}' u_2' + \alpha_{2,3}' u_3') u_2 + (\alpha_{2,3}' u_2' + \alpha_{3,3}' u_3') u_3 = o$$

die Gleichung des Pols von (L') bezüglich des Kegelschnittes $\Sigma' = o$. Für den Fall, wo dieser Pol aber mit dem andern Elemente M_2 des Paars $\Sigma'' = o$ zusammenfallen soll, müssen jedoch die Coefficienten von u_1 und u_3 in obiger Gleichung verschwinden,

d. h. es müssen gleichzeitig die beiden Relationen bestehen

$$a_{1,2}' x_2' + a_{1,3}' x_3' = o, \qquad a_{2,3}' x_2' + a_{3,3}' x_3' = o, \qquad \Big| \qquad \alpha_{1,2}' u_2' + \alpha_{1,3}' u_3' = o, \qquad \alpha_{2,3}' u_2' + \alpha_{3,3}' u_3' = o,$$

aus welchen nach der Determinantentheorie sich ergibt

$$a_{1,2}' a_{3,3}' - a_{1,3}' a_{2,3}' = o, \qquad \Big| \qquad \alpha_{1,2}' \alpha_{3,3}' - \alpha_{1,3}' \alpha_{2,3}' = o,$$

oder

$$A_{112} = o. \qquad \Big| \qquad E_{112} = o.$$

Ist aber (x_2) die Polare für einen in (x_1) liegenden Punkt M' — die Coordinaten des letzteren sind $x_1' = o$ und $\frac{x_2'}{x_3'} = -\frac{a_{1,3}'}{a_{1,2}'} = -\frac{a_{3,3}'}{a_{2,3}'}$, so bildet nach der Lehre von der Polarisation der Kegelschnitte (Cap. XI) das Tangentenpaar, welches man aus dem Schnittpunkte der Strahlen (x_1) und (x_2) an $U' = o$

Ist aber M_2 der Pol für einen durch M_1 gehenden Strahl (L') — die Coordinaten des letzteren sind $u_1' = o$ und $\frac{u_2'}{u_3'} = -\frac{\alpha_{1,3}'}{\alpha_{1,2}'} = -\frac{\alpha_{3,3}'}{\alpha_{2,3}'}$, so bildet nach der Lehre von der Polarisation der Kegelschnitte (Cap. XI) das Schnittpunktpaar, welches sich ergibt, wenn man die Gerade $M_1 M_2$ mit $\Sigma' = o$ zum

legen kann, mit letzteren einen harmonischen Strahlenbüschel, weshalb auch (x_1) und (x_2) ein Paar harmonischer Strahlen bezüglich $U' = o$ repräsentieren.

Schnitte bringt, mit den Punkten M_1 und M_2 eine harmonische Punktreihe, weshalb auch M_1 und M_2 ein Paar harmonischer Pole bezüglich $\Sigma' = o$ repräsentieren.

Zufolge der invarianten Eigenschaften von A_{112} und E_{112} ist aber das Verschwinden dieser Größen ganz und gar unabhängig von der Wahl des Coordinatendreiecks, daher erscheinen auch die beiden letzten Sätze erwiesen.

Satz. Ist $U'' = o$ die Gleichung eines Geradenpaars $(A'' = o)$, so repräsentiert das Verschwinden der simultanen Invariante $9A_{112}^2 - 12A'A_{122}$ die Bedingung, unter welcher ein Element dieses Paars den Kegelschnitt $U' = o$ berührt.

Satz. Ist $\Sigma'' = o$ die Gleichung eines Punktpaars $(E'' = o)$, so gibt das Verschwinden der simultanen Invariante $9E_{112}^2 - 12E'E_{122}$ die Bedingung an, unter welcher ein Element dieses Paars einen Punkt des Kegelschnittes $\Sigma' = o$ darstellt.

Beweis. Lässt man auch hier wieder die Seiten (x_1) und (x_2) des Coordinatendreiecks mit den beiden Geraden $U'' = o$ zusammenfallen, so nehmen A_{112} und A_{122}

Beweis. Lässt man auch hier wieder die Ecken M_1 und M_2 des Coordinatendreiecks mit den beiden Punkten $\Sigma'' = o$ zusammenfallen, so nehmen E_{112} und E_{122}

die zuvor angegebenen Werte an und wird daher, wie man sich durch eine einfache Rechnung leicht überzeugen kann,

$$9A_{112}^2 - 12A'A_{122} = 4(a_{1,1}'a_{3,3}' - a_{1,3}'^2)(a_{2,2}'a_{3,3}' - a_{2,3}'^2).$$

$$9E_{112}^2 - 12E'E_{122} = 4(\alpha_{11}'\alpha_{33}' - \alpha_{1,3}'^2)(\alpha_{2,2}'\alpha_{3,3}' - \alpha_{2,3}'^2).$$

Es verschwindet daher die in Betracht kommende simultane Invariante, wenn einer der beiden rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Klammerausdrücke gleich Null wird, und weil

$$a_{2,2}'a_{3,3}' - a_{2,3}'^2 = o, \quad a_{1,1}'a_{3,3}' - a_{1,3}'^2 = o$$

$$\alpha_{2,2}'\alpha_{3,3}' - \alpha_{2,3}'^2 = o, \quad \alpha_{1,1}'\alpha_{3,3}' - \alpha_{1,3}'^2 = o$$

nach § 65 die Bedingung ausdrückt, unter welcher

die Gerade (x_1), respective (x_2), den Kegelschnitt $U' = o$ berührt,

der Punkt M_1, respective M_2, dem Kegelschnitte $\Sigma' = o$ angehört,

erscheint obiger Satz erwiesen.

Satz. Verschwindet die simultane Invariante A_{112} der beiden ternären Formen $U' = \int a_{i,k}' x_i x_k$ und $U'' = \int a_{i,k}'' x_i x_k$, so existieren unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf den Kegelschnitt $U' = o$, welche dem anderen $U'' = o$ eingeschrieben sind; ist dagegen $A_{122} = o$, so gibt es unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf $U'' = o$, welche $U' = o$ eingeschrieben erscheinen.

Beweis. Es sei die Ecke M_3 des Coordinatendreiecks ein Punkt des Kegelschnittes $U'' = o$, also $a_{3,3}'' = o$, und überdies die dieser Ecke gegenüber liegende Seite (x_3) in dem erwähnten Dreieck der Art gewählt, dass selbe die Polare von M_3 bezüglich $U' = o$ darstellt. Dann muss, indem $a_{1,3}' x_1 + a_{2,3}' x_2 + a_{3,3}' x_3 = o$ die Gleichung dieser Polaren repräsentiert, $a_{1,3}' = a_{2,3}' = o$

Satz. Verschwindet die simultane Invariante E_{112} der beiden ternären Formen $\Sigma' = \int A_{i,k}' u_i u_k$ und $\Sigma'' = \int A_{i,k}'' u_i u_k$, so existieren unendlich viele Polardreiseite in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma' = o$, welche dem anderen $\Sigma'' = o$ umgeschrieben sind; ist dagegen $E_{122} = o$, so gibt es unendlich viele Polardreiseite in Bezug auf $\Sigma'' = o$, welche $\Sigma' = o$ umgeschrieben erscheinen.

Beweis. Es sei die Seite (x_3) des Coordinatendreiecks eine Tangente des Kegelschnittes $\Sigma'' = o$, also $A_{3,3}'' = o$, und überdies die dieser Seite gegenüber liegende Ecke M_3 in dem erwähnten Dreieck der Art gewählt, dass selbe den Pol von (x_3) bezüglich $\Sigma' = o$ darstellt. Dann muss, indem $A_{1,3}' u_1 + A_{2,3}' u_2 + A_{3,3}' u_3 = o$ die Gleichung dieses Pols repräsentiert, $A_{1,3}' = A_{2,3}' = o$

sein, weshalb auch

$A_{1,1}' = a_{2,2}' a_{3,3}'$, $A_{1,2}' = - a_{1,2}' a_{3,3}'$, $A_{2,2}' = a_{1,1}' a_{3,3}'$, $A_{1,3}' = A_{2,3}' = o$

$E_{1,1}' = A_{2,2}' A_{3,3}'$, $E_{1,2}' = - A_{1,2}' A_{3,3}'$, $E_{2,2}' = A_{1,1}' A_{3,3}'$, $E_{1,3}' = E_{2,3}' = o$

und zufolge Gl. (474), respective (483),

$3A_{112} = a_{3,3}'(a_{1,1}'a_{2,2}'' + a_{1,1}''a_{2,2}' - 2a_{1,2}'a_{1,2}'')$ | $3E_{112} = A_{3,3}'(A_{1,1}'A_{2,2}'' + A_{1,1}''A_{2,2}' - 2A_{1,2}'A_{1,2}'')$

wird. Setzt man nun in den beiden Gleichungen

$U' = o$ und $U'' = o$ diesmal $x_3 = o$, | $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ diesmal $u_3 = o$,

so gelangt man zu den Gleichungen

$$(c)\quad a_{1,1}'x_1^2 + 2a_{1,2}'x_1x_2 + a_{2,2}'x_2^2 = o,\ a_{1,1}''x_1^2 + 2a_{1,2}''x_1x_2 + a_{2,2}''x_2^2 = o,$$

$$(d)\quad A_{1,1}'u_1^2 + 2A_{1,2}'u_1u_2 + A_{2,2}'u_2^2 = o,\ A_{1,1}''u_1^2 + 2A_{1,2}''u_1u_2 + A_{2,2}''u^2 = o,$$

von denen nach § 44 eine jede ein

Strahlenpaar bestimmt, welche Paare die beiden Punktpaare T', T'' und M', M'', in welchen die Gerade $x_3 = o$ die Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ durchschneidet, mit der Ecke M_3 des Coordinatendreiecks verbinden. Sollen nun diese Schnittpunktpaare harmonisch sein, d.h. soll $(T'T''M'M'') = -1$ werden,

Punktpaar bestimmt, in welchen Paaren die beiden Tangentenpaare (T'), (T'') und (L'), (L''), die man aus M_3 an die Kegelschnitte $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ ziehen kann, die Seite (x_3) des Coordinatendreiecks durchschneiden. Sollen nun diese Tangentenpaare harmonisch sein, d.h. soll $(T'T''L'L'') = -1$ werden,

so müssen nach dem Satze von Pappus die beiden obigen Gleichungen

(c) zwei harmonische Geradenpaare | (d) zwei harmonische Punktpaare

darstellen, was nach Gl. (297) in § 45 dann stattfindet, wenn

$a_{1,1}'a_{2,2}'' + a_{1,1}''a_{2,2}' - 2a_{1,2}'a_{1,2}'' = o$ | $A_{1,1}'A_{2,2}'' + A_{1,1}''A_{2,2}' - 2A_{1,2}'A_{1,2}'' = o$

wird, woraus in Anbetracht der früher gefundenen Werte von A_{112} und E_{112} folgt

$A_{112} = o$, | $E_{112} = o$,

und d. i., wegen der invarianten Eigenschaft von A_{112} und E_{112}, gleichzeitig die Bedingung, unter welcher

die Polare irgend eines Punktes M_3 des Kegelschnittes | der Pol irgend einer Tangente (x_3) des Kegelschnittes $\Sigma'' = o$,

$U'' = o$, bezüglich des anderen Kegelschnittes $U' = o$, beide Curven in zwei harmonischen Punktpaaren durchschneidet. Dann bestimmen aber (Siehe Polarisation) die Punkte M' und M'', in welchen die Polare von M_3 bezüglich $U' = o$ den Kegelschnitt $U'' = o$ durchschneidet, mit dem Punkte M_3 ein Dreieck, welches ein Polardreieck von $U' = o$ darstellt und gleichzeitig dem Kegelschnitte $U'' = o$ eingeschrieben erscheint, weshalb auch, sobald $A_{112} = o$ ist, unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf $U' = o$ existieren, welche $U'' = o$ eingeschrieben sind.

bezüglich des anderen Kegelschnittes $\Sigma' = o$ eine solche Lage besitzt, dass die beiden aus diesem Pol an $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ gezogenen Tangentenpaare harmonisch sind. Dann bestimmen aber (Siehe Polarisation) die Tangenten (L') und (L''), welche man aus dem Pol von (x_3) an den Kegelschnitt $\Sigma'' = o$ ziehen kann, mit dem Strahl (x_3) ein Dreiseit, welches ein Polardreiseit von $\Sigma' = o$ darstellt und gleichzeitig $\Sigma'' = o$ umgeschrieben erscheint, weshalb auch, sobald $E_{112} = o$ ist, unendlich viele Polardreiseite in Bezug auf $\Sigma' = o$ existieren, welche $\Sigma'' = o$ umgeschrieben erscheinen.

Unter der verkehrten Voraussetzung, dass nämlich ein

Polardreieck bezüglich $U' = o$ existiert, welches dem Kegelschnitte $U'' = o$ eingeschrieben ist,

Polardreiseit bezüglich $\Sigma' = o$ existiert, welches dem Kegelschnitte $\Sigma'' = o$ umgeschrieben ist,

sind nun, wenn man dieses Dreieck (Dreiseit) zum Coordinatendreieck wählt,

$$a_{1,1}'x_1^2 + a_{2,2}'x_2^2 + a_{3,3}'x_3^2 = o,$$
$$2a_{1,2}''x_1x_2 + 2a_{1,3}''x_1x_3 + 2a_{2,3}''x_2x_3 = o$$

$$A_{1,1}'u_1^2 + A_{2,2}'u_2^2 + A_{3,3}'u_3^2 = o,$$
$$2A_{1,2}''u_1u_2 + 2A_{1,3}''u_1u_3 + 2A_{2,3}''u_2u_3 = o$$

die Gleichungen beider Kegelschnitte, und aus diesen folgt

$$3A_{112} = 2a_{1,2}''A_{1,2}' + 2a_{1,3}''A_{1,3}' + 2a_{2,3}''A_{2,3}' = o,$$

$$3E_{112} = 2A_{1,2}''E_{1,2}' + 2A_{1,3}''E_{1,3}' + 2A_{2,3}''E_{2,3}' = o,$$

indem ja hier speciell

$$A_{1,2}' = A_{1,3}' = A_{2,3}' = o \quad | \quad E_{1,2}' = E_{1,3}' = E_{2,3}' = o$$

werden.

Damit erscheint der erste Theil unseres Satzes erwiesen, und es ist klar, dass der zweite Theil des letzteren in der nämlichen Weise begründet werden kann. Nun bestehen aber zwischen den simultanen Invarianten A_{112}, A_{122} und E_{112}, E_{122} nach Gl. (485) in § 87 die Beziehungen $E_{112} = A' \,.\, A_{122}$ und $E_{122} = A'' \,.\, A_{112}$, weshalb auch A_{112} und E_{122}, sowie A_{122} und E_{122}, nur gleichzeitig verschwinden können, und repräsentieren die Gleichungen $U' = o$ und $\Sigma' = o$, sowie $U'' = o$ und $\Sigma'' = o$, eine und dieselbe Curve; man kann daher die beiden vorhergegangenen Sätze zusammen so aussprechen:

Verschwindet die simultane Invariante A_{112} der beiden ternären quadratischen Formen $U' = \int a_{i,k}' x_i x_k$ und $U'' = \int a_{i,k}'' x_i x_k$, so existieren stets unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf den Kegelschnitt $U' = o$, welche jenem $U'' = o$ eingeschrieben sind, sowie unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf $U'' = o$, welche $U' = o$ umgeschrieben sind; ist dagegen $A_{122} = o$, so gibt es stets unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf $U'' = o$, welche $U' = o$ eingeschrieben und unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf $U' = o$, welche $U'' = o$ umgeschrieben erscheinen.

In dem speciellen Fall, wo daher ein Kegelschnitt $U' = o$ einem Polardreieck bezüglich eines anderen Kegelschnittes $U'' = o$ umgeschrieben ist, kann auch immer $U'' = o$ einem Polardreieck bezüglich $U' = o$ eingeschrieben werden; ebenso kann, sobald $U' = o$ einem Polardreieck bezüglich $U'' = o$ eingeschrieben erscheint, auch $U'' = o$ einem Polardreieck bezüglich $U' = o$ umgeschrieben werden. Man nennt zwei Kegelschnitte von dieser Eigenschaft „harmonische Kegelschnitte", und es muss daher, wenn $U' = o$, $U'' = o$ die Gleichungen von zwei harmonischen Kegelschnitten wären, jedenfalls eine der beiden simultanen Invarianten A_{112} und A_{122} verschwinden, weshalb auch die letzteren „harmonische Invarianten" genannt werden können. Dabei wird noch bemerkt, dass von diesen diejenige Invariante gleich Null wird, welche die Coefficienten der Punktcoordinatengleichung des umgeschriebenen, sowie die Coefficienten der Liniencoordinatengleichung des eingeschriebenen Kegelschnittes enthält.

Satz. Soll ein Dreieck existieren, welches dem Kegelschnitte $U' \equiv \int a_{i,k}' x_i x_k = o$ eingeschrieben, jenem $U'' \equiv \int a_{i,k}'' x_i x_k = o$ aber umgeschrieben ist, so muss die Bedingung erfüllt erscheinen

$$(3 A_{122})^2 - 4 A'' (3 A_{112}) = o.$$

Beweis. Nimmt man an, die beiden Kegelschnitte hätten eine derartige Lage, dass ein Dreieck möglich ist, welches $U' = o$ eingeschrieben und gleichzeitig $U'' = o$ umgeschrieben erscheint, und wählt man dieses Dreieck zum Coordinatendreieck, so lauten die Gleichungen der beiden Kegelschnitte:

$$2 a_{1,2} x_1 x_2 + 2 a_{1,3} x_1 x_3 + 2 a_{2,3} x_2 x_3 = o,$$

$$\alpha_{2,3}{}^2 x_1{}^2 - 2 \alpha_{1,3} \alpha_{2,3} x_1 x_2 + \alpha_{1,3}{}^2 x_2{}^2 - 2 \alpha_{1,2} \alpha_{2,3} x_1 x_3 - 2 \alpha_{1,2} \alpha_{1,3} x_2 x_3 + \alpha_{1,2}{}^2 x_3{}^2 = o,$$

und für diese erhält man

$$A' = 2 a_{1,2} a_{1,3} a_{2,3}, \quad A'' = -4 \alpha_{1,2}{}^2 \alpha_{1,3}{}^2 \alpha_{2,3}{}^2,$$

$$3 A_{112} = -(\alpha_{1,2} a_{1,2} + \alpha_{1,3} a_{1,3} + \alpha_{2,3} a_{2,3})^2$$

und

$$3 A_{122} = 4 \alpha_{1,2} \alpha_{1,3} \alpha_{2,3} (\alpha_{1,2} a_{1,2} + \alpha_{1,3} a_{1,3} + \alpha_{2,3} a_{2,3});$$

es ist daher auch, wie man sich sofort überzeugt,

$$(3 A_{122})^2 - 4 A'' . (3 A_{112}) = o,$$

und weil A'', A_{112} und A_{122} lauter Invarianten sind, die bei der Transformation der Gleichungen unserer Kegelschnitte auf ein anderes Coordinatendreieck um denselben Factor δ^2 sich verändern, so bleibt obige Bedingung auch für die Originalgleichungen $U' \equiv \int a_{i,k}' x x_k = o$ und $U'' \equiv \int a_{i,k}'' x_i x_k = o$ erfüllt, daher etc. etc.

Beispiel. Es soll die gegenseitige Lage zweier Kreise von gegebenen Halbmessern r_1 und r_2 gefunden werden, wenn dem einem davon ein Dreieck eingeschrieben werden kann, welches dem anderen gleichzeitig umgeschrieben ist. Nachdem hier $U' \equiv x^2 + y^2 - r_1{}^2 = o$ und $U'' \equiv x^2 + y^2 - 2 a_2 x - 2 b_2 y + a_2{}^2 + b_2{}^2 - r_2{}^2 = o$ die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind, so wird $A' = -r_1{}^2$, $A'' = -r_2{}^2$, $3 A_{112} = a_2{}^2 + b_2{}^2 - 2 r_1{}^2 - r_2{}^2$, $3 A_{122} = a_2{}^2 + b_2{}^2 - r_1{}^2 - 2 r_2{}^2$ und muss sonach, zufolge des letzten Satzes,

$$(a_2^2 + b_2^2 - r_1^2)^2 = 4 r_1^2 r_2^2,$$

oder

$$a_2^2 + b_2^2 - r_1^2 = \pm 2 r_1 r_2$$

sein, woraus sich ergibt

$$e^2 = r_1^2 \pm 2 r_1 r_2$$

wenn e die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise repräsentiert.

§ 93. Gemeinsame Punkte und Tangenten der Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$. — Sätze über die Kegelschnitte $\Phi = o$ und $\Psi = o$.

Wie in dem vorangegangenen Paragraphen 88 gezeigt wurde, lautet die reciproke Gleichung von $U' + \lambda U'' = o$, respective von $\Sigma' + \lambda \Sigma'' = o$

$$(486) \quad . \quad \Sigma'' \lambda^2 + \Phi . \lambda + \Sigma' = o, \qquad \Big| \qquad A'' U'' \lambda^2 + \Psi \lambda + A' U' = o, \quad . \quad (487)$$

und es ist in diesen Gleichungen $U' = \int a_{i,k}' x_i x_k$, $U'' = \int a_{i,k}'' x_i x_k$, $\Sigma' = \int A_{i,k}' u_i u_k$ und $\Sigma'' = \int A_{i,k}'' u_i u_k$, während die Symbole Φ und Ψ durch die in § 88 angegebenen Relationen (489) und (490) definiert erscheinen. Ersetzt man nun in den Formen

Σ', Σ'' und Φ die trigonalen Liniencoordinaten u_i durch jene $u_i^{(o)}$ irgend eines Strahls (L_o),

U', U'' und Ψ die trimetrischen Punktcoordinaten x_i durch jene $x_i^{(o)}$ irgend eines Punktes M_o,

so repräsentiert (486), beziehungsweise (487), eine quadratische Gleichung in λ, deren Wurzeln λ' und λ'' diejenigen zwei Elemente

des Kegelschnittsbüschels $U' + \lambda U'' = o$ bestimmen, welche die Gerade (L_o) berühren. In dem speciellen Fall, wo jedoch der Strahl (L_o) durch einen der vier Grundpunkte P_i des Kegelschnittsbüschels geht, fallen aber diese zwei Elemente des Büschels

der Kegelschnittsreihe $\Sigma' + \lambda \Sigma'' = o$ bestimmen, welche durch den Punkt M_o gehen. In dem speciellen Fall, wo aber der Punkt M_o einem der vier Grundstrahlen (T_i) der Kegelschnittsreihe angehört, fallen aber diese zwei Elemente der Reihe

zusammen, was $\lambda' = \lambda''$ bedingt und gleichzeitig erkennen lässt, dass die Coordinaten

u_i eines jeden durch einen Grundpunkt P_i des Büschels gehenden Strahls | x_i eines jeden in einem Grundstrahl (T_i) der Reihe liegenden Punktes

der Bedingung Genüge zu leisten haben

(502) . $\Phi^2 - 4\Sigma'\Sigma'' = o$, | $\Psi^2 - 4A'A''U'U'' = o$, (503)

weshalb auch

(502) die Gleichung der vier Grundpunkte des Kegelschnittsbüschels $U' + \lambda U'' = o$ darstellt. Nun verschwindet aber für die Coordinaten einer jeden der acht Tangenten, welche man in den vier Grundpunkten P_i an die beiden Grundkegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ des Büschels legen kann, eine der beiden ternären Formen Σ', Σ'', und daher wird auch der contravariante Kegelschnitt $\Phi = o$ der beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ von denjenigen acht Tangenten gleichzeitig berührt, die man in den vier Schnittpunkten dieser Curven an letztere legen kann.

(503) die Gleichung der vier Grundstrahlen der Kegelschnittsreihe $\Sigma' + \lambda\Sigma'' = o$ darstellt. Nun verschwindet aber für die Coordinaten eines jeden der acht Punkte, in welchen die beiden Grundkegelschnitte $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ (oder $U' = o$ und $U'' = o$) der Reihe die vier Grundstrahlen (T_o) berühren, eine der beiden Formen U', U'', und daher liegen in dem covarianten Kegelschnitte $\Psi = o$ der beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ gleichzeitig diejenigen acht Punkte, in welchen diese beiden Curven ihre vier gemeinsamen Tangenten berühren.

Nachdem übrigens bei der Transformation der Gleichungen der beiden Grundkegelschnitte des Büschels, respective der Reihe, die Formen Σ', Σ'' und Φ übergehen in $\delta^2 . \Sigma'$, $\delta^2 . \Sigma''$ und $\delta^2 . \Phi$; jene $A'U'$, $A''U''$ und Ψ aber in $\Delta^2 . A'U'$, $\Delta^2 . A''U''$ und $\Delta^2 . \Psi$, wobei δ und Δ die in § 86 angegebene Bedeutung haben, so ist daher auch $\Phi^2 - 4\Sigma'\Sigma''$ eine simultane Contravariante und $\Psi^2 - 4A'A''U'U''$ eine simultane Covariante der beiden ternären quadratischen Formen U' und U''.

Satz. Das gemeinsame Polardreieck der beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ ist gleichzeitig ein Polardreieck des contravarianten Kegelschnittes $\Phi = o$, sowie des covarianten Kegelschnittes $\Psi = o$.

Beweis. Bezieht man nämlich die Gleichungen der Kegelschnitte (U') und (U'') auf ihr gemeinsames Polardreieck, so nehmen diese die einfachen Formen an

$$U' \equiv a_{1,1}'x_1^2 + a_{2,2}'x_2^2 + a_{3,3}'x_3^2 = o$$
$$U'' \equiv a_{1,1}''x_1^2 + a_{2,2}''x_2^2 + a_{3,3}''x_3^2 = o,$$

und aus diesem Grunde lauten auch, da ja diesmal $A_{1,1}' = a_{2,2}'a_{3,3}'$, $A_{2,2}' = a_{1,1}'a_{3,3}' \ldots . \; A_{1,1}'' = a_{2,2}''a_{3,3}'' \ldots .$ $A_{1,2}' = A_{1,2}'' = o \ldots .$ werden, nach (489) und (490) in § 88 die Gleichungen der vorhin erwähnten Kegelschnitte (Φ) und (Ψ):

$$(504) \quad \Phi \equiv (a_{2,2}'a_{3,3}'' + a_{2,2}''a_{3,3}')\,u_1^2 + (a_{1,1}'a_{3,3}'' + a_{1,1}''a_{3,3}')\,u_2^2 + (a_{1,1}'a_{2,2}'' + a_{1,1}''a_{2,2}')\,u_3^2 = o,$$

$$(505) \quad \Psi \equiv a_{1,1}'a_{1,1}''(a_{2,2}'a_{3,3}'' + a_{2,2}''a_{3,3}')\,x_1^2 + a_{2,2}'a_{2,2}''(a_{1,1}'a_{3,3}'' + a_{1,1}''a_{3,3}')\,x_2^2 + a_{3,3}'a_{3,3}''(a_{1,1}'a_{2,2}'' + a_{1,1}''a_{2,2}')\,x_3^2 = o,$$

aus deren Formen man sogleich erkennt, dass das gemeinsame Polardreieck von (U') und (U'') auch gleichzeitig ein Polardreieck in Bezug auf die Kegelschnitte (Φ) und (Ψ) ist.

Satz. Jede Tangente des contravarianten Kegelschnittes $\Phi = o$ durchschneidet die beiden Kegelschnitte $U' = o$ und $U'' = o$ in zwei harmonischen Punktpaaren.

Satz. Aus jedem Punkte des covarianten Kegelschnittes $\Psi = o$ lassen sich vier Tangenten an die beiden Kegelschnitte $\Sigma' = o$ und $\Sigma'' = o$ (oder $U' = o$ und $U'' = o$) ziehen, und diese sind harmonisch.

Beweis. Wir beziehen bei der Begründung dieser Sätze die Gleichungen der beiden Kegelschnitte (U') und (U'') auf ihr gemeinsames Polardreieck, was vermöge der contravarianten Eigenschaft von Φ und der covarianten Eigenschaft von Ψ gestattet ist, und beschäftigen uns daher mit der Aufsuchung der Bedingung, welcher die Coordinaten

u_i einer Geraden $L \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o$	x_i eines Punktes $M \equiv x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = o$

unterworfen erscheinen, wenn die beiden

Punktpaare, in welchen dieselbe die Kegelschnitte $U' \equiv a_{1,1}'x_1^2 + a_{2,2}'x_2^2 + a_{3,3}'x_3^2 = o$, $U'' \equiv a_{1,1}''x_1^2 + a_{2,2}''x_2^2 + a_{3,3}''x_3^2 = o$ durchschneidet, harmonisch sein sollen. Eliminiert man zu diesem Zwecke x_3 aus der ersten und zweiten, sowie aus der zweiten und dritten, dieser Gleichungen,	Tangentenpaare, welche man aus demselben an die Kegelschnitte $\Sigma' \equiv A_{1,1}'u_1^2 + A_{2,2}'u_2^2 + A_{3,3}'u_3^2 = o$, $\Sigma'' \equiv A_{1,1}''u_1^2 + A_{2,2}''u_2^2 + A_{3,3}''u_3^2 = o$ ziehen kann, harmonisch sein sollen. Eliminiert man aus diesem Grunde u_3 aus der ersten und zweiten, sowie aus der zweiten und dritten, dieser Gleichungen,

so erhält man die beiden neuen Gleichungen

$$(a)\quad \begin{cases} (a_{1,1}'u_3^2 + a_{3,3}'u_1^2)x_1^2 + 2\,a_{3,3}'\,u_1\,u_2\,x_1\,x_2 + (a_{2,2}'\,u_3^2 + a_{3,3}'\,u_2^2)\,x_2^2 = o, \\ (a_{1,1}''u_3^2 + a_{3,3}''u_1^2)x_1^2 + 2\,a_{3,3}''\,u_1\,u_2\,x_1\,x_2 + (a_{2,2}''\,u_3^2 + a_{3,3}''\,u_2^2)\,x_2^2 = o, \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} (A_{1,1}'\,x_3^2 + A_{3,3}'\,x_1^2)\,u_1^2 + 2\,A_{3,3}'x_1x_2u_1u_2 + (A_{2,2}'\,x_3^2 + A_{3,3}'\,x_2^2)\,u_2^2 = o, \\ (A_{1,1}''x_3^2 + A_{3,3}''x_1^2)u_1^2 + 2\,A_{3,3}''x_1\,x_2\,u_1\,u_2 + (A_{2,2}''\,x_3^2 + A_{3,3}''\,x_2^2)\,u_2^2 = o, \end{cases}$$

von welchen die erste dasjenige

Geradenpaar bestimmt, welches den Punkt M_3 des Coordinatendreiecks mit jenen Punkten verbindet, in welchen der Kegelschnitt $U' = o$ die Gerade $L = o$ durchschneidet,	Punktpaar angibt, in welchem die Seite (x_3) des Coordinatendreiecks von dem aus dem Punkte $M = o$ an $\Sigma' = o$ gelegten Tangentenpaar geschnitten wird,

während die zweite dem

Geradenpaar angehört, welches M_3 mit den Punkten verbindet, wo $U'' = o$ von $L = o$	Punktpaar angehört, wo (x_3) von dem aus $M = o$ an $\Sigma'' = o$ gezogenen Tangentenpaare

geschnitten wird. Damit aber die vorhin erwähnten Punktpaare harmonisch sind, müssen jedoch nach dem Satze von Pappus auch (*a*) die Gleichungen von zwei harmonischen Geradenpaaren	getroffen wird. Damit aber die vorhin erwähnten Tangentenpaare harmonisch sind, müssen nach dem Satze von Pappus auch (*b*) die Gleichungen von zwei harmonischen Punktpaaren

darstellen, was nach Gl. (297) in § 45 nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten von

x_1^2, $x_1 x_2$ und x_2^2 in den Gleichungen (*a*)	u_1^2, $u_1 u_2$ und u_2^2 in den Gleichungen (*b*)

der Bedingung genügen:

$(a_{1,1}' u_3^2 + a_{3,3}' u_1^2)(a_{2,2}'' u_3^2 + a_{3,3}'' u_2^2) + (a_{1,1}'' u_3^2 + a_{3,3}'' u_1^2)(a_{2,2}' u_3^2 + a_{3,3}' u_2^2) - 2 a_{3,3}' a_{3,3}'' u_1^2 u_2^2 = o,$	$(A_{1,1}' x_3^2 + A_{3,3}' x_1^2)(A_{2,2}'' x_3^2 + A_{3,3}'' x_2^2) + (A_{2,2}' x_3^2 + A'_{3,3} x_2^2)(A_{1,1}'' x_3^2 + A_{3,3}'' x_1^2) - 2 A_{3,3}' A_{3,3}'' x_1^2 x_2^2 = o,$

oder

$(a_{2,2}' a_{3,3}'' + a_{2,2}'' a_{3,3}') u_1^2 + (a_{3,3}' a_{1,1}'' + a_{3,3}'' a_{1,1}') u_2^2 + (a_{1,1}' a_{2,2}'' + a_{1,1}'' a_{2,2}') u_3^2 = o,$	$(A_{2,2}' A_{3,3}'' + A_{2,2}'' A_{3,3}') x_1^2 + (A_{3,3}' A_{1,1}'' + A_{3,3}'' A_{1,1}') x_2^2 + (A_{1,1}' A_{2,2}'' + A_{1,1}'' A_{2,2}') x_3^2 = o,$

womit der Beweis, wie ein Blick auf die Gleichungen (504), respective (505) zeigt, erbracht erscheint.

Zum Schlusse beschäftigen wir uns noch mit der Aufsuchung der Gleichung des

contravarianten Kegelschnittes (Φ)	covarianten Kegelschnittes (Ψ)

der beiden Kegelschnitte (U') und (U'') in

trimetrischen Punktcoordinaten.	in trigonalen Liniencoordinaten.

Nimmt man auch hier wieder an, dass die Gleichungen der Kegelschnitte (U') und (U'') auf ihr gemeinsames Polardreieck sich beziehen, so lauten die Gleichungen von (U') und (U'') in

trimetrischen Punktcoordinaten:	in trigonalen Liniencoordinaten:

$$U' \equiv a_{1,1}' x_1^2 + a_{2,2}' x_2^2 + a_{3,3}' x_3^2 = 0,$$
$$U'' \equiv a_{1,1}'' x_1^2 + a_{2,2}'' x_2^2 + a_{3,3}'' x_3^2 = 0,$$

$$\Sigma' \equiv a_{2,2}' a_{3,3}' u_1^2 + a_{3,3}' a_{1,1}' u_2^2 + a_{1,1}' a_{2,2}' u_3^2 = 0,$$
$$\Sigma'' \equiv a_{2,2}'' a_{3,3}'' u_1^2 + a_{3,3}'' a_{1,1}'' u_2^2 + a_{1,1}'' a_{2,2}'' u_3^2 = 0,$$

während

(504) die Gleichung von (Φ) in trigonalen Liniencoordinaten

(505) die Gleichung von (Ψ) in trimetrischen Punktcoordinaten

repräsentiert. Es ist daher auch

$$(a_{3,3}' a_{1,1}'' + a_{1,1}' a_{3,3}'')(a_{1,1}' a_{2,2}'' + a_{1,1}'' a_{2,2}') x_1^2 + (a_{2,2}' a_{3,3}'' + a_{2,2}'' a_{3,3}')(a_{1,1}' a_{2,2}'' + a_{1,1}'' a_{2,2}') x_2^2 + (a_{2,2}' a_{3,3}'' + a_{2,2}'' a_{3,3}')(a_{3,3}' a_{1,1}'' + a_{3,3}'' a_{1,1}') x_3^2 = 0 \quad (c)$$

$$a_{2,2}' a_{3,3}' a_{2,2}'' a_{3,3}'' (a_{1,1}' a_{3,3}'' + a_{1,1}'' a_{3,3}')(a_{1,1}' a_{2,2}'' + a_{1,1}'' a_{2,2}') u_1^2 + a_{1,1}' a_{3,3}' a_{1,1}'' a_{3,3}'' (a_{2,2}' a_{3,3}'' + a_{2,2}'' a_{3,3}')(a_{1,1}' a_{2,2}'' + a_{1,1}'' a_{2,2}') u_2^2 + a_{1,1}' a_{2,2}' a_{1,1}'' a_{2,2}'' (a_{2,2}' a_{3,3}'' + a_{2,2}'' a_{3,3}')(a_{1,1}' a_{3,3}'' + a_{1,1}'' a_{3,3}') u_3^2 = 0 \quad (d)$$

die Gleichung des Kegelschnittes

(Φ), dieser als Ortscurve angesehen, d. h. entstanden gedacht durch die Bewegung eines Punktes.

(Ψ), dieser als Classencurve betrachtet, d. h. entstanden gedacht durch die Bewegung einer Geraden.

Nun sind aber in dem vorliegenden Fall die simultanen Invarianten:

$$3A_{112} = a_{1,1}'' a_{2,2}' a_{3,3}' + a_{2,2}'' a_{1,1}' a_{3,3}' + a_{3,3}'' a_{1,1}' a_{2,2}',$$
$$3A_{122} = a_{1,1}' a_{2,2}'' a_{3,3}'' + a_{2,2}' a_{1,1}'' a_{3,3}'' + a_{3,3}' a_{1,1}'' a_{2,2}'',$$

$$3E_{112} = A' A_{122} = a_{1,1}' a_{2,2}' a_{3,3}' (a_{1,1}' a_{2,2}'' a_{3,3}'' + a_{2,2}' a_{1,1}'' a_{3,3}'' + a_{3,3}' a_{1,1}'' a_{2,2}'')$$
$$3E_{122} = A'' A_{112} = a_{1,1}'' a_{2,2}'' a_{3,3}'' (a_{1,1}'' a_{2,2}' a_{3,3}' + a_{2,2}'' a_{1,1}' a_{3,3}' + a_{3,3}'' a_{1,1}' a_{2,2}'),$$

und daher können, wie man durch eine einfache Rechnung sich überzeugen kann, die obigen Gleichungen (c), respective (d), auch ersetzt werden durch:

(506) $3 A_{122} U' + 3 A_{112} U'' - \Psi = o.$	$3 E_{112} \Sigma'' + 3 E_{122} \Sigma' - A' A'' \Phi = o.$ (507)

Es ist somit

(506) die gesuchte Gleichung des contravarianten Kegelschnittes (Φ) in trimetrischen Punktcoordinaten,	(507) die gesuchte Gleichung des covarianten Kegelschnittes (Ψ) in trimetrischen Liniencoordinaten,

und die Form dieser Gleichungen lehrt, dass der

contravariante Kegelschnitt (Φ) als Ortscurve covariant	covariante Kegelschnitt (Ψ) als Tangentengebilde contravariant

ist, wenn noch vorausgesetzt wird, dass keine der beiden Curven $U' = o$ und $U'' = o$ degeneriert.

Leicht lässt sich nun auch die Frage beantworten, wann $\Phi = o$ ein Punktpaar und $\Psi = o$ ein Geradenpaar darstellt. Nachdem nämlich die Discriminante von $\Phi = o$, wie ein Blick auf (504) zeigt, gleich erscheint dem Producte

$$(a_{2,2}' a_{3,3}'' + a_{2,2}'' a_{3,3}') (a_{1,1}' a_{3,3}'' + a_{1,1}'' a_{3,3}') (a_{1,1}' a_{2,2}'' + a_{1,1}'' a_{2,2}')$$

und letzteres wieder ausgedrückt wird durch die simultane Invariante

$$3 A_{112}\, 3 A_{122} - A' A'',$$

wie man sich überzeugt, sobald man in derselben $3 A_{112} \ldots$. durch die unmittelbar zuvor angegebenen Werte ersetzt, ferner nach Gl. (505) die Discriminante von $\Psi = o$ nur um das Product $a_{1,1}' a_{2,2}' a_{3,3}' a_{1,1}'' a_{2,2}'' a_{3,3}'' = A' A''$ von der Discriminante des Kegelschnittes $\Phi = o$ sich unterscheidet so folgt, dass der Kegelschnitt

$\Phi = o$ ein Punktpaar	$\Psi = o$ ein Geradenpaar

repräsentiert, wenn die simultane Invariante

(508).. $3 A_{112} \cdot 3 A_{122} - A' A'' = o$	$A' A'' (3 A_{112} \cdot 3 A_{122} - A' A'') = o$ (509)

ist.

§ 94. Ort der Mittelpunkte der Elemente eines Kegelschnittsbüschels und einer Kegelschnittsreihe. — Satz von Desarque.

Um den geometrischen Ort der Centra sämmtlicher Elemente eines Büschels, respective einer Reihe von Kegelschnitten zu finden, bestimme man vorerst den geometrischen Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf diese Kegelschnitte, indem ja der Mittelpunkt eines Kegelschnittes als der Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich dieser Curve aufzufassen ist. Nun lautet nach dem bereits Vorgeführten die Gleichung der Polaren eines Punktes y von den Coordinaten y_i bezüglich des Elementes $U \equiv U' + \lambda U'' = o$ des Büschels:

$$[(a_{1,1}' y_1 + a_{1,2}' y_2 + a_{1,3}' y_3) + \lambda (a_{1,1}'' y_1 + a_{1,2}'' y_2 + a_{1,3}'' y_3)] x_1 + [(a_{1,2}' y_1 + a_{2,2}' y_2 + a_{2,3}' y_3) + \lambda (a_{1,2}'' y_1 + a_{2,2}'' y_2 + a_{2,3}'' y_3)] x_2 + [(a_{1,3}' y_1 + a_{2,3}' y_2 + a_{3,3}' y_3) + \lambda (a_{1,3}'' y_1 + a_{2,3}'' y_2 + a_{3,3}'' y_3)] x_3 = o.$$

Soll jedoch diese Polare mit der Geraden

$$L \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$$

identisch sein, so können die Polynome der beiden hier vorliegenden Gleichungen nur durch einen Factor sich unterscheiden, d. h. es muss dann stets ein Factor ϱ existieren, für welchen die drei Identitäten bestehen:

$$(a_{1,1}' y_1 + a_{1,2}' y_2 + a_{1,3}' y_3) + \lambda . (a_{1,1}'' y_1 + a_{1,2}'' y_2 + a_{1,3}'' y_3) = \varrho . a_1$$

$$(a_{1,2}' y_1 + a_{2,2}' y_2 + a_{2,3}' y_3) + \lambda (a_{1,2}'' y_1 + a_{2,2}'' y_2 + a_{2,3}'' y_3) = \varrho a_2$$

$$(a_{1,3}' y_1 + a_{2,3}' y_2 + a_{3,3}' y_3) + \lambda (a_{1,3}'' y_1 + a_{2,3}'' y_2 + a_{3,3}'' y_3) = \varrho a_3,$$

aus welchen durch die Elimination von λ und ϱ der geometrische Ort der Pole der Geraden $L = o$ in Bezug auf sämmtliche Elemente unseres Büschels sich ergibt. Der fragliche Ort ist demnach ein Kegelschnitt, bestimmt durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (a_{1,1}' x_1 + a_{1,2}' x_2 + a_{1,3}' x_3) & (a_{1,1}'' x_1 + a_{1,2}'' x_2 + a_{1,3}'' x_3) & a_1 \\ (a_{1,2}' x_1 + a_{2,2}' x_2 + a_{2,3}' x_3) & (a_{1,2}'' x_1 + a_{2,2}'' x_2 + a_{2,3}'' x_3) & a_2 \\ (a_{1,3}' x_1 + a_{2,3}' x_2 + a_{3,3}' x_3) & (a_{1,3}'' x_1 + a_{2,3}'' x_2 + a_{3,3}'' x_3) & a_3 \end{vmatrix} = o,$$

und daher ist auch der geometrische Ort der Centra der Elemente eines Kegelschnittsbüschels abermals ein Kegelschnitt.

Ebenso leicht lässt sich aber auch der geometrische Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf sämmtliche Elemente einer Kegelschnittsreihe ermitteln. Sind nämlich die Punkte M', M'' und M die Pole der Geraden $L \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = o$ in Bezug auf die drei Kegelschnitte $\Sigma' = o$, $\Sigma'' = o$ und $\Sigma \equiv \Sigma' + \lambda \Sigma'' = o$, so lauten die Gleichungen obiger Punkte beziehungsweise:

$$M' \equiv (A_{1,1}' v_1 + A_{1,2}' v_2 + A_{1,3}' v_3) u_1 + (A_{1,2}' v_1 + A_{2,2}' v_2 + A_{2,3}' v_3) u_2 + (A_{1,3}' v_1 + A_{2,3}' v_2 + A_{3,3}' v_3) u_3 = o,$$

$$M'' \equiv (A_{1,1}'' v_1 + A_{1,2}'' v_2 + A_{1,3}'' v_3) u_1 + (A_{1,2}'' v_1 + A_{2,2}'' v_2 + A_{2,3}'' v_3) u_2 + (A_{1,3}'' v_1 + A_{2,3}'' v_2 + A_{3,3}'' v_3) u_3 = o$$

und

$$M \equiv [(A_{1,1}' + \lambda A_{1,1}'') v_1 + (A_{1,2}' + \lambda A_{1,2}'') v_2 + (A_{1,3}' + \lambda A_{1,3}'') v_3] u_1 + [(A_{1,2}' + \lambda A''_{1,2}) v_1 + (A_{2,2}' + \lambda A_{2,2}'') v_2 + (A_{2,3}' + \lambda A_{2,3}'') v_3] u_2 + [(A_{1,3}' + \lambda A_{1,3}'') v_1 + (A_{2,3}' + \lambda A_{2,3}'') v_2 + (A_{3,3}' + \lambda A_{3,3}'') v_3] u_3 = o.$$

Die letzte Gleichung kann aber, wie man leicht erkennt, ersetzt werden durch die folgende

$$M \equiv M' + \lambda M'' = o$$

und sagt in dieser Gestalt aus, sobald noch λ als ein veränderlicher Parameter angesehen wird, dass der geometrische Ort der Pole von $L = o$ bezüglich sämmtlicher Elemente der Kegelschnittsreihe eine Punktreihe ist, bestimmt durch obige Gleichung. Damit erscheint aber auch gleichzeitig constatiert, dass die Centra der Kegelschnitte einer Kegelschnittsreihe in einer Geraden liegen. Man gelangt sonach zu den beiden **Sätzen:**

Der geometrische Ort der Centra sämmtlicher Elemente eines Kegelschnittsbüschels ist ein Kegelschnitt.

Der geometrische Ort der Centra sämmtlicher Elemente einer Kegelschnittsreihe ist eine Gerade.

Es erscheint hier noch am Platze, die **Sätze von Desarque** über den Kegelschnittsbüschel und die Kegelschnittsreihe vorzuführen. Dieselben lauten nämlich:

Bringt man die Elemente eines Kegelschnittsbüschels zum Schnitte mit einer Geraden (L), so erhält man eine quadratische Punktinvolution.

Beweis. Man wähle das Coordinatendreieck der Art, dass eine Seite desselben, z. B. jene (x_3), mit der Geraden (L) zusammenfällt. Dann unterliegen die Coordinaten der Schnittpunkte der Elemente des Kegelschnittsbüschels mit (x_3) den beiden Relationen:

$$x_3 = o,$$
$$(a_{1,1}' + \lambda\, a_{1,1}'')\, x_1^{\,2} + 2(a_{1,2}' + \lambda\, a_{1,2}'')\, x_1\, x_2 + (a_{2,2}' + \lambda . a_{2,2}'')\, x_2^{\,2} = o,$$

welche nach § 46 eine quadratische Punktinvolution darstellen. Dass diejenigen Punkte, in welchen die Gerade (x_3) von zwei Elementen des Kegelschnittsbüschels berührt wird, die beiden tautologen Elemente der Punktinvolution darstellen, ist an sich klar.

Dieser Satz kann aber auch synthetisch bewiesen werden. Es seien zu diesem Zwecke wieder $P_1 \ldots . P_4$ die vier Grundpunkte des Kegelschnittsbüschels, während M irgend einen Punkt der Ge-

Zieht man aus einem Punkte M Tangenten an die Elemente einer Kegelschnittsreihe, so erhält man eine quadratische Strahleninvolution.

Beweis. Man wähle das Coordinatendreieck der Art, dass eine Ecke desselben, z. B. jene M_3, mit dem Punkte M zusammenfällt. Dann unterliegen die Coordinaten der Tangenten, gezogen aus M_3 an sämmtliche Elemente der Kegelschnittsreihe, den beiden Relationen:

$$u_3 = o,$$
$$(A_{1,1}' + \lambda\, A_{1,1}'')\, u_1^{\,2} + 2(A_{1,2}' + \lambda\, A_{1,2}'')\, u_1\, u_2 + (A_{2,2}' + \lambda\, A_{2,2}'')\, u_2^{\,2} = . o,$$

welche nach § 46 eine quadratische Strahleninvolution repräsentieren. Dass diejenigen Tangenten, welche man in M_3 an die beiden durch M_3 gehenden Elemente der Kegelschnittsreihe legen kann, die beiden tautologen Elemente der Strahleninvolution repräsentieren, ist an sich klar.

Auch dieser Satz kann leicht synthetisch nachgewiesen werden. Es seien zu diesem Zwecke wieder $(T_1) \ldots (T_4)$ die vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittsreihe, während (L) irgend einen

raden (L) darstellen möge. Die fünf Punkte $P_1 \ldots . P_4$ und M bestimmen aber einen Kegelschnitt eindeutig und letzterer als eine Curve 2. Ordnung durchschneidet die (L) noch in einem zweiten Punkte M'. Nachdem aber durch jeden Punkt M von (L) nur ein Element des Kegelschnittsbüschels gelegt werden kann, entspricht auch jedem solchen Punkte nur ein Punkt M' auf (L), und weil M und M' noch überdies vertauschungsfähig sind, repräsentieren sie ein Paar entsprechender Elemente einer quadratischen Punktinvolution.

durch den Punkt M gezogenen Strahl darstellen möge. Die fünf Strahlen $(T_1) \ldots . (T_4)$ und (L) bestimmen aber einen Kegelschnitt eindeutig und aus M lassen sich zwei Tangenten an letzteren legen, von welchen die eine der Strahl (L) ist, während die andere (L') heißen soll. Nachdem aber nur ein Element der Kegelschnittsreihe existiert, welches einen durch M gelegten Strahl (L) berührt, entspricht auch jedem solchen Strahl nur ein durch M gehender Strahl (L'), und weil noch überdies (L) und (L') vertauschungsfähig sind, repräsentieren sie ein Paar entsprechender Elemente einer quadratischen Strahleninvolution.

§ 95. Bestimmung der Brennpunkte eines Kegelschnittes $U = o$ und Gleichung aller zu dem Kegelschnitte $U = o$ confocalen Kegelschnitte.

Nach dem in diesem Capitel bereits Vorgeführten ist, sobald λ einen veränderlichen Parameter und das Symbol Σ das Polynom $A_{1,1}\, u^2 + 2 A_{1,2}\, u\, v + \ldots . + A_{3,3}$ bedeutet,

$$(510) \quad \ldots \quad \Sigma - \lambda . (u^2 + v^2) = o$$

die Gleichung einer Kegelschnittsreihe, deren Elemente insgesammt berührt werden von den vier Tangenten, welche man aus den beiden durch die Gleichung $u^2 + v^2 = o$ bestimmten Punkten, d. h. [Siehe § 40, Gl. (263)], aus den beiden imaginären Kreispunkten der Ebene des Kegelschnittes $U \equiv a_{1,1}\; x^2 + 2\; a_{1,2}\; x\; y + \ldots \ldots + a_{3,3} = o$ an letzteren legen kann. Das Punktpaar $u^2 + v^2 = o$ vertritt somit hier die Stelle des zweiten Grund-

kegelschnittes der Kegelschnittsreihe. Diese vier Tangenten, welche gleichzeitig die Nullstrahlen oder Grundstrahlen der durch Gl. (510) bestimmten Kegelschnittsreihe repräsentieren, sind selbstverständlich imaginär und durchschneiden sich in drei Punktpaaren, von welchen das eine von den beiden imaginären Kreispunkten gebildet wird, folglich imaginär erscheint, während von den beiden noch übrigen Paaren das eine ebenfalls imaginär, das andere jedoch, sobald $U = o$ eine reelle Curve darstellt, reell ist. Es ist klar, dass die vorliegenden drei Paare gleichzeitig die drei degenerierten Elemente der durch Gl. (510) bestimmten Kegelschnittsreihe angeben. Plücker nennt nun diejenigen Punkte, in welchen die aus den beiden imaginären Kreispunkten der Ebene einer ebenen Curve an diese gelegten Tangenten sich durchschneiden, die Brennpunkte der Curve, weshalb auch ein Kegelschnitt, als eine Curve 2. Classe, vier Brennpunkte besitzt, von welchen in Anbetracht des in § 11 bewiesenen Satzes, dass nämlich in einer imaginären Geraden nur ein reeller Punkt existiert, nur zwei reell erscheinen. Wir werden in Hinkunft sehen, dass die beiden reellen Brennpunkte identisch sind mit jenen Punkten, die wir in § 75 mit diesem Namen bezeichneten. Es wurde aber auch früher erwähnt, dass jeder durch Gl. (510) bestimmte Kegelschnitt von den vier Tangenten berührt wird, die man aus dem Punktpaar $u^2 + v^2 = o$ an den Kegelschnitt $U = o$ legen kann, und daher besitzen auch sämmtliche Elemente der Kegelschnittsreihe (510) dieselben Brennpunkte oder ist (510) die Gleichung eines Systems confocaler Kegelschnitte. Nun bilden aber das reelle und das imaginäre Paar der Brennpunkte des Kegelschnittes $U = o$, sowie die beiden imaginären Kreispunkte, die drei degenerierten Elemente der Kegelschnittsreihe (510), und weil die Gleichung $u^2 + v^2 = o$ aus (510) hervorgeht, wenn man in der letzteren $\lambda = \infty$ setzt, so sind nach § 57

$$(511)\ldots \quad \Sigma - \lambda_1 (u^2 + v^2) = o, \quad \Sigma - \lambda_2 (u^2 + v^2) = o$$

die Gleichungen der beiden Paare von Brennpunkten des Kegelschnittes $U = o$, sowie aller Elemente der Kegelschnittsreihe (510), sobald $\Sigma = A_{1,1} u^2 + 2 A_{1,2} u v + \ldots + A_{3,3}$

ist und λ_1, λ_2 die beiden Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} (A_{1,1}-\lambda) & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{1,2} & (A_{2,2}-\lambda) & A_{2,3} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{vmatrix} = o$$

bedeuten. Die in der letzten Gleichung erscheinende Discriminante ist aber auch gleich

$$A_{3,3}\,.\,\lambda^2 - \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} \\ A_{1,3} & A_{3,3} \end{vmatrix} . \lambda - \begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{2,3} & A_{3,3} \end{vmatrix} \lambda + E,$$

wenn noch die aus den Coefficienten $A_{i,k}$ gebildete symmetrische und 3^2 elementige Determinante, d. h. die reciproke Determinante von A, mit E bezeichnet wird, und weil nach der Determinantentheorie

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} \\ A_{1,3} & A_{3,3} \end{vmatrix} = E_{2,2} = A\,.\,a_{2,2},$$

$$\begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{2,3} & A_{3,3} \end{vmatrix} = E_{1,1} = A\,.\,a_{1,1}$$

ist, so ergeben sich λ_1 und λ_2 als die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(512)\quad (a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}^{\;2})\,\lambda^2 - A\,.(a_{1,1} + a_{2,2})\,\lambda + A^2 = o.$$

Bei der Parabel ist aber das Binom $a_{1,1}\ a_{2,2} - a_{1,2}^{\;2} = o$ und geht dadurch (512) über in die lineare Gleichung $(a_{1,1} + a_{2,2})\,\lambda - A = o$, aus welcher sofort folgt

$$(513)\ \ .\ .\ .\qquad \lambda_1 = \frac{A}{a_{1,1} + a_{2,2}},$$

während die andere Wurzel unendlich groß wird; bei der gleichseitigen Hyperbel ist dagegen $a_{1,1} + a_{2,2} = o$, mithin nach (512)

$$(514)\ \ .\ .\ .\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A}{\sqrt{a_{1,2}^{\;2} - a_{1,1}\,a_{2,2}}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{A}{\sqrt{a_{1,2}^{\;2} - a_{1,1}\,a_{2,2}}}. \end{aligned}$$

Schließlich mag noch der Fall untersucht werden, wo nämlich die Gleichung (512) zwei gleiche Wurzeln besitzt. Dieser Fall tritt nämlich dann ein, wenn $A^2.(a_{1,1} + a_{2,2})^2 -$

$4A^2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}{}^2) = o$, oder $(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}{}^2 = o$ wird, was aber wieder

$$a_{1,1} = a_{2,2} \quad \text{und} \quad a_{1,2} = o$$

bedingt. Genügen aber die Coefficienten $a_{i,k}$ der Gleichung $U = o$ obigen Bedingungen, so ist $U = o$ ein Kreis; es sind somit die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung (512) einander gleich, sobald das geometrische Äquivalent der Gleichung $U = o$ ein Kreis ist.

1. Beispiel. Es sind die Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel zu bestimmen. In diesem speciellen Fall ist $U = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1$, demnach $a_{1,1} = \frac{1}{a^2}$, $a_{2,2} = \pm\frac{1}{b^2}$ und $a_{3,3} = -1$, während die übrigen Coefficienten $a_{i,k}$ verschwinden; folglich wird die Discriminante $A = \mp \frac{1}{a^2 b^2}$ und nimmt dadurch die quadratische Gleichung (512) die Gestalt an:

$$a^2 b^2 . \lambda^2 + (b^2 \pm a^2)\lambda \pm 1 = o.$$

Nachdem aber das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt, so ist bei der Ellipse

$$\lambda_1 = -\frac{1}{b^2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{a^2},$$

dagegen bei der Hyperbel

$$\lambda_1 = \frac{1}{b^2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{a^2}$$

und lauten folglich die Gleichungen der beiden Paare von Brennpunkten in dem ersten Fall:

$$(a^2 - b^2)v^2 + 1 = o, \qquad (a^2 - b^2)u^2 - 1 = o,$$

in dem zweiten aber

$$(a^2 + b^2)v^2 + 1 = o, \qquad (a^2 + b^2)u^2 - 1 = o.$$

Setzt man daher bei der Ellipse $a^2 - b^2 = e^2$, bei der Hyperbel hingegen $a^2 + b^2 = e^2$ und bezeichnet mit x_i, y_i — $i = 1, 2, 3, 4$ — die Coordinaten der Brennpunkte, so wird zufolge der eben gefundenen Gleichungen für beide Curven

$$x_1 = e,\ y_1 = o; \qquad x_2 = -e,\ y_2 = o;$$
$$x_3 = o,\ y_3 = i\,e; \quad x_4 = o,\ y_4 = -i\,e,$$

wobei jedoch noch darauf Bedacht zu nehmen ist, dass hier $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ oder $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ zu setzen ist, je nachdem die Curve eine Ellipse oder Hyperbel repräsentiert, und $i = \sqrt{-1}$ ist. Es fallen mithin in der That die reellen Brennpunkte mit jenen Punkten zusammen, die wir in § 75 als Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel bezeichneten. Wird bei derEllipse $a = b$, d. h. geht letztere in einen Kreis über, so ist $e = o$, demnach $x_i = y_i = o$, d. h. dann fallen die Brennpunkte insgesammt mit dem Centrum der Curve zusammen.

2. Beispiel. Man bestimme die Brennpunkte der Parabel $\frac{y^2}{p} - x = o$. In dem hier in Betracht kommenden Fall ist $U = \frac{y^2}{p} - x$, demnach $a_{2,2} = \frac{1}{p}$, $a_{1,3} = -\frac{1}{2}$, $A = -\frac{1}{4p}$ und nach Gl. (513)

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4}.$$

Durch Substitution dieses Wertes von λ_1 in die erste der Gleichungen (511) erhält man nun, weil ja $\Sigma = -\frac{v^2}{4} + \frac{u}{p}$ ist, zur Bestimmung der reellen Brennpunkte vorliegender Curve die Gleichung

$$\frac{u^2}{4} + \frac{u}{p} = o,$$

welche in die beiden linearen Gleichungen zerfällt

$$u + \frac{4}{p} = o, \qquad u = o.$$

Die Coordinaten der beiden reellen Brennpunkte der Parabel $\frac{y^2}{p} - x = o$ sind daher:

$$x_1 = \frac{p}{4},\ y_1 = o; \qquad x_2 = \infty,\ y_2 = \frac{o}{o},$$

und hat somit die Parabel eigentlich nur einen reellen Brennpunkt, indem der zweite dieser Punkte in unendlicher

Ferne liegt, d. h. er ist der unendlich ferne Punkt der Parabelachse. Man erkennt daher auch hier wieder die volle Übereinstimmung mit dem in § 75 Gesagten.

Zu Beginn dieses Paragraphen wurde bemerkt, dass die Gleichung (510), sobald darin λ als veränderlich erscheint, alle Kegelschnitte bestimmt, welche zu dem Kegelschnitte $U = o$ confocal sind; es ist folglich (510), oder

$$(A_{1,1} - \lambda)\, u^2 + 2\, A_{1,2}\, u\, v + (A_{2,2} - \lambda)\, v^2 + \\ 2\, A_{1,3}\, u + 2\, A_{2,3}\, v + A_{3,3} = o$$

die Gleichung aller zu dem Kegelschnitte $U \equiv a_{1,1}\, x^2 + 2\, a_{1,2}\, x\, y + \ldots . + a_{3,3} = o$ confocalen Kegelschnitte in Plücker'schen Liniencoordinaten. Von selbst tritt nun die Frage heran, wie lautet die Gleichung dieser confocalen Kegelschnitte in Cartesischen Punktcoordinaten? Die Beantwortung dieser Frage ist aber sehr leicht; denn setzt man wieder

$$E(\lambda) = \begin{vmatrix} (A_{1,1} - \lambda) & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{1,2} & (A_{2,2} - \lambda) & A_{2,3} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{vmatrix}$$

so ist nach Gleichung (368) in § 59, wenn noch $E_{i,k}(\lambda)$ aus $E(\lambda)$ in derselben Weise hervorgeht, wie $A_{i,k}$ aus A,

$$E_{1,1}(\lambda)\, x^2 + 2\, E_{1,2}(\lambda)\, x\, y + E_{2,2}(\lambda)\, y^2 + 2\, E_{1,3}(\lambda)\, x + \\ 2\, E_{2,3}(\lambda)\, y + E_{3,3}(\lambda) = o$$

die gesuchte Gleichung, und letztere lässt sich noch zweckdienlich umformen, sobald man in derselben für die Symbole $E_{i,k}(\lambda)$ ihre Werte substituiert. Nach einem bekannten Satze über die reciproken Determinanten ist nämlich:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(\lambda) &= A \,.\, a_{1,1} - \lambda\, A_{3,3}\,, \quad & E_{1,2}(\lambda) &= A \,.\, a_{1,2}\,, \\ E_{2,2}(\lambda) &= A \,.\, a_{2,2} - \lambda\, A_{3,3}\,, & E_{1,3}(\lambda) &= A \,.\, a_{1,3} + \lambda\, A_{1,3}\,, \\ E_{2,3}(\lambda) &= A \,.\, a_{2,3} + A_{2,3}\, \lambda, \\ E_{3,3}(\lambda) &= A \,.\, a_{3,3} - (A_{1,1} + A_{2,2})\, \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

und daher

$$(515) \ldots \quad A \,.\, U - [A_{3,3}\,(x^2 + y^2) - 2\, A_{1,3}\, x - 2\, A_{2,3}\, y \\ + (A_{1,1} + A_{2,2})]\, \lambda + \lambda^2 = o$$

die Gleichung aller zu dem Kegelschnitte $U = o$ confocalen Kegelschnitte in Punktcoordinaten des Cartesius.

Die obige Gleichung drückt gleichzeitig eine Kegelschnittsreihe aus, und es müssen demnach durch jeden Punkt der Ebene des Kegelschnittes $U = o$ auch zwei Elemente dieser Reihe gelegt werden können. Diejenigen Werte λ' und λ'' von λ, welche den durch einen bestimmten Punkt M_1 gehenden Elementen vorliegender Kegelschnittsreihe angehören, werden gefunden, sobald man in obiger Gleichung $x = x_1$, $y = y_1$ setzt und hierauf selbe nach λ auflöst. Ist M_1 ein Punkt der vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittsreihe, so wird $\lambda' = \lambda''$ und müssen folglich die Coordinaten eines jeden solchen Punktes der Gleichung genügen:

$$(516)\ldots \quad \begin{array}{l}[A_{3,3}(x^2 + y^2) - 2A_{1,3}\,x - 2A_{2,3}\,y + \\ \qquad (A_{11} + A_{22})]^2 - 4\,A\,U = o,\end{array}$$

und diese bestimmt daher gleichzeitig die vier Tangenten, die man aus den beiden imaginären Kreispunkten an den Kegelschnitt $U = o$ legen kann. Dass eine jede dieser Tangenten je zwei Brennpunkte von $U = o$ enthält, ist an sich klar.

§ 96. Sätze über confocale Kegelschnitte. — Die elliptischen Coordinaten eines Punktes.

Nach dem im vorigen Paragraphen bereits Erörterten bilden sämmtliche Elemente eines Systems confocaler Kegelschnitte eine Kegelschnittsreihe, und daher können auch die verschiedenen Sätze, welche in den früheren Untersuchungen über die Kegelschnittsreihen gefunden wurden, ohneweiters auf ein solches System von Kegelschnitten übertragen werden. Man ist somit berechtigt, die nachfolgenden **Sätze** auszusprechen, u. zw.:

Jeder Strahl in der Ebene eines Systems confocaler Kegelschnitte wird von einem Elemente des Systems berührt.

Durch jeden Punkt in der Ebene eines Systems confocaler Kegelschnitte gehen zwei Elemente des Systems.

Die in diesem System enthaltenen Punktpaare sind die beiden Brennpunktpaare und die beiden imaginären Kreispunkte der Ebene des Systems.

Kein Element des Systems besteht aus einem Geradenpaar.

Die aus irgend einem Punkte M_1 der Ebene eines Systems confocaler Kegelschnitte an sämmtliche Elemente des letzteren gezogenen Tangentenpaare bilden eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen diejenigen Tangenten (T_1) und (T_2) sind, die man in diesem Punkte an die zwei Kegelschnitte des Systems legen kann, welche durch ihn gehen (Desarque), d. h. das aus M_1 an irgend ein Element des Systems gelegte Tangentenpaar theilt den von (T_1) und (T_2) gebildeten Winkel harmonisch (§ 42).

Aus dem letzten Satze fließen aber noch andere wichtige Sätze. Zu den Elementen eines Systems confocaler Kegelschnitte gehören nämlich, wie bereits mehrfach hervorgehoben wurde, auch die beiden imaginären Kreispunkte, weshalb auch diejenigen Strahlen, welche aus M_1 nach diesen beiden Punkten gezogen werden, mit den Tangenten (T_1) und (T_2), die man in M_1 an den beiden durch M_1 gehenden Elemente des Systems legen kann, einen harmonischen Strahlenbüschel repräsentieren. Wie aber in § 45 bewiesen wurde, sind zwei auf einander senkrechte Strahlen und die aus ihrem Schnittpunkte nach den beiden imaginären Kreispunkten gezogenen Strahlen harmonisch, weshalb die Tangenten (T_1) und (T_2) auf einander senkrecht stehen und unter gleichzeitiger Berücksichtigung des vorher Gesagten der **Satz** sich ergibt:

Die durch jeden Punkt M_1 in der Ebene eines Systems confocaler Kegelschnitte gehenden zwei Elemente dieses Systems durchschneiden sich rechtwinkelig.

Ferner repräsentieren aber auch die, sämmtlichen Kegelschnitten des Systems gemeinsamen, zwei reellen Brennpunkte F_1 und F_2 ein Element desselben, und demnach theilen die beiden Strahlen, welche M_1 mit F_1 und F_2 verbinden, den von (T_1) und (T_2) gebildeten Winkel ebenfalls harmonisch, was jedoch in Anbetracht des Umstandes, dass nämlich (T_1) auf (T_2) senkrecht steht, nur dann möglich erscheint, sobald (T_1) und (T_2) die beiden Winkelhalbierungslinien des von $M_1 F_1$ und $M_2 F_2$ gebildeten Winkels darstellen. Ist nun (E_1) der eine durch M_1

gehende Kegelschnitt des Systems und (T_1) die in M_1 an (E_1) gelegte Tangente, so wird (T_2) die Normale dieser Curve in M_1 und daher gilt der **Satz:**

Die in einem Punkte M_1 eines Kegelschnittes verzeichnete Tangente und Normale repräsentieren gleichzeitig die beiden Winkelhalbierungslinien desjenigen Winkels, welcher gebildet wird von den Strahlen, die M_1 mit den beiden reellen Brennpunkten F_1 und F_2 des Kegelschnittes verbinden.

Hierbei muss jedoch eine wichtige Bemerkung gemacht werden. Bei der eben angestellten Betrachtung wurde nämlich stillschweigend angenommen, dass der betreffende Kegelschnitt zwei reelle Brennpunkte besitzt, was jedoch nur dann zutrifft, wenn entweder eine reelle Ellipse oder eine Hyperbel vorliegt, während die Parabel bekanntlich nur einen reellen Brennpunkt F aufweiset, indem der zweite dieser Punkte der unendlich ferne Punkt der Parabelachse ist. Es sind daher, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, die in einem Punkte M_1 derselben verzeichnete Tangente und Normale die beiden Winkelhalbierungslinien desjenigen Winkels, welcher gebildet wird von den Verbindungsgeraden des Punktes M_1 mit dem Brennpunkte F der Parabel und der durch M_1 zur Parabelachse gezogenen Parallelen.

Bekanntlich ist $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = o$ die Gleichung der Ellipse von den Halbachsen a und b in Plücker'schen Liniencoordinaten, daher nach (510) auch $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 - \lambda.(u^2 + v^2) = o$, oder

$$(a^2 - \lambda)\, u^2 + (b^2 - \lambda)\, v^2 - 1 = o$$

die Gleichung aller zu dieser Ellipse confocalen Kegelschnitte, sobald eben wieder der hier vorkommende Parameter λ als veränderlich gedacht wird. Obige Gleichung ausgedrückt in Punktcoordinaten x, y, lautet aber

$$(517) \ldots \quad \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = o,$$

und es ist somit auch (517) die Gleichung aller zu der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ confocalen Kegelschnitte in

Punktcoordinaten. Jede Curve, welche aus (517) durch Specialisierung von λ hervorgeht, ist eine Ellipse oder Hyperbel, wobei in dem ersten Fall auch die Curve imaginär sein kann. Denn erscheint unter der Annahme $a > b$ der Parameter $\lambda < b^2$, so wird $a^2 - \lambda > o$ und $b^2 - \lambda > o$ und ist die Curve eine reelle Ellipse; für $a^2 > \lambda > b^2$ wird dagegen $a^2 - \lambda > o$ und $b^2 - \lambda < o$, daher ist die Curve eine Hyperbel; wählt man endlich λ größer als a^2, so werden $a^2 - \lambda$ und $b^2 - \lambda$ gleichzeitig negativ, d. h. die Curve stellt eine imaginäre Ellipse dar. Es ist somit (517) die Gleichung eines Systems confocaler und centraler Kegelschnitte.

Um endlich noch diejenigen Werte λ_1 und λ_2 von λ zu finden, welche jenen Kegelschnitten des Systems angehören, die durch einen Punkt M_1 von den Coordinaten x_1, y_1 gehen, setze man in (517) einfach $x = x_1$, $y = y_1$ und löse hierauf diese Gleichung nach λ auf. Es sind demnach λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung:

$$(518)\ldots \quad \begin{aligned} F(\lambda) \equiv (b^2 - \lambda)\, x_1{}^2 + (a^2 - \lambda)\, y_1{}^2 - \\ (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = o. \end{aligned}$$

Nun ist aber, da hier die Annahme $a > b$ vorliegt und M_1 als reell vorausgesetzt wird,

$$\begin{aligned} F(a^2) &= (b^2 - a^2)\, x_1{}^2 < o \\ F(b^2) &= (a^2 - b^2)\, y_1{}^2 > o \\ F(-\infty) &= -\infty, \end{aligned}$$

weshalb nach der Lehre von den algebraischen Gleichungen die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung (518) zwischen a^2 und b^2 liegt, d. h. größer als b^2 ist, während die andere zwischen b^2 und $-\infty$ sich befindet, somit kleiner als b^2 erscheint. Es sind daher λ_1 und λ_2 reell, ferner ist $\lambda_1 < b^2$ und $b^2 < \lambda_2 < a^2$, wodurch auch

$$(519)\ldots \quad \begin{aligned} a^2 - \lambda_1 &= a_1{}^2 > o, & b^2 - \lambda_1 &= b_1{}^2 > o, \\ a^2 - \lambda_2 &= a_2{}^2 > o, & b^2 - \lambda_2 &= -b_2{}^2 < o \end{aligned}$$

wird und von den beiden durch den Punkt M_1 gehenden Kegelschnitten des Systems (517) die eine Curve eine reelle Ellipse, die andere aber eine Hyperbel ist. Aus dieser

kurzen Betrachtung resultiert unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Früheren der **Satz**:

Durch jeden reellen Punkt M_1 in der Ebene einer Ellipse $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ geht eine zu derselben confocale Ellipse und Hyperbel und die letzteren durchschneiden sich in M_1 rechtwinkelig.

Die Gleichungen der beiden durch M_1 gehenden Kegelschnitte sind:

$$(520) \ldots \quad \begin{aligned} E_1 &\equiv \frac{x^2}{a_1{}^2} + \frac{y^2}{b_1{}^2} - 1 = o, \\ H_1 &\equiv \frac{x^2}{a_2{}^2} - \frac{y^2}{b_2{}^2} - 1 = o, \end{aligned}$$

wobei $a_1{}^2 \ldots . b_2{}^2$ durch die obigen Relationen (519) definiert erscheinen, und es ist daher auch klar, dass die Coordinaten x_1, y_1 von M_1 obigen Gleichungen ebenfalls genügen müssen. Übrigens findet man durch Auflösung der Gleichungen (520) nach x^2 und y^2, wenn man gleichzeitig die, beiden Kegelschnitten gemeinsame, lineare Excentricität mit e bezeichnet und noch darauf Rücksicht nimmt, dass $e^2 = a_1{}^2 - b_1{}^2 = a_2{}^2 + b_2{}^2$ ist,

$$x^2 = \frac{a_1{}^2 a_2{}^2}{e^2}, \qquad y^2 = \frac{b_1{}^2 b_2{}^2}{e^2}.$$

Die letzten Gleichungen bestimmen aber, in Übereinstimmung mit dem Satze, dass zwei Kegelschnitte in vier Punkten sich durchschneiden, vier Punkte, und ist daher durch die Angabe der beiden Kegelschnitte $E_1 = o$ und $H_1 = o$ oder deren Halbachsen $a_1\, b_1$ und $a_2\, b_2$ der Punkt M_1 noch nicht eindeutig bestimmt. Um somit einen Punkt durch die Angabe von $a_1\, b_1$ und $a_2\, b_2$ — oder, was dasselbe ist, durch die Angabe von λ_1 und λ_2 — eindeutig zu bestimmen, muss man noch überdies angeben, in welchen Quadraten der betreffende Punkt sich befindet. Setzt man demnach voraus, dass M_1 im ersten Quadranten liegt, so bestimmen λ_1 und λ_2 den Punkt M_1 eindeutig und sind aus diesem Grunde auch Coordinaten von M_1. Man nennt nun in der analytischen Geometrie die Größen λ_1 und λ_2 die elliptischen Coordinaten des Punktes M_1 in

Bezug auf die Grundellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$. Selbstverständlich ist dann auch

$$x_1 = \frac{a_1 a_2}{e}, \qquad y_1 = \frac{b_1 b_2}{e},$$

und wenn r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes M_1 von den Brennpunkten F_1 und F_2 der Grundellipse bezeichnen, nach Gl. (b) in § 75

$$r_1 = a_1 - \varepsilon x_1 = a_1 - \varepsilon \frac{a_1 a_2}{e} = a_1 - a_2,$$

$$r_2 = a_1 + \varepsilon x_1 = a_1 + \varepsilon \frac{a_1 a_2}{e} = a_1 + a_2,$$

woraus wieder folgt

$$a_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \qquad a_2 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1),$$

welche Relationen a_1 und a_2, mithin auch b_1 und b_2, aus den Brennpunkten F_1, F_2 und dem Punkte M_1 constructiv zu bestimmen lehren.



